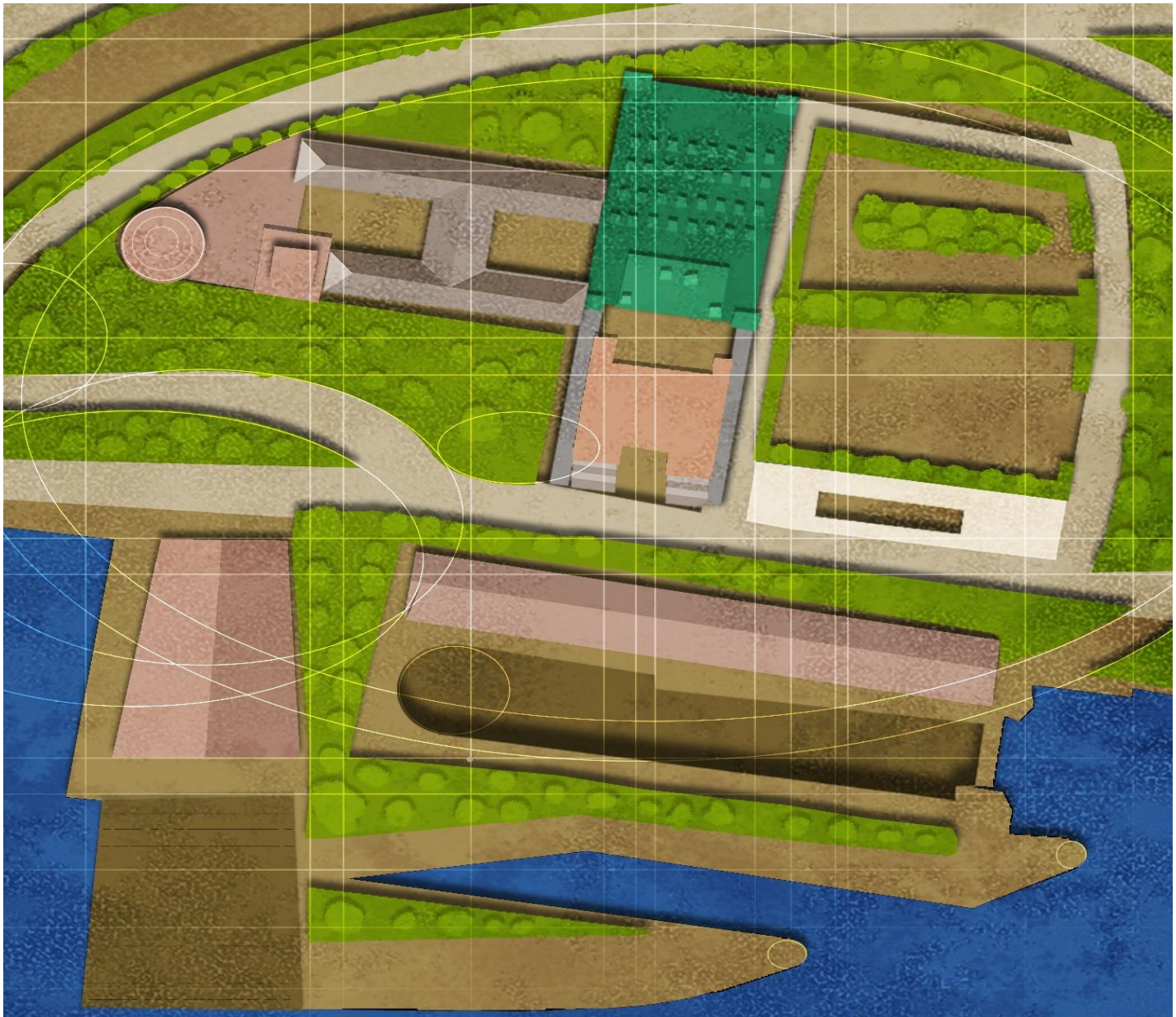


21 JAEM

MATEMÀTICAS ENTRE EL MAR Y LA MONTAÑA

Libro de actas

Actas 21 JAEM “Matemáticas entre el mar y la montaña”

Edita: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

I.S.B.N. 978-84-122154-5-8

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización del editor.

NOTA EDITORIAL: Las opiniones y contenidos de los textos publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de sus autores.

CONVOCA

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

ORGANIZA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria (SMPC)

LUGAR DE CELEBRACIÓN

Del 30 de junio al 3 de julio de 2024

Escuela Técnica Superior de Náutica (Universidad de Cantabria)

Palacio de Festivales de Cantabria

COLABORADORES

Consejería de Educación, Formación Profesional y Universidades del Gobierno de Cantabria

Universidad de Cantabria

Palacio de Festivales de Cantabria

Centro de Profesores de Santander

Ayuntamiento de Santander

Santander Convention Bureau

CASIO División educativa

Santillana

Café Dromedario

Solares

Renfe

Iberia

Comité organizador

Mario Fioravanti Villanueva

Luis Ceballos Barón

Ana Díez Almagro

Emilio Seoane de la Losa

José Antonio Armesto Álvarez

Carlos Fernández Cimiano

Mª Rosa Fernández Merayo

Mª José Fuente Somavilla

Rosa Gómez Alsar

Luz Gutiérrez Ocerín

Claudia Lázaro del Pozo

Aida Manteca Alonso

Ana Pilar Martín Puebla

Sandra Pana Tanasescu

Gema R. Quintana Portilla

Araceli Ramírez Díez

Carlos Rodríguez San Emeterio

Pilar Sabariego Arenas

Daniel Sadornil Renedo

Mª José Señas Pariente

Coordinadora: Carmen Espeso Ortiz (Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria SMPC)

Comité científico

Agustín Carrillo de Albornoz Torres (Sociedad andaluza de Educación Matemática “Thales”)

Carmen Espeso Ortiz (Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria SMPC)

Juan Antonio Espinosa Pulido (Sociedad andaluza de Educación Matemática “Thales”)

Juana María Navas Pleguezuelos (Sociedad andaluza de Educación Matemática “Thales”)

Mª Angels Portilla Rueda (Societat Balear de Matemàtiques SBMXEIX)

Mario Fioravanti Villanueva (Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria SMPC)

Tomás Queralt Llopis (Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwarizmi”)

Bienvenida de la Presidenta de SMPC

La historia de Santander es inseparable del mar: desde la llegada del emperador Augusto, que desembarcó en el 26 AC para poner fin a las guerras cántabras, hasta los Baños de Ola de finales del s XIX, que hacen de Santander un destino turístico, Santander mira al mar.

En esta tierra, entre el mar y la montaña, queremos hacer visibles y presentes las Matemáticas.

La Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria ha asumido, por primera vez desde su creación, la responsabilidad de ser la sociedad organizadora de las 21 JAEM, que tendrán lugar del **30 de junio al 3 de julio de 2024**; somos conscientes de la confianza que la FESPM ha depositado en nosotros y pondremos toda la ilusión y todo el esfuerzo necesario para llevar a cabo este cometido.

En esta ciudad de mar y montaña, queremos recibir a todos los docentes con ganas de compartir, representar, conectar, resolver, experimentar, comunicar, conjeturar, analizar, aprender y enseñar Matemáticas.

Queremos que vengáis a hablar del sentido numérico, algebraico, del sentido estocástico y del sentido de la medida mirando a la bahía de Santander.

Queremos que, entre el mar y la montaña, reflexionemos juntos sobre nuestra práctica docente y sobre cómo mejorarla.

Desde SMPC os invitamos a las 21 JAEM de Santander. Tenemos mucho que compartir y Santander os espera con los brazos abiertos.

Carmen Espeso Ortiz. Presidenta del Comité Organizador de las 21 JAEM

Estructura de las 21 JAEM

El comité científico decidió estructurar los contenidos de las 21 JAEM en siete núcleos temáticos.

Procesos (Pr)

Desde Educación Infantil hasta Universidad, este núcleo recogerá las propuestas, experiencias y reflexiones sobre los distintos procesos que requieren la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para cualquiera de los bloques de contenidos y en cualquiera de sus modalidades y etapas.

Conexiones (Cn)

Los docentes de matemáticas suelen afirmar que las matemáticas están «en todas partes», con lo que se defiende la capacidad de los conocimientos matemáticos para entender el mundo, además de ser un lenguaje que sustenta muchas disciplinas científicas y artísticas.

Por otra parte, cuanto mayor es la comprensión de las matemáticas, más fácil es establecer puentes entre las diferentes partes que componen las matemáticas, y viceversa. De esta manera se difuminan las fronteras entre los bloques de contenidos,

Evaluación (Ev)

La evaluación es una parte integrante del proceso de enseñanza y aprendizaje, y debe tener un carácter continuo, formativo e integrador y, a poder ser, global para favorecer las conexiones y relaciones de las matemáticas. La evaluación se debería

concebir como una oportunidad de aprendizaje, como ocasiones para que los estudiantes muestren evidencias de su competencia matemática (lo que saben y lo que pueden hacer) y como un proceso de mejora progresiva que lleve al alumnado a aprender de sus propios errores y a recibir retroalimentación (autoevaluación y coevaluación).

Recursos para el aula (Re)

Cuando hablamos de recursos para reforzar, completar o dirigir el aprendizaje de las matemáticas estamos pensando en una gama muy amplia de recursos y de materiales, que utilizamos en todos los niveles educativos. Desde materiales manipulativos, como puzles y juegos, calculadoras, programas informáticos, páginas web, vídeo o fotografía, hasta el hecho de plantear una contextualización de los aprendizajes en la vida cotidiana del alumnado o recurrir a la historia de la Matemática.

Formación del profesorado (FP)

La realidad en la que vivimos exige una preparación sin la cual no se puede dar respuesta a las necesidades que surgen dinámicamente y que afectan tanto a la persona que se forma como a los que nosotros formamos en nuestra tarea de profesores. Tanto la formación inicial como la formación permanente contribuyen a la idea de “formación a lo largo de toda la vida”, idea que todo profesional tiene asimilada en su fuero interno. Los elementos que determinan esta formación incluyen desde las investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática, propuestas de aplicación a partir de estas investigaciones, la divulgación de sus resultados en la comunidad educativa, los aspectos a tener en cuenta en la formación inicial, los planes de formación continua, las creencias del profesorado o de los futuros profesores y cómo inciden en su tarea de educador matemático… Todos ellos determinan la práctica docente y su intervención ante sus alumnos.

Comunicación y divulgación (CD)

La comunicación, en el sentido más amplio del término, se presenta como un elemento fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje: el tipo de lenguaje utilizado en el aula, las diferentes representaciones elegidas para una determinada situación, la importancia del lenguaje simbólico, las exposiciones y producciones del alumnado, etc

.

La divulgación matemática, pese a no buscar a priori los mismos objetivos que la educación matemática, es un recurso muy útil para conseguir contextualizar conceptos y propiedades matemáticas, acercar al alumnado a la labor del matemático en distintos campos profesionales y mejorar la actitud del alumnado hacia la materia.

Inclusión (In)

La educación es la base de la calidad de vida de las personas. La educación inclusiva y equitativa contribuye a potenciar el talento de todas las personas.

Cada día se pone de manifiesto que las personas matemáticamente competentes tendrán más oportunidades para elegir su propio futuro profesional. Por ello, el aprendizaje de las matemáticas no puede ni debe estar reservado para unos pocos elegidos. No hay conflicto entre equidad y excelencia. Todas las personas deberían tener la oportunidad y el apoyo necesario para aprender significativamente una base común de matemáticas. Las personas muestran diferentes capacidades, habilidades, necesidades, motivaciones e intereses. Sin embargo, todas deben tener acceso a una

Modalidades de participación

El profesorado pudo presentar propuestas de participación en alguna de las siguientes modalidades:

- Comunicaciones (Co)
- Talleres (Ta)
- Pósteres
- Exposiciones
- Mesas de experiencias

Niveles educativos

Para estructurar este documento cada artículo se referencia con la modalidad de participación, el núcleo temático y un nivel educativo de entre los siguientes:

- Infantil y Primaria (IP)
- Secundaria y Bachillerato (SB)
- Universidad (Un)

21 JAEM

MATEMÁTICAS ENTRE EL MAR Y LA MONTAÑA

Índice

Bienvenida de la Presidenta de la SMPC 6

Conferencias plenarias

CPIT1 *La Cenicienta de las matemáticas* 32
Francisco Santos Leal

CPIT2 *Renovarse o morir: el papel crucial de la formación continua* 32
Daniel Ruiz Aguilera

CPIT3 *Lecciones de tres reformas del plan de estudios de matemáticas en Portugal (1997, 2001, 2023)* 33
Jaime Carvalho e Silva

CPIT4 *Las matemáticas detrás de la Inteligencia Artificial* 34
Amelia Simó Vidal

Ponencias

PnIPFP08 *Formación en matemáticas del profesorado de infantil y primaria: dónde estamos y hacia dónde vamos* 36
Natividad Adamuz

PnPRPr12 *10 cosas que aprendí enseñando Matemáticas en Primaria* 36
Francesc-Xavier Fernández Berges

PnPRRe13 *Otras miradas a los materiales de siempre* 37
Mª Cristina Naya Riveiro

PnSOCn03 *El desarrollo de competencias matemáticas específicas a través del aprendizaje basado en proyectos STE(A)M: un objetivo del actual currículo español* 37
José Manuel Diego Mantecón

PnSORe14 *El aula de matemáticas como taller* 38
Sonsoles Blázquez

PnSBCD2 *Divulga y vencerás* 39
Puri Montesisnos

PnSBEv05 *Cómo evaluar y no morir en el intento* 39
José Luis Muñoz Casado

PnSBPr11 *Del blanco y negro al color: Los procesos matemáticos en el aula* 40
Julio Rodríguez Taboada

PnITCD01 *Sentir y jugar para divulgar matemáticas desde el aula.* 40
Pedro Martínez Ortiz

PnITCn04 *Hacer Matemáticas en los proyectos de Centro* 41
Beatriz Blanco Otano

PnITIn10 *STEAMizando el aprendizaje matemático: abriendo caminos para estudiantes en riesgo de exclusión social* 42
Teresa Fernández Blanco

PnITIn09 *Matemáticas Inclusivas en Acción* 42
Maite Navarro Moncho

PnITEv06 *La evaluación en el sistema educativo: las competencias específicas de matemáticas* 43
Mónica Domínguez García y Ruth Martín Escanilla

Comunicaciones

CoIFCD06 *Representación matemática en infantil: la página en blanco* 46
Mequè Edo Basté
Judith Fabrega
Laura Puchades

CoIFCn04 *El álbum ilustrado en Educación Infantil:* un recurso para el aprendizaje matemático..... *59*
Blanca Arteaga-Martínez

CoIFRe24 Experiencia con GeoGebra en Infantil 76
Teresa Cepero Fustero
Arancha López Lacasta
Daniel Sierra Ruiz

CoPRCD14 *Calculadora en mano: potenciando el aprendizaje en el aula* 85
Angel García Marrero
María Salgado Somoza
Santos Pinto Cerezo

CoPREv17 *Proyecto Erasmus+ DiToM: (Herramienta de diagnóstico en Matemáticas)*..... 89
Claudia Lázaro del Pozo
Mª del Pilar Sabariego Arenas
Blanca Arteaga Martínez

CoPREv19 Importancia del diálogo en el aula de educación primaria para fomentar la construcción de conocimiento matemático..... 101
Yolanda Martín Blanco
Isabel Sellas Ayats

CoPRFP58 *ProyectaMates: formación mediante la observación de videograbaciones* 118
Alberto García Díaz
María José González Lorenzo
Israel García Alonso

CoPRPr38 El método Singapur: Resolviendo problemas con el método de barras en Educación Primaria..... 132
José Luis González Fernández
José Antonio Núñez López
David Molina García
Iván Fernández Suárez

CoPRRe30 El potencial del juego en la LOMLOE, una experiencia basada en el juego del DOGGY BAG 146
José Miguel Maimó Oliver
Luis Cros Lombarte
Jordi Deulofeu Piquet
Helena Garví Casas

CoPRRe48 El sentido numérico a través del juego. Banco de fichas colaborativo entre docentes de todas las etapas: “TE TOCA” 160
Lidia Esparza Díaz
Andrea de la Fuente Silva
Mari Cruz Morcillo García

CoPRRe59 El cuento ilustrado como recurso para promover el sentido algebraico en Educación Infantil y Primaria 181
Paula López Serentill
Nataly Pincheira

CoSOCD18 *Una propuesta divulgativa y formativa desde las Matemáticas y la Filosofía* 193
Álvaro Sánchez González
Vicente Caballero de la Torre

CoSOCn03 *Resolviendo problemas ¿Cueces o enriqueces?* 200
Elena Gajate Paniagua

CoSOCn32 *La modelización del oloide para la mejora de la visualización tridimensional* 206
Lucía Rotger García
Ángeles Ruiz González
Juan Miguel Ribera Puchades

CoSOCn44 *Matemáticas jugando con el móvil* 219
Víctor Monterreal Blázquez

CoSOCn45 *Anamorfismos en un aula de ESO* 229
Alba Blasco Estrada
Josep Costa Riu

CoSOCn56 *Puertas abiertas a la mirada matemática:* De la fotografía de Puertas, al Microrrelato Matemático 235
María del Pilar
Menoyo Díaz

CoSOEv16 *Geogebra: potente herramienta para el aprendizaje y la evaluación en matemáticas.* 262
Juan Francisco Hernández Rodríguez

CoSOFP09 *Resultados de una situación de aprendizaje sobre el concepto de función en 1º DE ESO* 271
M.ª Esther Fernández Arellano
Juan Pedro Martín Díaz
Sergio Manuel Pérez Pozuelo
Susana Repiso Barba

CoSOFP33 *Implementación de la tutoría entre iguales en el aula de Matemáticas* 287
Mireia Vinyoles Serra
Anna Auría Rasclosa

CoSOFP43 *La Probabilidad en el currículo español de Educación Secundaria Obligatoria por Comunidades Autónomas* 303
Macarena Elgueda-Ibarra
María Magdalena Gea Serrano

CoSOFP55 *El acompañamiento docente. Una medida para el cambio metodológico en Matemáticas* 316
María Nila Pérez Francisco
José Manuel Vidal González

CoSOIn02 *Diseño de problemas con extensiones para atender estudiantes con alta capacidad matemática* 320
Diego Alfonso Contreras Contreras

CoSOIn36 *Juegos móviles y de mesa para el desarrollo de habilidades críticas y creativas en el alumnado con talento matemático* 327

Lucía Rotger García

Ana Belén Petro Balaguer

Juan Miguel Ribera Puchades

CoSOIn49 *Modificaciones a una tarea de pensamiento computacional sobre Scratch propuestas por alumnado que presenta talento matemático*343

Juan Miguel Ribera Puchades

Lucía Rotger García

CoSOPr28 *Actividades para el aprendizaje de la demostración basadas en los ejemplos genéricos* 362

Georgina Cerqueda Santacreu

Yolanda Colom Torrens

Jordi Deulofeu Piquet

CoSOPr39 *Propuesta para desarrollar el Pensamiento Estadístico, para toda la ESO* 377

Xavier Vilella Miró

Jaume Serra Nogués

CoSOPr40 *Acceso a Universidad para mayores de 25 años: ¿Qué queda de lo que estudiamos?*.....391

Neila Campos González

CoSOPr50 *Estrategias de formulación de problemas en Secundaria: Funciones.* 409

Kevin Herrera Dévora

Israel García Alonso

CoSOPr54 *Diseño de una situación de aprendizaje para la noción de Función en 1º de ESO* 426

Paula Roca Borrallo

Myriam Codes Valcarce

Lorenzo Castilla Mora

Rocío Pérez Guzmán

CoSORe12 *12-16: nada más que añadir* 440
Teresa Cepero Fustero
Arancha López Lacasta
Daniel Sierra Ruiz

CoSORe13 *Aritmética, Álgebra y Geometría en 1º ESO desde la é-dub-ba y la pr-nh* 459
Ana María Pérez Cubillo

CoSORe25 *Spira Mirabilis*..... 482
Carlos Luna Mota

CoSORe26 *¿Por qué no hay mujeres matemáticas? Episodios matemáticos*.... 494
Mª del Pilar Sabariego Arenas

CoSORe29 *El distanciamiento físico. ¿Colocaciones o teselaciones?* 510
Eugenia Torres Martin
Jordi Deulofeu Piquet

CoSORe35 *Resolviendo ecuaciones con STACK*..... 529
María Sanz Ruiz
José Manuel Diego Mantecón
Zaira Ortiz Laso

CoSORe41 *El triángulo de las redes sociales: evalúa, tutoriza y divulga a través del vídeo* 543
Juan Miguel Ribera Puchades
José Carlos Gámez Pérez
Alberto César Barbero

CoSORe52 *La ecuación de primer grado: una ocasión para desarrollar el Sentido Algebraico de nuestro alumnado*..... 557
Xavier Vilella Miró

CoSORe53 *Juegos de mesa, un contexto para el desarrollo de procesos y saberes en el aula de matemáticas* 567

Luis Cros Lombarte

Jordi Deulofeu Piquet

Helena Garví Casas

José Miguel Maimó Oliver

CoSORe60 *¿Existe algo mejor que resolver un problema de matemáticas? Si, existe.* 580

Juan Francisco Hernández Rodríguez

CoBACD07 *Resolución de problemas en Bachillerato y ESO con GeoGebra* 591

Abel Ruyman Expósito Soto

Ruth Trancho Lemes

CoBACD15 *Matemáticas de verdad para mejorar la percepción pública de las Matemáticas* 597

Nicolás Atanes Santos

CoBACn05 *Geogebra como herramienta de investigación en los proyectos del Bachillerato de Excelencia* 603

Irene Tuset Relaño

CoBAFP20 *Conexiones entre Matemáticas y Física: distintas perspectivas de una tarea.* 620

María del Valle Bermejo Luna

Gloria Sánchez-Matamoros García

CoBAPr11 *Envases para contextualizar el análisis.* 636

Jesús Cortés Velasco

Elena Gajate Paniagua

CoBAPr22 *Una trayectoria hipotética de aprendizaje para construir el concepto de límite de una función en un punto* 642

Joan Pons Tomàs

Julia Valls González

CoBAPr51 *Las Matemáticas en el Bachillerato Andorrano* 661
Yolanda Colom Torrens
Núria Rosich Sala

CoBARe01 *Optimizando la solución* 682
Álvaro Vielba Iglesias
Mª Rosario Fátima Zamora Pérez

CoBARe08 *Biografías matemáticas.* 698
Juan Francisco Hernández Rodríguez

CoUnCn46 *Enseñanza del ámbito magnitudinal medida a través de talleres cooperativos: Construyendo y diseñando actividades de aprendizaje* 713
Juan Antonio Antequera Barroso
Mª José Cáceres García
Beatriz Sánchez Barbero

CoUnEv57 *Diseño e implementación de una experiencia de evaluación entre iguales en Educación Superior para el aprendizaje online de Matemáticas* 729
Francesc Garcia Tercero
Yolanda Colom Torrens
Jordi Anguita Ruiz
Teresa Sancho Vinuesa

CoUnFP10 *Una propuesta de integración del diseño universal para el aprendizaje con los criterios de idoneidad didáctica* 752
Alicia Sánchez Brualla
Vicenç Font

CoUnFP21 *La Escape-Room como propuesta de intervención con maestros en formación* 768
María Salgado Somoza
Cristina Núñez García
Alejandro Gorgal Romaris

CoUnFP31 *Lectura crítica de información estadística por futuros profesores de Matemáticas* 775

María Teresa Castellanos Sánchez

Nelson Fernando Vergara

Omaira Gonzáles

CoUnFP34 *Fortaleciendo la Formación del profesorado: Nueva Mención en Ciencias y Matemáticas en Educación Primaria de la Universidad Rey Juan Carlos I* 791

Paula Rosado Jiménez

Piedad Tolmos Rodríguez-Piñero

Ana I. Cid Cid

CoUnFP37 *No es Álgebra todo lo que reluce: Una experiencia con alumnos de formación inicial de maestros* 800

Susana Villar Sanjurjo

CoUnFP42 *Un proyecto APS: Creación de cuentos para el aprendizaje de las Matemáticas con usuarios con discapacidad visual* 817

Beatriz Sánchez Barbero

Mª José Cáceres García

Araceli Queiruga-Dios

CoUnFP47 *Actividades de modelización matemática en un proyecto de impresión 3D y rutas matemáticas* 832

Leyre Gilardi Olarrea

Álvaro Nolla

Angélica Benito

Ariadna Gómez Escobar

CoUnPr23 *Píldoras de modelización en ingeniería* 848

Joan-Vicenç Gómez i Urgellés

Talleres

TaIFPr04 *Aprender a pensar desde infantil. El desarrollo del razonamiento lógico matemático*.....865

Ana Rosa Díaz Rodríguez

Carmen Rosa Mesa González

TaIFPr08 *La Mercería: un espacio para enhebrar conocimientos matemáticos* 869

Anna Rodríguez Casas

Francesc-Xavier Fernández Berges

TaIFRe10 *Acercando la topología a las aulas de Infantil y Primaria a través del juego del dominó*.....873

Sandra Reja Expósito

Rodríguez Pérez

Clara Monteagudo Benítez

Myriam Codes Valcarce

TaIFRe14 *Un recurso para establecer relaciones: cajas del 10*.....878

Francisco José Morales Villegas

María Nila Pérez Francisco

TaPRCD40 *Historia de la numeración. Contexto y pretesto para aprender Matemáticas*.....883

Silvia Margelí Voelp

Enric Castellà Carlos

TaPRCn12 *Conexiones: experimentando la probabilidad* 888

Francisco José Morales Villegas

Ana Rosa Díaz Rodríguez

TaPRCn34 *Construímos y medelamos: Conectando arquitectura y matemáticas* 894

Ana Belén Petro Balaguer

Narcís Matas Tortosa

TaPRPr16 *Integrando el Pensamiento Computacional en 2º y 3er Ciclo de Educación Primaria y 1º Ciclo de la ESO* 911
Angel García Marrero
Ana Rosa Díaz Rodríguez
Nieves R. González Arrocha

TaPRPr19 *Estimaciones en el aula de Primaria* 917
Francesc-Xavier Fernández Berges
Anna Rodríguez Casas
Marta Aragüés Vidal

TaPRPr32 *Formando pensadores matemáticos. La importancia de las preguntas en un ambiente de resolución de problemas* 921
Cyntia Riquelme Carvallo
Carles Granell Fernández

TaPRRe05 *¿Dados y probabilidad? ¡Que empiece la subasta!* 936
Carles Granell Fernández

TaPRRe15 *Mosaicos por la igualdad* 940
Leyre Gilardi Olarrea
Ariadna Gómez Escobar
Javier Rodríguez Miravalles
Álvaro Nolla

TaPRRe26 *Algoritmos flexibles para desarrollar el sentido numérico a través de la suma y la resta: movimiento OAOA* 945
Marcos Marrero Cárdenas

TaPRRe30 *Gestión de tares ricas para practicar las tablas* 947
Cecilia Calvo Pesce
Laura Roma Gómez
Rojas Calvo

TaPRRe36 *¿Jugamos otra?, ¡¡¡Jugamos otra!!!* 959
Luis Cros Lombarte
José Miguel Maimó Oliver
Helena Garví Casas

TaPRRe38 *Conexiones entre área y perímetro con material manipulativo* 971
Carles Granell Fernández

TaPRRe44 *Algoritmos flexibles para desarrollar el sentido numérico a través de la multiplicación y división: movimiento OAOA* 978
Marcos Marrero Cárdenas

TaPRRe45 *Desarrollando el Pensamiento Computacional en Educación Infantil y 1º ciclo de Primaria*..... 980
Nieves R. González Arrocha
María Nila Pérez Francisco
Angel García Marrero

TaSOCn21 *Redes de aprendizaje: MAQUETEM MATARÓ* 987
Roser Garcia Ferrer
Xavier Vilella Miró

TaSOPr01 *Creación de un aula de pensamiento en matemáticas* 1005
Álvaro Vielba Iglesias
María Astrid Cuida Gómez
María Paloma Vadillo Rebollo

TaSOPr6 *Conversaciones… irracionales*..... 1020
Enric Castellà Carlos
Silvia Margelí Voelp

TaSOPr11 *De garbanzos a tanques. Preguntas sobre la estimación del tamaño de poblaciones*..... 1027
Laura Morera Úbeda
Marcel Algueró Casas
Cristina Vila Triadó

TaSOPr13 *Las Matemáticas de la pajarita*..... 1042
Estefania Hernández Salas

TaSOPr22 *Entre números, signos y letras: Enteros y Álgebra al comienzo de la ESO* 1048
Eva Cid
Pablo Beltrán Pellicer
José M. Muñoz-Escolano

TaSOPr23 *El flow en la clase de Matemáticas: procesos y evaluación* 1065
Inés María González Aguiar
María Muñoz Pérez
García Alonso

TaSOPr35 *Los dados de James Grime* 1074
Juan Manuel Couchoud Pérez
María José Ferrer Fayos
Josefa García Pedro
Julia Mezquida Chesa

TaSORe07 *El comic como recurso en el aula de matemáticas* 1084
Arantzazu Fraile Rey
Pedro Antonio Martínez Ortiz
María Herrera Becerra
Francisco Manuel Saez de Adana

TaSORe09 *El Sentido Socioafectivo en Educación Matemática. Identificación y acompañando Emociones, Actitudes y Creencias en el aula.*..... 1087
Rocío Garrido Martos
Andrea de la Fuente Silva
Javier Rodríguez Miravalles
Ariadna Gómez Escobar

TaSORe17 *El Sentido Estocástico a través del juego. Claves y situaciones de aprendizaje concretas para introducirlas desde YA al principio de tu programación.* 1092

Andrea de la Fuente Silva

Rocío Garrido Martos

Leyre Gilardi Olarrea

Javier Rodríguez Miravalles

TaSORe18 *Va de reto(s)* 1099

Maria M. Fernández Correa

Rubén Pérez Zamanillo

TaSORe20 *Entre las matemáticas y el pensamiento computacional Taller de HelloBebras! para secundaria* 1110

Raül Fernández Hernández

Arnau Sánchez Farreras

Anton Aubanell Pou

TaSORe24 *Actividades de probabilidad a través de la obra de Tamás Varga* . 1120

Jordi Font González

Sergi Muria Maldonado

Paula López Serentill

Fernández Hernández

TaSORe25 *Taller de estrellas de papel* 1135

Elena Gajate Paniagua

TaSORe27 *Thinking Classroom de Pensamiento Computacional* 1139

Belén Palop

Juan José Santaengracia

Luis J Rodríguez-Muñiz

TaSORe28 *Aprender Matemáticas con un trasfondo histórico. El Álgebra de Pedro Núñez* 1147

Iolanda Guevara Casanova

Fàtima Romero Vallhonesta

TaSORe29 *Teselaciones de papel* 1166
Carme García Caballero

TaSORe33 *Juegos abstractos matemáticos* 1173
José Muñoz Santonja
Antonio Ledesma López
Juan Antonio Hans Martín

TaSORe37 Lógica y Razonamiento Matemático a través del Ajedrez Educativo 1189
Alfonso Navas Alcaide

TaSORe39 *Teselas de Origami y Pensamiento Computacional* 1192
Eulalia Tramuns Figueras
Belén Garrido Garrido

TaSORe41 *Aprender álgebra con materiales, ¡es posible!* 1198
Anna Vilaró Utrillo

TaSORe42 *Taller de asignación de probabilidades* 1207
Joan Pons Tomàs
Fernando Arenas Planelles
Julia Muñoz González

TaSORe43 *Juegos en las Olimpiadas Catalanas de ESO* 1227
Joan Folguera Farré

TaBACn31 *Explorando en entorno con GeoGebra Discovery* 1235
Belén Ariño Morera
Claudia Lázaro del Pozo
Tomás Recio Muñiz

TaITIn49 *Desarrollando competencias matemáticas: estrategias para un aprendizaje activo y seguro* 1242
María Teresa Navarro Moncho

Mesas de experiencias

T3 Puzzle: un material por descubrir 1244
Carles Granell Fernández

Problemas ambientados 1248
Juan Lebrija Vega

La caja de Varga: laboratorio portátil de combinatoria y probabilidad 1252
Anton Aubanell Pou
Manel Martínez Pascual
Sergi Muria Maldonado
Paula Arrebola Oya

Experiencias en campamentos matemáticos: recursos para trabajar matemáticas con pompas de jabón 1272
Pol Landman Brignoni

El tour de Mates: La gran carrera de cálculo mental 1274
DIEGO ALONSO SANTAMARÍA

Calculadora gráfica 3D Neotrie VR 1283
José Luis Rodríguez Blancas
Rubén Hernández Sánchez
Ángel Vico Moreno

Pósters

Sentido del muestreo en la práctica de aula 1298

Alondra Stuardo

Nuria Begué

María Magdalena Gea Serrano

Macarena Elgueda-Ibarra

Resolución de problemas de permutaciones sin repetición mediante estrategias informales por estudiantes de secundaria con autismo 1299

Lara González de Cos

Steven Van Vaerenbergh

Juncal Goñi Cervera

Irene Polo Blanco

Resolución de problemas de multiplicación y división por un alumno con autismo. 1300

Laura Laso Munitis

Lara González De Cos

Raúl Fernández Cobos

Irene Polo Blanco

Mosaicos por la Igualdad: Geometría y Arte a través de Aprendizaje-Servicio ... 1301

Ariadna Gómez Escobar

Leyre Gilardi Olarrea

Rodríguez Miravalles

Álvaro Nolla

Matemáticas para maestros/as a través de Matevisión..... 1302

Gonzalo Castiñeira Veiga

Cristina Núñez García

Influencia del contexto en las estrategias de resolución de un problema de modelización en el futuro profesorado de Educación Primaria 1303

Carmen Melchor Borja

Marta Pla Castells

Gamificación Matemática: Attack Maths 1304

Patricia Navarro Martínez

Formación inicial de maestros en la resolución de problemas verbales en alumnado con autismo 1305

Steven Van Vaerenbergh

Raúl Fernández Cobos

Experiencia de aula: una práctica de laboratorio para introducir la medida. 1306

María del Valle Bermejo Luna

Inmaculada del Rocío Lucena Trigo

El pensamiento algebraico en educación infantil: una trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición 1307

Nataly Pincheira

Yeni Acosta

Ángel Alsina Pastells

DiToM. Diagnósticos Matemáticos 1308

Blanca ARTEAGA-MARTÍNEZ

Grupo de trabajo FESPM

Adaptación de applets matemáticos para alumnado con autismo mediante un decálogo validado 1309

Steven Van Vaerenbergh

Álvaro Gómez García

Irene Polo Blanco

1000 días, 1000 fotos 1310

Víctor Monterreal Blázquez

Conferencias plenarias

La Cenicienta de las matemáticas

Francisco Santos Leal
Universidad de Cantabria

Resumen: El título de esta charla viene motivado por el siguiente párrafo de Anders Björner y Richard Stanley (1999): "El desarrollo reciente de la combinatoria es en cierto modo la historia de la cenicienta: los matemáticos convencionales la solían mirar por encima del hombro considerándola menos respetable que otras áreas, a pesar de sus muchos servicios tanto a la matemática pura como aplicada. Pero entonces llegó el príncipe de la informática con todos sus problemas y necesidades matemáticas, y fue la combinatoria a quien mejor le encajaba el zapatito de cristal".

En la charla revisaremos brevemente la historia de la combinatoria y nos detendremos en algunos resultados particulares, sobre todo en relación con los poliedros y sus análogos de dimensión superior, los llamados politopos, un tema muy clásico pero que ha tenido un fuerte renacer desde los años 80 entre otros motivos por sus connotaciones algorítmicas.

Enlace al video de la conferencia

Renovarse o morir: el papel crucial de la formación continua

Daniel Ruiz Aguilera
Universitat de les Illes Balears

Resumen: La evolución constante de nuestra sociedad nos impone un desafío ineludible: ¿cómo mantenernos actualizados y eficaces en nuestras aulas? La respuesta reside en la formación permanente, un pilar fundamental de nuestra profesión.

Sin embargo, no todos los cambios son igualmente beneficiosos, ni toda innovación merece una aceptación automática. Es vital cultivar un espíritu crítico y reflexivo al evaluar las distintas propuestas formativas disponibles.

En esta ponencia exploraremos diversos modelos de formación y compartiremos experiencias que han demostrado impactar positivamente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Enlace al video de la conferencia

Lecciones de tres reformas del plan de estudios de matemáticas en Portugal (1997, 2001, 2023)

Jaime Carvalho e Silva
Universidad de Coimbra

Resumen: No fue una acción preparada por mí, pero estuvo en la coordinación de los equipos que prepararan el plan de estudios de la asignatura de Matemática en la enseñanza secundaria (años 10, 11 y 12) de Portugal, por tres veces. La Gran Reforma del Sistema Educativo portugués después de la queda da la dictadura en 1974 ocurrió en 1990 y todos los planos de estudio cambiaran en todas las asignaturas. Pero el plan de Matemática en secundaria fue un desastre y tuvo que cambiar en 1997. En 2001 el plan de 1997 fue alargado en varias direcciones. El cambio de 2013 fue otro desastre, pero solo cambió en 2023.

¿Cuáles son las características que se pueden identificar en los cambios de 1997, 2001 y 2023 y que no están presentes en los cambios de 1990 y 2013? ¿Tiene la asignatura de Matemática características especiales que condicionan esta asignatura? ¿Cuál es su importancia en el siglo XXI? ¿Mayor o menor que en el pasado? ¿Todos los jóvenes deben estudiar matemática en secundaria?

Enlace al video de la conferencia

Las matemáticas detrás de la Inteligencia Artificial

Amelia Simó Vidal
Universitat Jaume I

Resumen: El término inteligencia artificial (IA) se ha convertido en uno de los más usados por los medios de comunicación hoy en día y se usa para significar muchas cosas diferentes en muchos contextos diferentes. Además, una gran parte de la sociedad ve la IA como un tipo de "alquimia". En esta charla intentaremos concretar que es, los tipos de aplicaciones y los tipos de técnicas de la IA y, lo que es más importante, descubriremos de una manera sencilla y práctica que hay en el origen y detrás de la mayoría de técnicas de la IA: ¡matemáticas!

Enlace al video de la conferencia

Ponencias

Formación en matemáticas del profesorado de infantil y primaria: dónde estamos y hacia dónde vamos

Natividad Adamuz

Resumen: La formación inicial del profesorado de infantil y primaria en España incluye asignaturas específicas de matemáticas y su didáctica, pero a menudo se percibe como insuficiente en profundidad y enfoque pedagógico. La percepción general es que parte del profesorado no se siente completamente preparado para enseñar matemáticas de manera efectiva. En ese sentido, una de las líneas de investigación más consolidadas en el ámbito de la Educación Matemática, dentro de la formación de profesorado de esta materia, es estudiar su conocimiento profesional, ya que su actuación docente va a estar condicionada por este conocimiento, que es el que le permitirá diseñar, aplicar y actuar frente a las distintas situaciones que se le plantean en el aula. Durante la ponencia, trataremos de analizar algunas de las variables que entran en juego en este complejo puzle de la formación docente. También, trataremos de mostrar experiencias que tienden puentes bidireccionales entre la investigación y la práctica docente.

10 cosas que aprendí enseñando Matemáticas en Primaria

Francesc-Xavier Fernández Berges
xfernan1@xtec.cat
Grup Perímetre Girona / Escola L'Estació - Sant Feliu de Guíxols (Girona)

Resumen: Maestros y maestras aprendemos a enseñar a lo largo de toda nuestra vida profesional. Hay una serie de procesos y habilidades muy importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Me gustaría comentarlos y compartir,

a partir de ejemplos y actividades, con sensatez e ilusión, algunas de las cosas (10) que he ido aprendiendo enseñando matemáticas en Primaria.

Otras miradas a los materiales de siempre

Mª Cristina Naya Riveiro
Universidad de A Coruña

Resumen: Se pretende redescubrir materiales manipulativos para su uso en las aulas de Educación Primaria. Se presentará, entre otros, materiales como los pentaminós o bloques geométricos (pattern blocks) analizando las oportunidades de aprendizaje que su manejo puede ofrecer en nuestras aulas. Además también se presentarán recursos digitales interesantes que puedan complementar estas oportunidades de aprendizaje.

El desarrollo de competencias matemáticas específicas a través del aprendizaje basado en proyectos STE(A)M: un objetivo del actual currículo español

José Manuel Diego Mantecón
diegojm@unican.es
Universidad de Cantabria

Resumen: La implementación de la LOMLOE ha fomentado el uso de una metodología activa poco común en las clases de matemáticas: el aprendizaje basado en proyectos que integra disciplinas STEAM (Ciencia, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas). En esta ponencia se aborda la problemática de la implementación de

proyectos STE(A)M en el aula para promover el desarrollo de competencias matemáticas específicas como la modelización, las representaciones, las conexiones intra-matemáticas, y el desarrollo de una actitud positiva hacia esta disciplina. En ella se describirán los principales obstáculos de los docentes que se enfrentan por primera vez a esta metodología. Dichos obstáculos, se ejemplificarán a través de la experiencia de dos profesores de secundaria que refinaron e implementaron durante tres años el mismo proyecto STE(A)M en su aula, para fomentar las competencias indicadas anteriormente. Su evolución no fue solo consecuencia del trabajo autónomo sino también del apoyo recibido por parte de formadores del Open STEAM (https://www.opensteamgroup.unican.es/). Los profesores y formadores mantuvieron reuniones de trabajo periódicas con el fin de refinar los proyectos para futuras implementaciones. Se mostrará, a lo largo de esta ponencia, cómo el progreso de los profesores a la hora de hacer emerger las matemáticas se debe en gran medida a su compromiso y constancia por refinar los proyectos, y a la capacidad de los formadores para transmitir resultados experimentales en ejemplos prácticos de aula.

El aula de matemáticas como taller

Sonsoles Blázquez

Resumen: Representar, comunicar, conectar, razonar y resolver problemas son procesos necesarios para construir las matemáticas, procesos que implican la actividad del alumnado. Elegir el soporte y los recursos adecuados, más allá del libro de texto, es lo mismo que buscar el andamiaje que facilite dicha construcción. En esta ponencia se hacen propuestas concretas de recursos diversos para convertir el aula de matemáticas de secundaria en un taller donde la actividad del alumnado sea la protagonista.

Divulga y vencerás

Puri Montesinos
IES Prado de Santo Domingo (Alcorcón, Madrid)

Resumen: Los profesores de Matemáticas no somos únicamente trasmisores de un lenguaje propio y de unos conceptos. Durante años, las leyes educativas se han preocupado a veces demasiado poco de la necesidad de hacer mejoras en metodología y didáctica y estos aspectos son muy importantes para formar a nuestros alumnos.

Ante la falta de matemáticos que quieran ser profesores, debemos dar un paso más para que nuestros alumnos se acerquen a las matemáticas desde diferentes puntos de vista, utilizando también la divulgación en el aula. Enseñarles a investigar y a divulgar en matemáticas puede ser un paso para acercarlos a nuestra profesión y que al final sea la que elijan en un futuro.

El objetivo de la ponencia será reflexionar sobre este tema, hacer propuestas de divulgación matemática en el aula para ESO y Bachillerato y analizar las barreras que podemos vencer en nosotros mismos y en nuestros alumnos con estas propuestas.

Cómo evaluar y no morir en el intento

José Luis Muñoz Casado

Resumen: Los profesores tenemos la misión de garantizar la equidad, la justicia y el reconocimiento en el proceso de evaluación. Una misión con muchísimas dificultades como las expectativas predefinidas sobre cómo y qué se debe enseñar y evaluar, una nueva legislación, las presiones sobre la bajada del nivel, las ratios altas, los recursos escasos, la falta de formación, etc. En esta charla hablaré sobre algunos aspectos de la evaluación que pueden ayudar a no morir en el intento.

Del blanco y negro al color: Los procesos matemáticos en el aula

Julio Rodríguez Taboada

Resumen: La organización del currículo de matemáticas alrededor de los procesos matemáticos conlleva la necesidad de modificar algunos aspectos de la planificación, organización y gestión del trabajo en el aula por parte del profesorado. Ante este cambio de enfoque, es preciso presentar ejemplos de actividades de aula, de metodologías y de organización del trabajo en clase que puedan ayudar al profesorado a implementar este cambio de enfoque en sus aulas.

El objetivo de esta propuesta es proporcionar algunos de estos ejemplos, así como recursos y estrategias que sirvan de apoyo a los y las docentes en esta tarea.

Sentir y jugar para divulgar matemáticas desde el aula.

Pedro Martínez Ortiz

IES María Blasco de San Vicente del Raspeig / Grado de Magisterio de la Universidad de Alicante

Resumen: Gran parte de la sociedad guarda consigo una visión muy distorsionada de lo que realmente son las matemáticas. Cuando se pregunta qué son o a qué se dedica alguien que hace matemáticas podemos obtener respuestas equivocadas, sesgadas, rígidas e irreales. La situación no mejora cuando se indaga en la componente emocional donde el miedo o la ansiedad hacia las matemáticas hace que muchas personas las rehuyan. Con este contexto es difícil que nuevas generaciones aboguen por dedicarse a las matemáticas y/o a la ciencia, lo cual repercute en el progreso científico y social. ¿Qué podemos hacer desde el aula para intentar cambiar este panorama? ¿Podemos contribuir a una divulgación matemática a pequeña

escala? El diseño de experiencias en el aula con manipulativos, juegos, lecturas, cómic, diálogo e interacción con la comunidad educativa puede ser un buen punto de partida para cambiar este descolorido paisaje y hacer que las matemáticas se extiendan, consiguiendo que se hable amablemente de ellas en cada una de las casas de nuestro entorno.

Hacer Matemáticas en los proyectos de Centro

Beatriz Blanco Otano
IES Eugenio Frutos de Guareña (Badajoz)

Resumen: Los centros están vivos, en ellos se desarrollan proyectos de distinta índole en los que las matemáticas siempre tienen cabida, es cuestión de encontrar las conexiones adecuadas. Como decía el eslógan del IDM 2020, las matemáticas están en todas partes, debemos ser los docentes los que decidamos en qué proyectos nos embarcamos.

Cuando programamos el curso escolar, organizamos nuestras sesiones, siendo esta planificación importante para enseñar unas matemáticas coherentes. Sin embargo, surgen oportunidades que debemos aprovechar. Cuando involucramos las matemáticas en los proyectos de centro ofrecemos matemáticas en otros contextos, más allá de los escolares, y debemos ser capaces de ofrecer actividades matemáticas ricas guiadas por buenas preguntas que generen aprendizaje. Ese es el reto.

Los estudiantes aprenden matemáticas a partir de las experiencias que les ofrecen sus profesores. En la ponencia presentaremos algunos ejemplos de proyectos en los que las matemáticas son partícipes e incluso protagonistas, enfatizando en la conexiones entre saberes matemáticos y de otras materias porque cuando los estudiantes hacen conexiones son capaces de aprender y recordar más conceptos y destrezas.

STEAMizando el aprendizaje matemático: abriendo caminos para estudiantes en riesgo de exclusión social

Teresa Fernández Blanco
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen: Se presenta un programa socioeducativo diseñado para estudiantes en riesgo de exclusión social por motivos familiares. Este programa se fundamenta en microactividades estructuradas bajo el enfoque STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas), adaptadas a las características particulares de este grupo de estudiantes y llevadas a cabo en horario extraescolar. El objetivo principal del programa es trabajar en el desarrollo del sentido socioafectivo de las matemáticas, proporcionando a estos estudiantes una experiencia educativa que vaya más allá del refuerzo académico. Al centrarse en el enfoque STEAM, se busca crear una conexión significativa entre las matemáticas y la vida cotidiana de los estudiantes, fomentando un aprendizaje más práctico y contextualizado.

Matemáticas Inclusivas en Acción

María Teresa Navarro Moncho
mt.navarromoncho@edu.gva.es
Centre Específic d'Educació a Distància de la Comunitat Valenciana

Resumen: En un mundo donde la diversidad es la norma, es fundamental que nuestra forma de enseñar matemáticas sea inclusiva, equitativa y sin barreras. Se trata de garantizar que cada estudiante se sienta seguro, valorado y capaz en el aula de matemáticas.

Las matemáticas inclusivas se refieren a un enfoque que busca garantizar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de participar y tener éxito en el aprendizaje de las matemáticas, independientemente de su origen, género, orientación sexual, capacidad, nivel socioeconómico o cualquier otra característica. Se trata de satisfacer las necesidades individuales reconociendo que cada estudiante tiene diferentes fortalezas, habilidades, estilos y ritmos de aprendizaje.

En el marco de la inclusión, las emociones y las relaciones interpersonales son esenciales en el proceso de aprendizaje matemático que busca integrar estos elementos en el aula de manera significativa.

En esta ponencia, exploraremos algunas estrategias analizando las creencias y actitudes del profesorado, el diseño de tareas con una perspectiva inclusiva y su gestión en el aula.

¡Es hora de derribar barreras y construir puentes para que todos puedan disfrutar y tener éxito en el maravilloso mundo de las matemáticas!

La evaluación en el sistema educativo: las competencias específicas de matemáticas

Mónica Domínguez García
Directora General de Evaluación y Cooperación Territorial

Ruth Martín Escanilla
Instituto Nacional de Evaluación Educativa

Resumen: La evaluación educativa es un proceso continuo que afecta a todos los niveles del sistema educativo. Un cambio curricular necesariamente debe llevar asociado un cambio en la evaluación por lo que es imprescindible que la entrada en vigor de los desarrollos curriculares de la LOMLOE implique una transformación en los procesos de evaluación de la competencia matemática. En la LOMLOE, el Perfil

de salida del alumnado al término de la enseñanza básica constituye el referente para las decisiones relacionadas con la promoción o titulación del alumnado, por lo que es el referente final en la evaluación del alumnado. Sin embargo, el profesorado de matemáticas, en su evaluación en el aula, dispone de indicadores más inmediatos, como las competencias específicas y los criterios de evaluación a ellas asociados.

En esta ponencia, una vez establecidas las bases en las que se sustentan los desarrollos curriculares de matemáticas en la LOMLOE, se realizará un recorrido por los distintos tipos de evaluación, con una exposición de los instrumentos adecuados al nuevo modelo curricular. Finalmente, se repasarán los diferentes marcos de evaluación de la competencia matemática nacionales e internacionales: PISA; TIMSS, Evaluaciones de diagnóstico y Evaluación general del sistema educativo.

Comunicaciones

Representación matemática en infantil: la página en blanco

Autora: Mequè Edo
mail@autora: *Meque.Edo@uab.cat*
Institución: Universitat Autònoma de Barcelona

Autora: Judith Fabrega
mail@autora: Judith.Fabrega@uab.cat
Institución: Universitat Autònoma de Barcelona

Autora: Laura Puchades
mail@autora: puchadeslaura@gmail.com
Institución: Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Comunicación y divulgación

Modalidad: Comunicación,

Nivel educativo: Educación Infantil

RESUMEN

La página en blanco es una herramienta pedagógica que permite a niños de la etapa de educación infantil (3-6 años) expresar ideas matemáticas a partir de consignas abiertas, fomentando múltiples soluciones válidas. Se distinguen dos tipos: la página en blanco de proceso, donde los alumnos anotan lo que deseen mientras resuelven problemas o enigmas matemáticos, y la de conclusión, donde expresan ideas matemáticas tras una situación didáctica que acaban de vivir. En esta comunicación presentamos y comentamos ejemplos de aula de cada tipo.

Palabras clave: Página en blanco, Educación Infantil, Representación y comunicación matemática.

1. ¿Qué es la página en blanco?

La página en blanco es un instrumento didáctico, cuya finalidad es que los niños y niñas de educación infantil (3-6 años) comuniquen sus ideas matemáticas, a partir de consignas abiertas y siempre con múltiples representaciones válidas (Edo, Marin, 2017).

Distinguimos dos tipos de páginas en blanco como actividades de representación matemática en infantil. Diferenciamos entre la página en blanco de proceso y de conclusión.

- La *página en blanco de proceso* es aquella hoja, sin ninguna inscripción, que ofrecemos a los niños y niñas como soporte para anotar lo que quieran mientras están resolviendo un problema, un enigma o una tarea.
- La *página en blanco de conclusión* es aquella hoja, sin ninguna inscripción, que ofrecemos a los niños y niñas para que comuniquen sus ideas matemáticas acerca de una situación didáctica que acaban de vivir, a partir de una consigna abierta: ¿Quieres explicar, representar qué hemos hecho hoy? Y con múltiples soluciones válidas.

2. La página en blanco de proceso ¿Cuándo tiene sentido pedir esta tarea?

Podemos usar la *página en blanco de proceso* cuando planteamos un problema, un enigma o una tarea de compleja ejecución. En este caso, la hoja en blanco se convierte en un soporte para anotar lo que necesitan mientras están buscando alguna solución. Es recomendable usarla por parejas para provocar y facilitar la verbalización, negociación, argumentación matemática, etc. Veamos un ejemplo:

Situación didáctica: Reto aritmético de solución múltiple.

Contenido matemático: Problemas aditivos con varias soluciones

Objetivos:

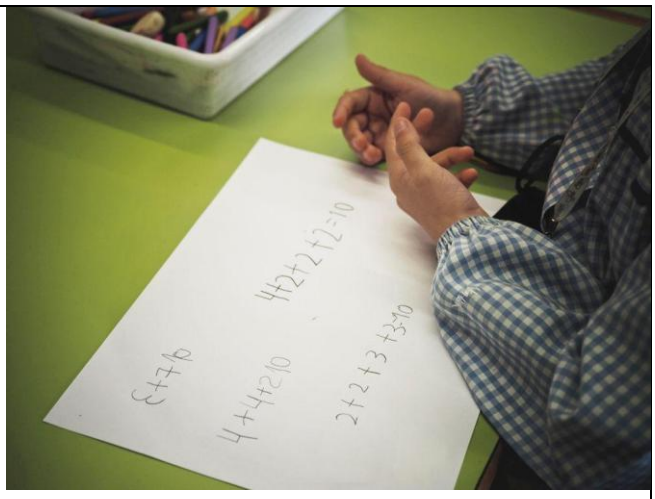
- Aplicar recursos y estrategias propias para resolver un problema matemático.
- Encontrar una, o más de una, solución a un mismo problema.

- Familiarizarse con la descomposición del 10.

Imagen 1. Reto 5 del Cercle ABEAM (ilustradora: Roser Matas)

Enunciado del reto: En la escuela hemos comprado varios vehículos para el patio. En total, contamos 10 ruedas. ¿Qué podemos haber comprado?

- Actividad 1: Se presenta el enunciado del problema y se completa la información: en la tienda venden coches de 4 ruedas; triciclos de 3 ruedas y patinetes de 2 ruedas. Se sitúan los alumnos en parejas, se ofrecen materiales que puedan ayudarles a encontrar soluciones, tales como: piezas de conteo, hueveras del 10, páginas en blanco y lápices, etc.
- Actividad 2: a) Se les invita a encontrar una solución, b) a continuación se les pregunta si pueden encontrar más de una solución, y c) los que lo deseen, intenten encontrarlas todas (sabiendo que hay cinco).



Imágenes 2. Buscando soluciones al reto usando la página en blanco de proceso, junto con otros materiales.

Veamos algunas representaciones plasmadas en ‘las páginas en blanco de proceso’ realizadas por parejas de niños y niñas de I5 para resolver el reto: si hay 10 ruedas ¿qué podríamos haber comprado?

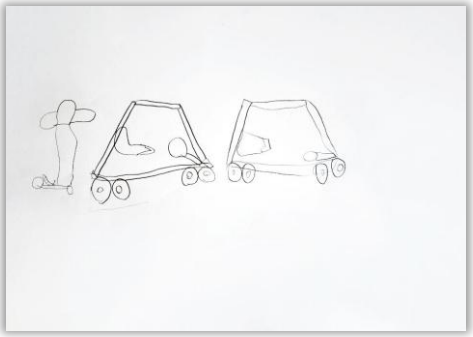


Imagen 3

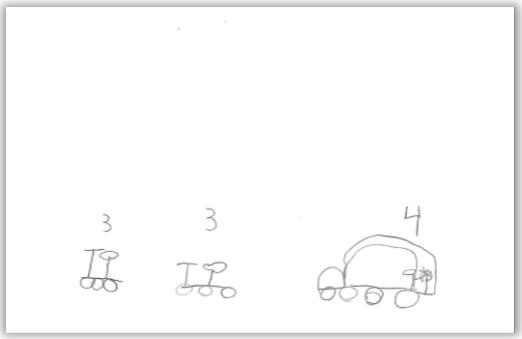


Imagen 4

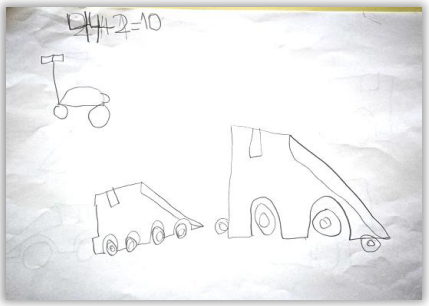


Imagen 5

Imagen 6

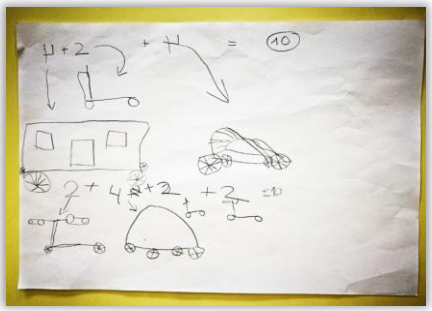


Imagen 7

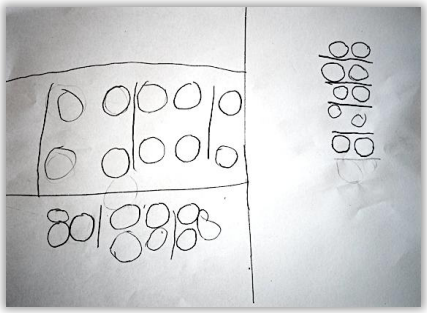


Imagen 8

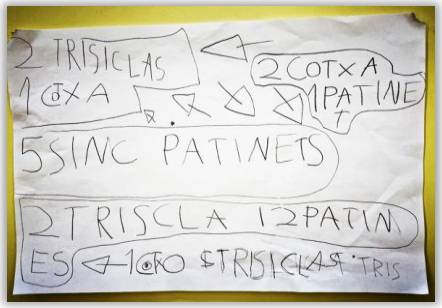


Imagen 9

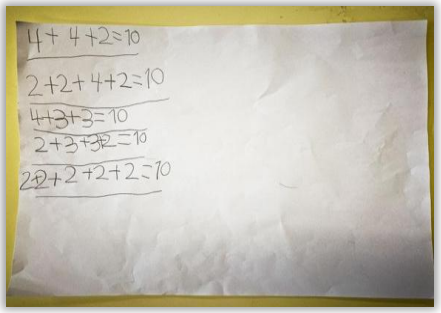


Imagen 10

Aquí presentamos una pequeña selección de representaciones de proceso realizadas por alumnos de dos escuelas distintas.

- En la actividad 2a) donde se les invita a encontrar una solución, corresponden las imágenes 3, 4, 5 y 6. En todas ellas hay una solución aunque usando distinta tipología de marcas. Imagen 3- dibujos de los vehículos con sus ruedas (lenguaje pictográfico), Imagen 4- dibujos de los vehículos y números de ruedas (lenguajes pictográfico y simbólico numérico), imagen 5- dibujos de los vehículos y operación sumando las ruedas (lenguajes pictográfico y simbólico aritmético) y imagen 6- dibujos, frases y operación (lenguajes pictográfico, verbal escrito y simbólico aritmético).
- En la actividad 2b) donde se les invita a encontrar más de una solución, corresponden las imágenes 7 y 8. Imagen 7- contienen dos soluciones que combinan el lenguaje pictográfico y el simbólico aritmético. La imagen 8- contiene tres soluciones con una representación pictográfica esquemática.
- En la actividad 2c) donde se les invita a encontrar todas las soluciones, corresponden las imágenes 9 y 10. La imagen 9- presenta las cinco soluciones con

lenguaje verbal escrito, combinado con el simbólico numérico, y la imagen 10- presenta las cinco soluciones con lenguaje simbólico aritmético.

Lo realmente interesante del uso de 'la página en blanco' es que cada pareja de alumnos ha podido escoger *qué representar* y *cómo hacerlo*. Cada pareja de alumnos ha conseguido alguno de los objetivos de la sesión. Y los docentes han sabido acompañarlos en su diversidad, consiguiendo que todo el mundo llegara a alguna solución, al mismo tiempo que estimulaban y acompañaban a los alumnos que sentían el reto de encontrar más de una respuesta e incluso a los que deseaban encontrarlas todas.

Cuando el resultado de una propuesta matemática con la página en blanco muestra tal diversidad es que los docentes han hecho bien su tarea, ya que han permitido y estimulado las representaciones personales, sin esperar ni exigir un mismo resultado para todos.

3. **La página en blanco de conclusión ¿Cuándo tiene sentido pedir esta tarea?**

La página en blanco de conclusión, tiene sentido como la última actividad de una secuencia de propuestas realizadas en situación didáctica colectiva, que contenga algún reto o interrogante matemático y que se haya iniciado, por ejemplo con: un juego motor, un cuento, una canción, una danza, un reto con materiales, etc. Veamos un ejemplo:

Situación didáctica: Propuesta de puntería.

Contenido matemático: descomposición del número 7

Objetivos:

- Identificar y reconocer las cantidades y los números -dígitos- (rango 0-7)
- Identificar parejas de cantidades y parejas de números que sumados den 7.

Actividad 1: Cada alumno tiene 7 objetos (en este caso patos de goma) y los lanza a un cesto, desde una distancia de 7 pasos.

Actividad 2: Cuenta y registra cuántos objetos van dentro del cesto y cuantos quedan fuera.

Imagen 11. ¿Cuántos van dentro? ¿Cuántos quedan fuera?

Imagen 12. Registro de la puntuación

Actividad 3: Al terminar el juego damos una hoja en blanco y un rotulador oscuro y les pedimos: ¿*Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy*?

Actividad 4: Y cuando terminan la representación se les pide: ¿*Quieres contarnos qué has representado*?

Veamos algunas representaciones plasmadas en 'las páginas en blanco de conclusión' realizadas por niños y niñas de I5 al terminar el juego de puntería.

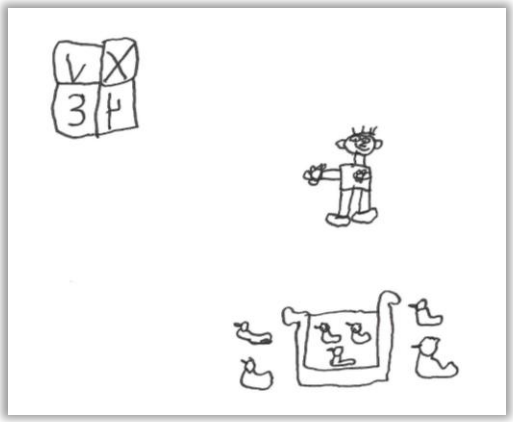


Imagen 13. ¿Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy Marc?

Imagen 13. Marc ¿Quieres contarnos qué has representado?

Marc: Yo tirando los patos.
Inv: ¿Y qué ha pasado? ¿Qué nos cuenta esta jugada?
Marc: (señala el marcador) Aquí dice cuántos había acertado.
Inv: ¿A sí? ¿Cuántos?
Marc: No había acertado cuatro, pero tres sí.
Inv: Aja! Por lo tanto, aquí dentro (señala dentro el cesto) ¿cuántos hay?
Marc: Tres
Inv: ¡Claro! Lo que dice aquí (número 3 del marcador). ¿Y (señalando patos fuera) estos son los que explican qué número? ¿Dónde está el número que explica éstos de ahí fuera?
Marc: Aquí (señala el 4 del marcador).
Inv: ¡Muy bien! Pues está muy bien contado. ¡Muchas gracias!

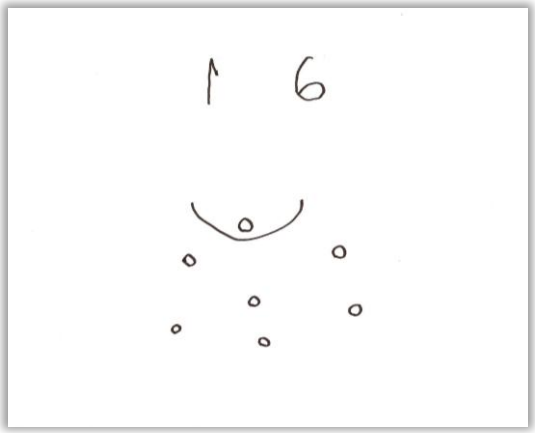
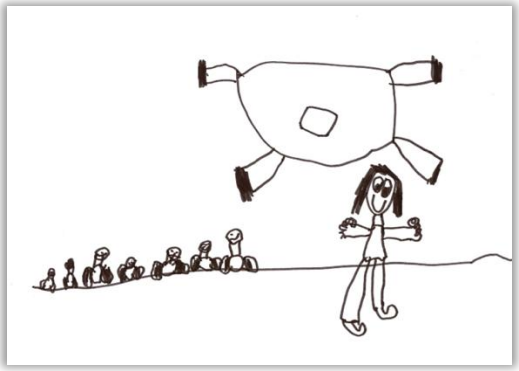
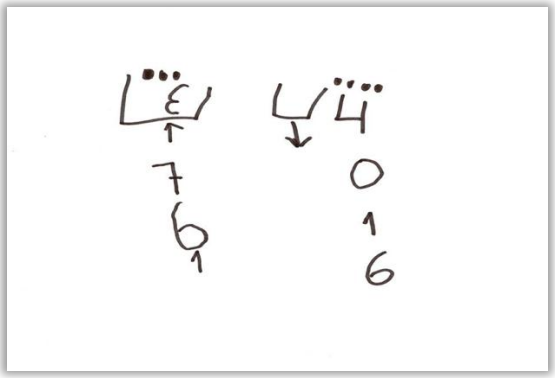


Imagen 14. ¿Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy Hasan?

Imagen 14. Hasan ¿Quieres contarnos qué has representado?

Hasan: Esto es el cesto y he puesto un pato dentro y seis fuera.
Inv: ¿y por lo tanto estos números qué nos explican?
Hasan: Cuántos patos adentro y cuántos fuera.
Inv: y... seis y uno ¿cuándo hacen?
Hasan: siete
Inv: ¡Muy bien! Muy claro, muchas gracias.

Este tipo de representaciones, que se centran en una de las tiradas del juego, —que normalmente reflejan la puntuación del autor— suelen ser las más habituales. Pero el uso de la página en blanco nos permite, casi siempre, encontrar matices y diferencias entre representaciones. Por ejemplo, en la imagen 13 Marc usa el lenguaje pictográfico de una forma muy realista, representa fielmente los objetos y las cantidades de la realidad y lo combina con el lenguaje simbólico numérico. Hasan, en la imagen 14, utiliza los mismos lenguajes que Marc, el simbólico numérico y el pictográfico, pero podemos observar que su representación es más esquemática, busca la esencia de la idea que quiere comunicar, se desprende de lo que no es esencial para describir que la relación de 6 más 1 son 7; es decir, busca una representación más abstracta. Estas y otras diferencias que aparecen en las representaciones realizadas en la página en blanco nos hablan de cómo son y en qué momento están cada uno de nuestros alumnos. Veamos algunos ejemplos más y reflexionemos sobre ¿qué aporta la verbalización de Gala a su representación? ¿Cómo usa Mar los distintos lenguajes? ¿Qué aporta Bruno de nuevo en relación con el contenido matemático?

 Imagen 15. ¿Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy Gala?	Imagen 15. Gala ¿Quieres contarnos qué has representado? Gala: He dibujado la mesa y esto es la cesta y yo estaba tirando Inv: ¿Y qué es esto? (señalando los elementos repetidos) Gala: Esto son los patos Inv: ¿cuántos hay? Gala: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. Inv: ¡Siete, muy bien! ¿Tú recuerdas cuántos patos había dentro de la caja? Gala: Tres Inv: ¿Y cuántos quedaron fuera? Gala: Cuatro Inv: Vale, muchas gracias.
 Imagen 16. ¿Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy Mar?	Imagen 16. Mar ¿Quieres contarnos qué has representado? Mar: (señalando los elementos de la base) aquí estaban los que han entrado y aquí (escritura a la derecha) aquí he puesto un tres, porque tres los he metido dentro de la bandeja y cuatro porque los he metido afuera. Inv: (Señala dos frases de la derecha y la representación de la base) ¿y aquí y aquí explicamos lo mismo? Mar: Si Inv: ¿y (señalando la figura humana del centro) ella, quién es? M: Soy yo tirando desde la raya. Inv: Muy claro todo, gracias.
 Imagen 17. ¿Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy Bruno?	Imagen 17. Bruno ¿Quieres contarnos qué has representado? Bru: He hecho tres dentro y cuatro fuera. Y si tenemos siete dentro tendremos cero fuera; si tenemos seis dentro, uno fuera y si tenemos uno dentro, seis fuera. Inv: Interesante, distintas parejas de números que sumadas dan… Bru: Siete, claro Inv: Sabes muchas parejas del siete, muchas gracias.

Hasta ahí hemos visto cinco ejemplos de representaciones realizadas por niños y niñas de Infantil 5 años, a partir de una situación didáctica lúdica y con un desenlace a partir de la actividad de representación ‘la página en blanco’. Propuesta que se realiza a partir de una consigna abierta: ¿Quieres explicar, representar lo que hemos hecho hoy? En la que el adulto no espera y no guía la realización de ninguna representación concreta. Al contrario, el docente les acompaña a que ellos mismos

elijan qué quieren representar —qué momento, qué situación, qué idea…— y como lo quieren hacer, es decir, qué tipo de marcas quieren usar.

Las categorías que usamos en este texto, siguiendo los resultados de García -Triana, Edo, Sala-Sebastià, (2024) son:

- Lenguaje pictográfico: dibujos o esquemas que representan la realidad;
- Lenguaje verbal escrito: letras, palabras o frases;
- Lenguaje simbólico: números, símbolos aritméticos, operaciones.

El docente podrá evaluar el resultado de la página en blanco, es decir, las representaciones y sus verbalizaciones a partir de los objetivos de la sesión. Por ello nos podemos preguntar si estas representaciones y verbalizaciones conectan con los objetivos de la sesión:

- Identificar y reconocer las cantidades y los números (rango 0-7)
- Identificar parejas de cantidades y de números que sumados den 7.

Os invitamos a revisar cada una de estas representaciones con esta pregunta en mente.

4- **Algunos requisitos que debemos conocer para aplicar la página en blanco de conclusión**

Es necesario seleccionar muy bien la consigna. Redactarla de forma que cada niño y niña escoja qué quiere representar. Debe ser una consigna abierta en cuanto a contenido, es decir, en el sentido que ellos escojan el momento, la idea, el tema que quieren mostrar. Abierta también, en relación con qué marcas pueden utilizar, es decir, de los lenguajes que ellos están aprendiendo, cuáles van a usar.

No diremos: DIBUJA; diremos: EXPLICA y/o REPRESENTA. Dibujar se centra en uno de los tres lenguajes y nos interesa que ellos escojan y combinen los que quieran. Por esto, cuando nos pregunten cómo hacer la representación, diremos: *Como*

quieras, con dibujos, esquemas, palabras, números, signos, frases matemáticas, etc. Cómo creas que se entiende mejor.

La consigna que nosotras proponemos es: *¿Quieres explicar, representar, lo que hemos hecho hoy*? y para la verbalización posterior: *¿Quieres contarnos qué has representado?*

Recomendamos usar un rotulador oscuro (negro, gris, azul…) y nada más. El rotulador se desliza mejor que el lápiz, no necesita tanta presión para marcar y no puede borrarse. Sí, si algo ha salido mal, se tacha y se sigue. En estas representaciones no se busca un resultado estético, sino conceptual, por ello no se colorea.

Como docentes es necesario crear un clima de confianza y tranquilidad para que cada niño y cada niña pueda reflexionar, escoger, representar y explicarse. Debemos transmitir que en esta propuesta no hay 'error'. No hay resultados que están bien y otros que están mal; siempre habrá buenos intentos personales.

Debemos tener presente que según Ferreiro y Teberosky (en Vissani, Scherman, Fantini, 2017) el resultado de una hoja en blanco es un 'texto', compuesto por distintos lenguajes que será necesario interpretar. La verbalización realizada por el mismo autor nos ayudará a percibir y comprender mejor el alcance de su representación.

5- ¿Por qué realizar este tipo de actividad?

Para terminar apuntaremos de forma breve algunos referentes teóricos que sustentan esta propuesta de representación y comunicación que acabamos de presentar.

- Inspiradas en Puig Adam (1960), decimos: Si las ideas matemáticas son abstractas. Si la facultad de abstraer se construye abstrayendo. Si abstraer es prescindir de algo para quedarse con lo fundamental. Es necesario que empiece por existir esa cosa de la cual se pueda prescindir. Y es importante ofrecer oportunidades desde infantil para ejercitar esta capacidad.
- Inspiradas por la neurociencia (Bueno, 2019) sabemos que el cerebro de los niños de estas edades (3-6) está preparado para establecer conexiones entre

diferentes zonas del cerebro y crear nuevas redes neuronales. Estas redes, cuanto más conexiones diversas hacen, más extensas y robustas serán. Y tener más conexiones significa tener más conocimientos y poderlos utilizar de manera más eficiente. Cuando una misma idea matemática (por ejemplo: 3 y 4 son 7) se presenta y se reconoce con distintos formatos, más redes neuronales estarán implicadas, de forma que cada nuevo cambio de formato (cambio de materiales, representación al papel, verbalización…) amplía y refuerza la red mental de cada niño en relación con el conocimiento que estamos tratando. Estas redes son y serán la base, para siempre jamás, de los nuevos aprendizajes relacionados.

- Inspiradas por Worthington y Carruthers, (2023, 2019, 2016) compartimos con ellas su tesis fundamental de que existe una gran necesidad de apoyar, validar, escuchar y valorar abiertamente el pensamiento matemático de los niños. Es necesario acoger y valorar las representaciones informales previas a la introducción del lenguaje matemático formal. Los niños de educación infantil se sienten capaces y competentes si los adultos que los acompañamos los vemos así. Es necesario pedir tareas abiertas, permitir que nos sorprendan y crear emociones positivas relacionadas con sus conocimientos matemáticos iniciales.

- Inspiradas por otras áreas curriculares, como Bernard Aucouturier, adoptamos la fase de representación gráfica en infantil de la práctica psicomotriz. Como Teresa Ferreiro y Ana Teberosky adoptamos su visión constructivista del proceso de aprendizaje de la lectoescritura, con la voluntad de comunicación previa y anterior al dominio de la técnica, etc.

Por todo ello y por la evidencia que era necesario innovar en matemáticas en educación infantil (Edo 2021) se ha ido construyendo y aplicando esta propuesta de representación matemática en la que realmente los protagonistas son los niños y las niñas si sus maestras y maestros les acompañan a serlo. Os invitamos a ensayar su uso y a compartir su resultado.

Referencias

ABEAM (2024). *Repte 5 del Cercle*. Associació de Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge de les Matemàtiques. Disponible en: https://abeam.feemcat.org/web/cercle_mestres/5e-repte-els-vehicles-que-hem-comprat/

Bueno, D. (2019). *Neurociència para educadores*. Octaedro.

Carruthers, E., Worthington, M. (2016). *Children's Mathematical Graphics: Understanding the Key Concept*. Nrich Math, Faculty of Mathematics. University of Cambridge. A: https://nrich.maths.org/6894

Edo, M., Marin, A. (2017). La hoja en blanco en la representación matemática en infantil. En: J. Gairín e I. Vizcaíno. *Manual de Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (pp.1-17). Wolters Kluwer.

Edo, M. (2021). fórMATe. Educación Infantil: La página en blanco. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=jURZjUpYAcY&t=396s

Garcia-Triana, B., Edo, M., Sala-Sebastià, G. (2024). Representaciones matemáticas en papel de la descomposición del número 7 en educación infantil. *Educación Matemática*, *36*(1), 9-40. https://doi.org/10.24844/EM3601.01

Puig Adam, P. (1960). *La Matemática y su enseñanza actual*. Ministerio de Educación.

Vissani, L.E., Scherman, P., Fantini, N.D. (2017). Emilia Ferreiro y Ana Teberosky. Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño. *IX Congreso Internacional de Investigación y Práctica Profesional en Psicología* Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

Worthington, M., Dobber, M., van Oers, B. (2019). The development of mathematical abstraction in the nursery. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 91–110.

Worthington, M., Carruthers, E. (2023). *Children's Mathematics Network.* Disponible en: https://www.childrens-mathematics.net/welcome/

El álbum ilustrado en Educación Infantil: un recurso para el aprendizaje matemático

Blanca Arteaga-Martínez
Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED
blanca.arteaga@edu.uned.es

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil.

RESUMEN

Este trabajo presenta el álbum ilustrado como herramienta para enseñar y aprender matemáticas en Educación Infantil. A través de un recorrido por distintos álbumes ilustrados desde la experiencia de la utilización en las aulas, nuestro objetivo es brindar a los docentes herramientas para crear procesos de aprendizaje contextualizados desde prácticas creativas que no olviden la naturaleza emocional.

Para ello presentaremos imágenes de las ilustraciones conjugadas con el contenido matemático que se puede trabajar, siempre de manera respetuosa, no irrumpiendo la lectura del texto, construiremos espacios y relatos apoyados en materiales manipulativos que faciliten los aprendizajes matemáticos tempranos.

1. Introducción

El diseño de situaciones de enseñanza-aprendizaje en Educación Infantil debe guiarse por los principios pedagógicos y didácticos contenidos en la legislación (RD. 95/2022), especialmente a la hora de planificar experiencias de aprendizaje en entornos positivos y afectivos donde el niño/a pueda experimentar, jugar e interactuar con el entorno, tanto en el aula como en actividades organizadas fuera del colegio.

Este diseño puede sustentarse en diferentes metodologías, recursos o teorías didácticas, pero qué mejor enfoque que apoyarnos en la literatura infantil, que es un elemento casi cotidiano desde edades tempranas, “que favorece la ampliación del

mundo de referencia del niño y la capacidad de afrontar situaciones distintas desde el desarrollo de los sentidos cognitivo y afectivo" (Arteaga-Martínez y Sánchez-García, 2023, p.16).

La lectura despierta emociones y sentimientos en nosotros desde edades tempranas. Este hecho permite cimentar sobre pilares firmes una estructura lógico-matemática, enriqueciéndola y dándole consistencia (Marín, 2021).

La herramienta escogida en este trabajo es el álbum ilustrado, cuya definición nos sitúa ante un género de enorme riqueza en las etapas tempranas de aprendizaje. Un "álbum ilustrado es un producto singular en el que el texto se interrelaciona con la imagen en una poderosa simbiosis expresiva, de manera que es ésta la que aporta el significado a la historia y nos muestra contenidos importantes de nuestra cultura que no están en el texto" (Borda, 2009, p. 291).

Por ello, estudiar y analizar la actividad matemática que podemos desarrollar haciendo uso de álbumes ilustrados que presentan los contenidos matemáticos de manera explícita o no, valorando, a su vez, si la explotación de dichos objetos de conocimiento es adecuada, se convierte en tarea imprescindible para hacer de los álbumes una herramienta provechosa más, al servicio del desarrollo de la competencia matemática. Por lo tanto, planteamos necesario que los docentes cuenten con las herramientas necesarias para analizar el álbum desde el punto de vista de si es relevante para el saber matemático o no, y sobre todo por qué.

El álbum ilustrado debemos entenderlo como un producto artístico y literario donde confluyen, tanto las potencialidades del texto, como las de la imagen, y que ofrecen narrativas visuales y textuales complementarias o indistintas según los caminos elegidos por la narración (Sánchez García, 2023).

El objetivo de este trabajo es presentar algunos de estos álbumes y el posible uso que el docente puede hacer de ellos en Educación Infantil, desde la puesta en escena del contenido matemático. Para ello, se mostrarán los focos para la construcción de la situación didáctica, ejemplos de posibles álbumes ilustrados adecuados para la

etapa, y relato de experiencias que hemos llevado a la práctica y que nos han mostrado la eficacia de este tipo de materiales.

Buscamos dar a la maestra/o herramientas para la construcción de un proceso de enseñanza contextualizado, que sitúa a niños y niñas ante prácticas ricas en contenidos de una manera integrada y creativa, que no olvida la naturaleza emocional (Arteaga-Martínez y Macías Sánchez, in press).

2. El álbum ilustrado como material didáctico

El álbum ilustrado es un género bimodal que combina el texto y la imagen con una secuencialidad que "no organiza los elementos internos de una página, sino los que forman parte de una narración completa y que se extienden por varias páginas" (Santiago-Ruíz, 2021, p. 5).

Al situarnos en Educación Infantil hemos de plantearnos "la necesidad de educar la mirada para la lectura de imágenes en edades tempranas, alfabetizando a los menores para la lectura de signos lingüísticos y mensajes icónicos para que sean verdaderos lectores competentes en la edad adulta" (Gomes-Franco-e-Silva, 2019, p. 56).

En los álbumes infantiles las ilustraciones no son solo un elemento decorativo, sino que se integran con el texto como una parte más de la narrativa, ayudando al pequeño lector a reconocer los personajes y la secuenciación de la historia narrada por el adulto. Las imágenes, además, pueden dar lugar a convertir el álbum ilustrado en un material manipulativo en manos del niño/a, que le facilite conectar las representaciones semióticas de la ilustración con las representaciones mentales que el niño/a hace de los objetos, a la vez que puede interactuar con el álbum, de manera que se facilite la comprensión del objeto matemático.

La mayoría de álbumes ilustrados tienen un formato a doble página, encadenando una sucesión de imágenes y facilitando la visualización de varias escenas, que ayudarán al niño/a a percibir la secuencia cronológica de la historia.

También resulta muy adecuado en edades tempranas el uso de álbumes donde se proponen juegos de observación. Por ejemplo, la búsqueda de algún elemento "perdido" que el lector debe encontrar como vemos en la Imagen 1, en "La granja de los siete establos" (Aliaga, 2011) que esconde tras las puertas del establo los elementos de conteo que relata el texto.

Imagen 1. Ilustraciones de "La granja de los siete establos".

Vamos descubriendo así distintos elementos que hemos de tener en cuenta cuando estemos eligiendo el álbum más adecuado. Las imágenes y el texto como elementos centrales, más o menos cantidad de cada una de ellas; posiciones en la página, a una o dos páginas; el contenido matemático que buscamos trabajar desde el álbum, etc. Por lo que el docente necesita conocer el álbum en profundidad antes de su utilización, los pros y contras de cada formato, la posibilidad de reproducción de las ilustraciones, etc. Incluso "el tamaño, la nitidez focal, los contrastes tonales y de color o la utilización de primeros/segundos planos son algunos de los recursos más empleados para captar la atención del lector sobre los elementos representados" (Arteaga-Martínez y Sánchez-García, 2023, p. 17).

Pero habiendo relatado algunos elementos a analizar, no todos, pensemos cómo hemos de dar lugar a la construcción de la situación didáctica. Nos apoyaremos en

"Paso a paso" (Lionni, 2018), donde una oruga verde es la protagonista de medir distintos tipos de aves como una forma de sobrevivir. Este es nuestro primer elemento de apoyo, la mascota, lo más parecida posible a la ilustración que el álbum muestra, y que nos acompañará durante toda la actividad. Sentados en asamblea presentamos a los niños/as los distintos personajes a través de imágenes reales proyectadas en la pantalla, al tiempo que les mostramos el álbum en paralelo. En este caso las ilustraciones tienen un formato de collage. Una vez hemos conocido a todos los personajes, relatamos la historia a los niños/as, sentados junto a ellos mientras vamos pasando las páginas y señalando elementos de las ilustraciones. Con entonación y haciendo énfasis en las ilustraciones que relatan el contenido matemático, en este caso la medición de la longitud. Podemos trabajar de esta manera una o dos veces antes de iniciar el trabajo con el contenido matemático. Al finalizar la narración pedimos a los niños/as ayuda para realizar una de las actividades de nuestra protagonista, en este caso nuestra primera petición fue medir el cuerpo de uno de los compañeros, aprovechando el recuerdo de las escenas donde se miden distintos animales. Les brindamos materiales variados y relacionados con algún elemento focal del cuento. Los materiales en este caso eran verdes como la protagonista.

Así, el parámetro fundamental es no irrumpir la lectura de la historia para las actividades, sino focalizar la atención de los niños/as en las ilustraciones y en la historia, que serán después el elemento que evocaremos durante la actividad matemática.

3. Álbumes ilustrados para el aprendizaje matemático

Iniciamos este epígrafe desde la mirada de un niño de Educación Infantil que no tiene dominio de la lectura, que reconoce las letras, puede decodificar o leer palabras, pero que no es capaz de descifrar el mensaje que transmiten. Nos situamos así en los llamados álbumes *casi sin palabras*. "En un álbum casi sin palabras el lector suele prestar especial atención a los pocos textos que aparecen debido a la sorpresa que le ocasiona encontrar signos lingüísticos (Bosch, 2012, p. 83).

El álbum que vamos a elegir en esta ocasión es “Ser Quinto” (Jandl, 2017). Nos relata la historia de un personaje al que se ha roto la nariz y espera en la fila de sillas delante de la puerta del doctor, junto a otros compañeros que tienen algo estropeado. Todos ellos son juguetes infantiles (Imagen 2).

Imagen 2. Portada “Ser quinto”.

La historia nos sitúa ante una situación donde los niños/as verán como el ordinal asignado a cada uno de los juguetes varía cuando uno de ellos pasa a la consulta. La ilustración acompaña el movimiento de entrada y salida con la lámpara del techo, mientras que las escasas palabras que aparecen en la secuencia de las páginas nos invitan a trabajar esa situación con el número ordinal. Esta secuencia de imágenes y elementos que ayudan a identificar la sucesión temporal de cada una de las escenas, puede facilitar al niño/a la comprensión del significado de la posición y el porqué cambia según cada uno de los personajes va entrando (Imagen 3).

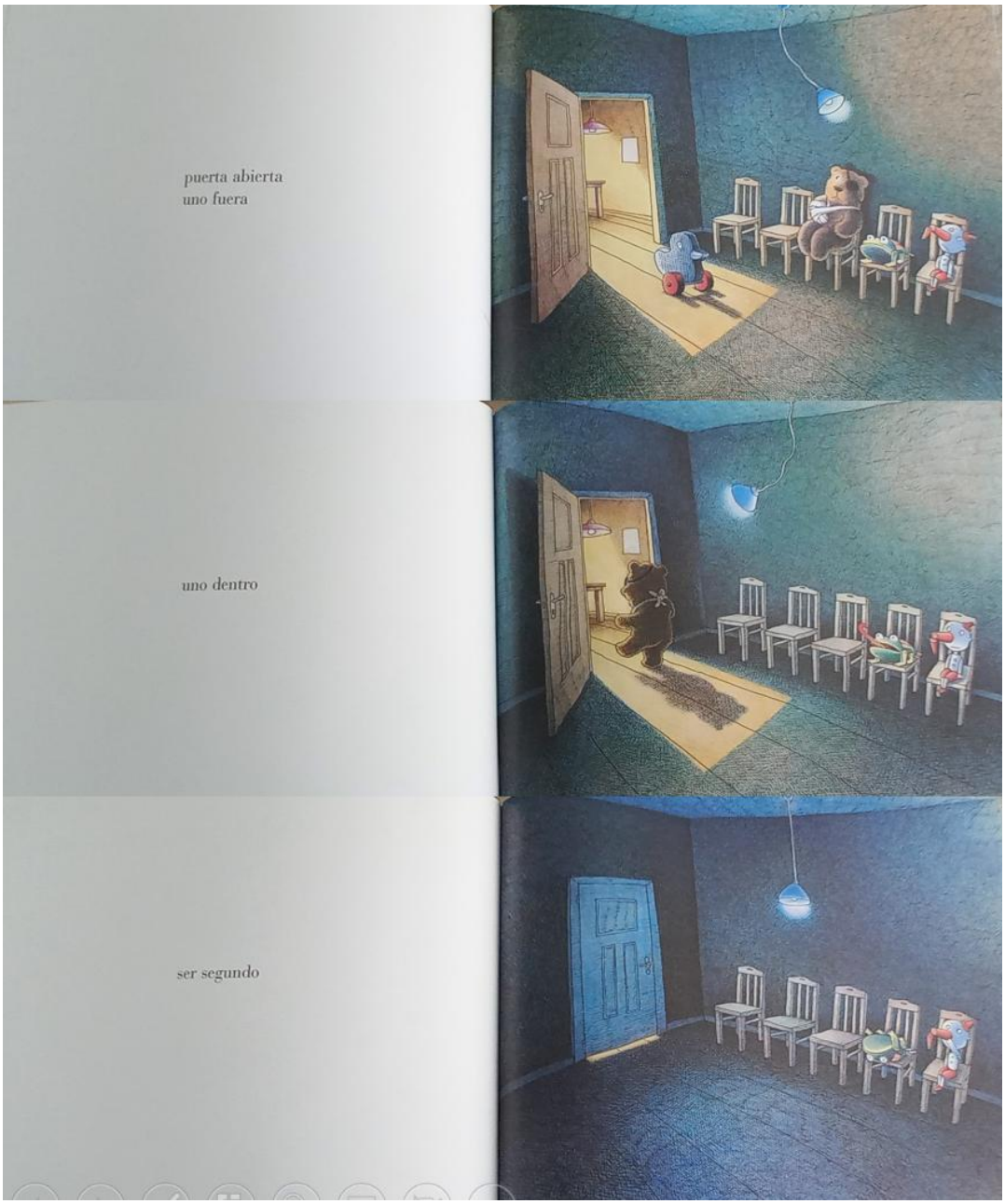


Imagen 3. Seriación temporal de escenas para trabajar 2º.

Cuando hemos trabajado con este álbum hemos optado por combinar la teatralización de la historia con los niños/as como protagonistas con las ilustraciones. Este tipo de trabajo involucrándoles como personajes, además de facilitar el movimiento en el aula, nos lleva a considerar uno de los elementos básicos de una historia, la función de los personajes, que siendo ellos quienes toman el rol facilitará la comprensión en función de su propia acción (Arteaga-Martínez y otros, 2021). No necesitaremos más

que cinco sillas en hilera, algún elemento que les facilite disfrazarse, y un narrador de la historia que irá dando paso a la sucesión de escenas.

Otro álbum casi sin palabras es “Gracias abejas” (Yuly, 2018). En este caso, el trabajo matemático estará centrado en el trabajo con la ilustración, en este caso sencilla y con forma de collage. La historia del libro no está vinculada propiamente al trabajo matemático, sino a elementos de la naturaleza, con un mensaje repetitivo que nos facilitará la entonación y la emoción mientras leemos mostrando las ilustraciones al grupo durante la asamblea. En la imagen 4 por ejemplo, podemos ver una ilustración que nos invita al conteo. Un conteo estructurado, repetitivo, con una ilustración sencilla para que cada uno de los niños/as pueda reproducir en un pedazo de papel con pintura de dedos, con otros colores, con otros formatos, con otro número de pétalos en cada flor, en este caso, pensando en una suma reiterada que preparará a los niños/as en la antesala del significado de la multiplicación, que en esta ilustración nos muestra “cinco veces cinco”.

Imagen 4. Ilustración en “Gracias abejas”.

Como elemento intermedio entre los álbumes con pocas palabras y aquellos que tienen relatos escritos, nos acercamos a una de las versiones de “Chivos, chivones” (González, 2022) que incluye pictogramas (Imagen 5) que facilitarán la comprensión

del texto para los niños/as. Esta historia nos presenta tres conceptos, pequeño, mediano y grande, relacionados con la identificación y comparación de medidas.

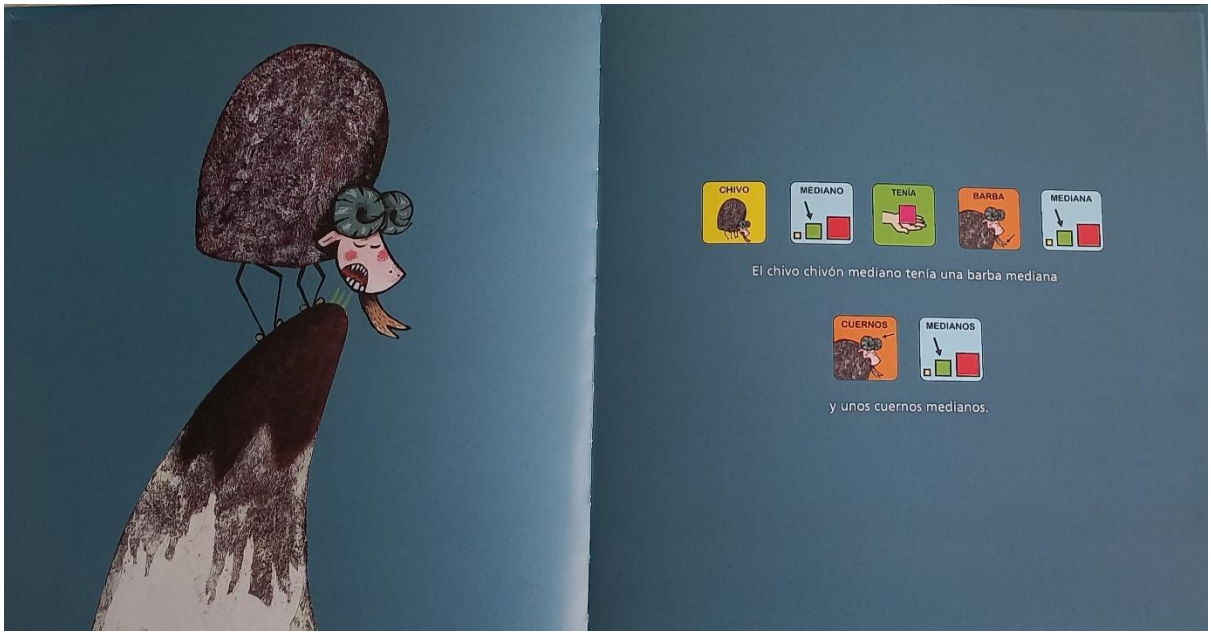


Imagen 5. Ilustración en “Chivos chivones”.

El material de apoyo con este álbum serán conjuntos de objetos en tres tamaños, que faciliten al niño/a la ordenación. Será fundamental que estos objetos tengan distintas características físicas, y que además podamos experimentar con ellos a posteriori. Por ejemplo, tres varillas, tres peluches, tres pelotas, tres triángulos, … siempre de tres tamaños, que nos facilitará ir aislando la magnitud en la que nos vamos a fijar para la ordenación.

Un círculo amarillo es el protagonista de “Del círculo que se cayó de una camiseta de lunares” (Oleby, 2015), que ayudará a diseñar una situación donde los niños/as observen su entorno reconociendo las figuras planas que les rodean. Como vemos en la Imagen 6, podremos relacionar la ilustración con la identificación de figuras planas, facilitando con la guía del docente la generalización de las propiedades de estas figuras a partir de ejemplos cercanos para que puedan “comprobar si sus generalizaciones son adecuadas” (Alsina, 2014, p.11) y descubrir elementos que le ayuden a identificar formas planas en el espacio.

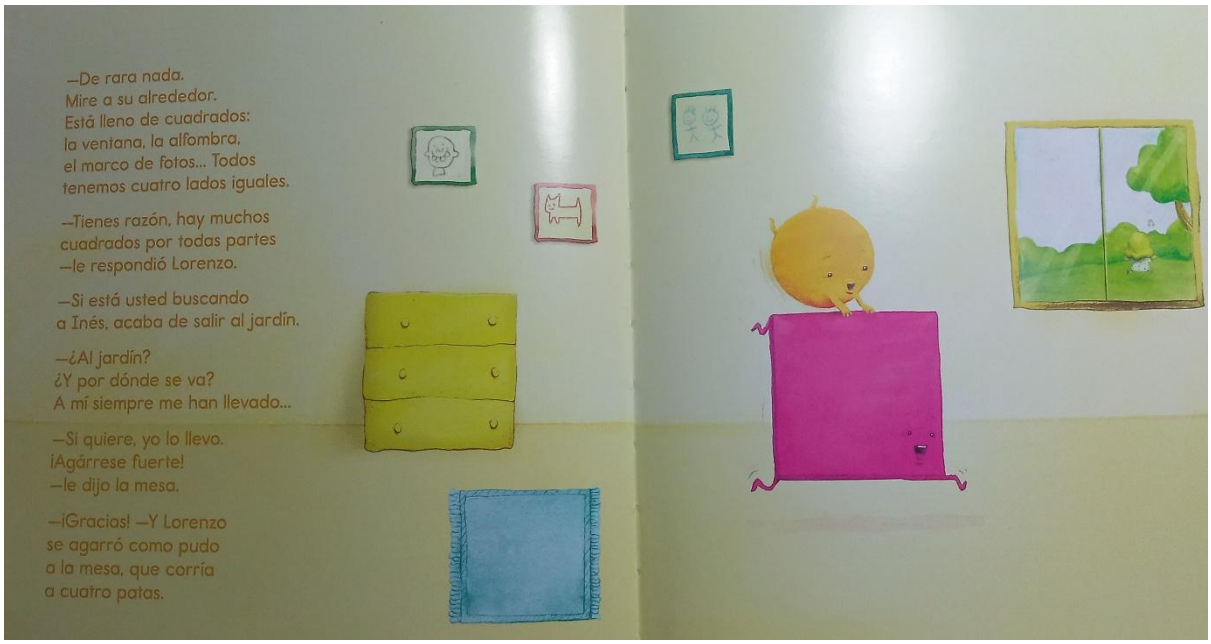


Imagen 6. Ilustración en “Del círculo que se cayó de una camiseta de lunares”.

Los distintos personajes del álbum se construirán con gomaeva para que los niños/as puedan visualizar las figuras desde distintas orientaciones, contar el número de lados, compararlas, todo ello empleando el vocabulario geométrico (Escudero-Domínguez y Arroyo-García, 2018).

Nos acercamos ahora a la historia de Claudia que busca el valor de infinito, narrada en “Mi infinit∞” (López Moya, 2020). Estamos ante una narración que podemos enmarcar al final de la etapa, que se sitúa en escenas cotidianas de la vida de su protagonista, su mamá y su papá, y que parte desde la observación de elementos de su entorno apoyada en el conteo, para dar paso a aspectos no cuantificables como las emociones (Imagen 7). El texto alude de manera constante a elementos de contenido matemático: “sois dos, una pareja”, “vosotros dos y yo sumamos 3”, “no hace falta contar para saber lo que es infinito”, entre otros. Además, combina en el texto las maneras de escribir el número, unas veces desde la lengua natural mientras otras desde el uso del símbolo.

Imagen 7. Ilustración en “Mi infinit∞”.

El material para nuestro trabajo posterior se apoyará en objetos presentes en el aula que nos permitan realizar el conteo hasta el número doce, preferiblemente apoyándonos en las mismas expresiones que el relato utiliza “El 5 lo tengo en mi mano. Porque los dedos de mi mano son 5”, de manera que el niño/a pueda trabajar con elementos externos y con su propio cuerpo. Será conveniente trabajar con objetos donde el conteo no sea sencillo, para dar paso a situaciones de estimación, por ejemplo, botes con pequeños pompones o con arena.

Terminamos nuestro recorrido con un álbum cuyas ilustraciones son coloridas, aprovechando cada espacio de la doble página, pero donde el trabajo matemático requiere algunas adaptaciones, porque el texto no acompaña a la ilustración, sino que el maestro/a deberá acomodar el trabajo para que los niños/as trabajen con la ilustración de manera independiente al texto.

Este álbum es “El libro de contar” (Bruno, 2018). En este álbum el texto transcurre entre distintos personajes que se van presentando a modo de secuencia numérica, que indica un orden y no una cantidad. Sin embargo, la ilustración invita al lector a buscar la cantidad que el símbolo refleja en la ilustración.

Nos encontramos con situaciones donde el contenido numérico carece de significancia y significado, pues la pelota no tiene ningún tipo de relación con el número 5 o el abuelo con el número 6 (Imagen 8).

Imagen 8. Ilustración del 5 y 6 en página simple en el “El libro de contar”.

Sin embargo, en la página que se centra en la presentación del número 5, también se habla de las gallinas, apareciendo a su vez cinco de estos animales en la ilustración. De igual manera, en la página siguiente podemos observar seis huevos, los que sí guardan una relación de correspondencia cardinal con la presentación del número 6 que se recoge en dicha página. Desde estas situaciones podríamos plantear actividades donde el niño/a inicie la práctica para el dominio del principio de la irrelevancia del orden y conteo estructurado, entre otras. Por ejemplo, apoyándonos en material manipulativo externo como unas gallinas de un juego de clasificación (Imagen 9).

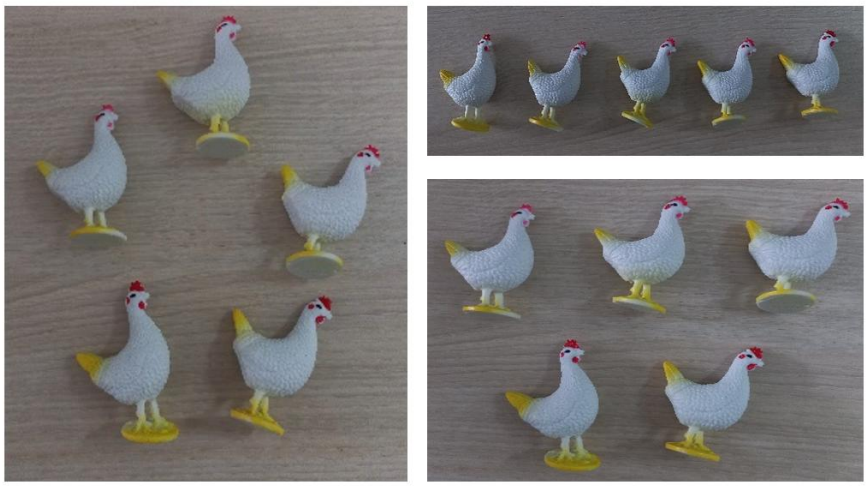


Imagen 9. Gallinas de juguete para ilustrar distintas constelaciones para el conteo.

Colocamos las gallinas en distintas posiciones y pedimos a los niños que nos cuenten el número de gallinas que hay, permitiéndole señalarlas o separarlas. En el caso de que pongamos la misma cantidad de gallinas, el niño/a debería decirnos automáticamente la cantidad. Cuando lo colocamos en círculo, si variamos la cantidad de gallinas, el niño/a tendrá que volver a realizar el conteo y por estar dispuesto en forma de circular, se verá en la necesidad de tener que marcar o indicar desde donde empieza el proceso de conteo para no contar las mismas gallinas dos veces.

Los personajes que van apareciendo en las páginas evocan a otros de las páginas previas, por lo que el material manipulativo que utilicemos durante el trabajo matemático puede ser el mismo. Podemos verlo desde la ilustración del ocho (Imagen 10), donde el texto nos sitúa ante un gato al lado del árbol, donde podemos fijarnos que la gallina está picoteando unas semillas colocadas en tres hileras de distinta cantidad, ¿cuántas hay en total? No podría ser de otra manera, ocho.

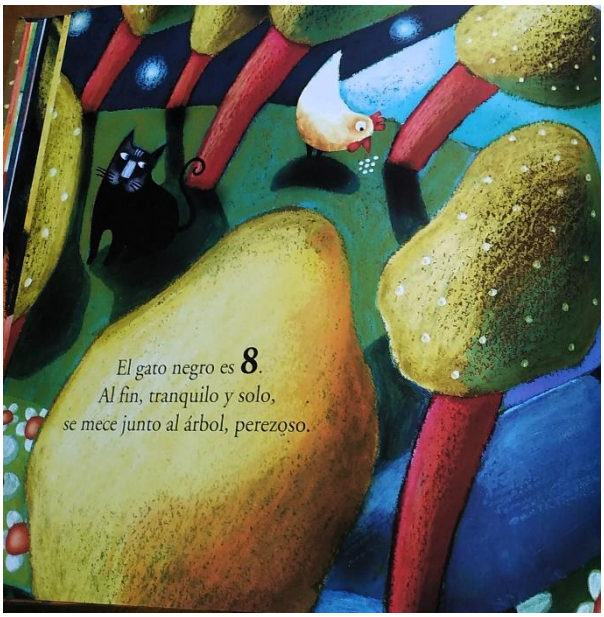


Imagen 10. Ilustración del 8 en el “El libro de contar”.

Finalizamos nuestro recorrido (Tabla 1) con nuestra estantería llena de álbumes maravillosos que nos gustaría mostrar. Este listado recoge las autorías desde esa doble perspectiva desde la que iniciábamos, el trabajo conjunto entre el autor/a de la narración y el ilustrador/a que la acompaña, porque texto e imagen serán quienes den al maestro/a elementos para adaptar la historia a la realidad de su aula, y al momento donde la esté utilizando. Esperamos que este trabajo sirva para invitar a algún docente a escudriñar las librerías dejando viajar su propia imaginación para entrar en el mundo de la literatura infantil, con los ojos de la curiosidad con los que lo haría un niño o niña en la etapa de Educación Infantil.

Título	Autor/a	Ilustrador/a	Editorial
Chivos chivones (Bata)	Olalla González	Federico Fernández	Kalandraka
Del círculo que se cayó de una camiseta de lunares	Cristina Oleby	Jesús Navarro	Verkami

El libro de contar	Pep Bruno	Mariona Cabbasa Cortés	OQO Editora
Gracias abejas	Toni Yuly		Corimbo
La granja de los siete establos	Roberto Aliaga	Cintia Martín	Macmillan Heinemann.
Mi infinit∞	Jesús López Moya	Zuriñe Aguirre Lamas	Fun Readers
Paso a paso	Leo Lionni		Kalandraka
Ser Quinto	Ernest Jandl	Norman Junge	Loguez Ediciones

Tabla 1. Catálogo de álbumes ilustrados.

Utilizar álbumes ilustrados en Educación Infantil es una forma de trabajar desde los sentidos, el cuerpo, la atención, la percepción y el movimiento, para que el niño/a pueda percibir su entorno e interaccionar con él desde una comunicación donde los elementos emocionales cobran especial importancia (Lima y otros, 2022). Un arte donde el trabajo matemático forma parte de una historia donde el niño/a desde la imaginación se introduce en las escenas de la historia mediante la imagen, apoyada por aquellos elementos que el maestro/a considere de interés en cada realidad, atendiendo a la diversidad de su aula, y siempre buscando un trabajo que permita al niño desarrollar sus sentidos matemáticos de una manera pausada, afectiva y progresiva.

Referencias

Aliaga, R. (2011). *La granja de los siete establos*. Macmillan Heinemann.

Alsina, A. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº. 86, 5-28.

Arteaga-Martínez, B., Hernández, A., y Macías-Sánchez, J. (2021). El aprendizaje de contenidos lógico-matemáticos a través del cuento popular en Educación Infantil*. Ocnos. Revista de estudios sobre lectura*, nº. 20(3), 1-19. *https://doi.org/10.18239/ocnos_2021.20.3.2619*

Arteaga-Martínez, B., y Macías Sánchez, J. (in press). Tres cuentos de hadas como contexto para el aprendizaje de saberes matemáticos en Educación Infantil. En M.L. Cacheiro-González, E. López-Gómez y R. González-Fernández (Coords.). *Innovar en Educación Infantil: de la teoría a la práctica*. Narcea.

Arteaga-Martínez, B., y Sánchez-García, S. (2023). El álbum ilustrado: recurso en el aula de matemáticas en edades tempranas. *Uno: Revista de Didáctica de las matemáticas*, nº. 101, 15-22*.*

Borda, M. I. (Coord.) (2009). *Análisis y descripción de la producción editorial andaluza en álbumes ilustrados (1999-2006)*. Pacto Andaluz por el Libro. http://www.pactoandaluzporellibro.com/portal/media/Album_Ilustrado.pdf

Bosch, E. (2012). ¿Cuántas palabras puede tener un álbum sin palabras?. *Ocnos. Revista De Estudios Sobre Lectura*, nº. 8, 75–88. https://doi.org/10.18239/ocnos_2012.08.07

Bruno, P. (2018). *El libro de contar*. OQO Editora.

Escudero Domínguez, A. M., y Arroyo García, Á. (2018). Conocimiento de las figuras planas a través del cuento. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, nº. 100, 77-88.

Gomes-Franco-e-Silva, F. (2019). Alfabetizar para ver: la importancia de aprender a leer, comprender y analizar imágenes. *Ocnos. Revista de estudios sobre lectura*, nº.18(3), 48-58. https://doi.org/10.18239/ocnos_2019.18.3.2103

Jandl, E. (2017). *Ser Quinto*. Loguez Ediciones.

Lima, V. da S., Braga, E. dos S. de O., Dantas, L. F. S., Rodrigues de Sá Alves, T., & Anjos, M. B. dos. (2022). A arte de contar histórias na Educação Infantil: reflexões

para a construção de saberes diversos. *Revista Insignare Scientia - RIS*, nº. 5(1), 318-336. https://doi.org/10.36661/2595-4520.2022v5n1.11768

Lionni, L. (2018). *Paso a paso.* Kalandraka.

López Moya, J. (2020). *Mi infinit∞.* Fun Readers.

Marín, M. (2021). Pensamiento matemático y cuentos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, nº. 10(1), 30-44. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.30-44

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, nº. 28, 14561-14595.

Sánchez García, S. (2023). El álbum ilustrado como género literario. [Material no publicado]. *CFP ¿Leemos Cuentos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil y Primaria?*. UNED.

Santiago-Ruiz, E. (2021). El lápiz y el dragón: semiótica de la secuencialidad en el álbum ilustrado infantil. *Ocnos. Revista de estudios sobre lectura*, nº. 20(3). https://doi.org/10.18239/ocnos_2021.20.3.2510

Yuly, T. (2018). *Gracias abejas*. Corimbo

Experiencia con GeoGebra en Infantil

Teresa Cepero Fustero
teresacepero@cpiespartidero.es
CPI El Espartidero, Zaragoza

Arancha López Lacasta
mariaaranzazulopez@cpiespartidero.es
CPI El Espartidero, Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz
danielsierra@cpiespartidero.es
CPI El Espartidero, Zaragoza

Núcleo temático: Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil

- https://www.geogebra.org/u/matematicinfantil
- https://matematicinfantil.catedu.es/

RESUMEN

A partir del Trabajo desarrollado durante los últimos diez años por tres compañeros de SAPM (Ricardo Alonso, Carmen Soguero y Ana Isabel Blasco) en el grupo MatemaTICinfantil – Recursos – GeoGebra y aprovechando que trabajamos en un centro integrado, con alumnado de 3 a 16 años, nos planteamos en 2021 acercar las matemáticas al alumnado de infantil con herramientas digitales y manipulativas.

Para ello trabajamos en conjunto con el profesorado de infantil, llevando a su aula, recursos de Geogebra que se han trabajado previamente en el aula de forma tradicional. Con la pizarra digital delante y sentados “en asamblea” van reforzando lo

trabajado con actividades diferentes a las habituales, algo que resulta muy motivador para ellos.

La experiencia piloto comenzó solo con las dos vías de 3 años y pronto se extendió a todo infantil con muy buena acogida por parte de alumnado y docentes.

Palabras clave: *profundizar, digital, interactivo, experiencia nueva.*

1. INTRODUCCIÓN

En la Orden ECD/1082/2018, de 24 de mayo, se regulan las condiciones de organización y funcionamiento de los Centros Públicos Integrados. Una atenta lectura de ella, pone en evidencia que aboga por la coordinación entre las diferentes etapas como eje vertebrador del Proyecto Educativo de Centro. Algo que también hace el borrador de Reglamento Orgánico de los Centros Públicos Integrados de enseñanzas no universitarias de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Por otra parte, la correcta asimilación de los contenidos matemáticos en las primeras etapas educativas afianza una buena base para el desarrollo posterior del razonamiento lógico-matemático. Por ello es importante contar con herramientas que nos faciliten su introducción en el aula, de forma integrada con los contenidos de otras disciplinas.

El currículo de la Educación Infantil establece que la aproximación a los contenidos matemáticos debe basarse en un enfoque que conceda prioridad al descubrimiento de propiedades y relaciones entre objetos a través de la experimentación activa.

Es por ello, que tras un año trabajando juntos en un centro integrado, y conociendo el trabajo llevado a cabo durante 10 años por el grupo MatemaTICinfantil, nos planteamos la posibilidad de llevar al aula de infantil los materiales que generan.

Imagen 1. Logo MatemaTICinfantil

Tras hablarlo con las compañeras de 3 años, se lo planteamos al equipo directivo, de cara a tener horas para coordinar y organizar el trabajo, sin resultado. Esto no nos echó para atrás y nos organizamos, atendiendo a nuestros horarios, para poder poner en marcha la experiencia. Comenzamos con 3 años, pero las compañeras de 4 y 5 años enseguida se animaron.

En esta comunicación, explicamos la puesta en práctica, lo que consideramos los puntos fuertes y los obstáculos que nos hemos ido encontrando.

En la actualidad llevamos tres cursos, un primer curso de prueba, un segundo curso dentro del programa Hipatia que nos sirvió para organizar el trabajo de forma más eficiente, y este curso, donde estamos asentando la trayectoria marcada con Hipatia.

2. ¿CÓMO TRABAJAMOS? ORGANIZACIÓN

Ante la falta de horas de coordinación que seguimos sufriendo, nos comunicamos por correo y en los pasillos, si se quiere, se puede.

Desde **infantil** se nos indica **contenidos** que han estado trabajando en el aula y que quieren que se refuercen. Nuestro trabajo es **localizar actividades generales con Geogebra** para trabajar estos contenidos durante 3 sesiones de 20-30 minutos. Para ello contamos con el apoyo de los compañeros de MatemaTICinfantil (Ricardo Alonso, Carmen Soguero y Ana Isabel Blasco).

Localizadas las posibles actividades a llevar al aula, generamos **un libro (**libro de Geogebra, con los materiales a trabajar, tanto en las sesiones como la docente de infantil en sus clases diarias, si lo considera oportuno) **y una tabla** (tabla con nuestras observaciones, tanto secundaria como infantil, sobre lo “vivido” en el aula, indicando “errores” tanto del programa como nuestros).

Entramos **3 semanas en los grupos** y, terminada la última sesión, tenemos una semana para cambiar de nivel (solicitar contenidos, localizarlos, …), y volver a empezar.

Los dos últimos cursos, aprovechando la Semana matemática del centro, hemos podido generar sesiones internivelares 4º de ESO-Infantil (nuestros alumnos de 4º con sus **Chromebook**), algo muy bien valorado tanto por pequeños como por adolescentes.

Imagen 2. Actividad internivelar con Geogebra

Todo lo trabajado queda guardado y enlazado en la tabla de contenidos de Infantil, de cara a posibles usos por parte de las docentes de infantil, sin necesidad de nuestra colaboración.

3. NUESTRA EXPERIENCIA EN IMÁGENES

3.1. DRIVE

En Drive tenemos compartido lo organizado a lo largo de estos tres cursos de trayectoria, compartido tanto con los compañeros de Infantil de nuestro centro, como con los compañeros de MatemaTICinfantil, como con compañeros que saben de nuestro trabajo y lo quieren implementar en sus aulas.

Imagen 3. Drive Infantil Geogebra

En cada carpeta de nivel, se encuentran las tablas generadas con las actividades llevadas al aula.

Ejemplo:

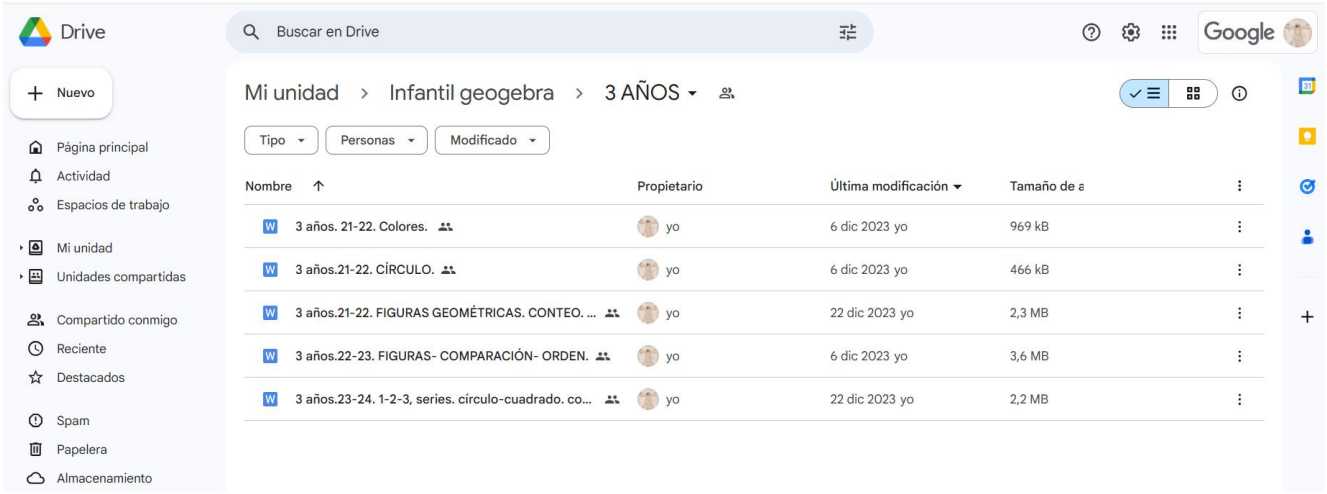


Imagen 4. Carpeta 3 años

3.2. LIBRO DE GEOGEBRA / TABLA

Cada libro contiene las actividades llevadas a cabo en el aula, en el orden empleado, todo ello a partir de las indicaciones dadas por las profesoras de Infantil.

Ejemplo de libro de GeoGebra: Espartidero. 3 años [2ª parte] – GeoGebra

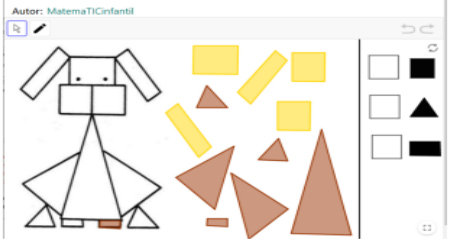
Imagen 5. Libro de Geogebra generado para 3 años

Por su parte, cada tabla recopila tanto los enlaces a las actividades llevadas al aula, el orden en el que se han trabajado, como las observaciones directas que tanto docentes de infantil como de secundaria, hemos hecho, tanto de la actividad como de la respuesta del alumnado. Así mismo indicamos posibles fallos que da la actividad, tanto de funcionamiento como de comprensión, de cara a mejorarlos y evitarlos en posibles usos posteriores.

FIGURAS GEOMÉTRICAS. RECONOCIMIENTO DE NÚMEROS. CONTEO. TABLAS DE DOBLE ENTRADA. https://www.geogebra.org/m/d696urps		
ACTIVIDAD	MATEMÁTICAS	INFANTIL
1ª SESIÓN.(16/03/22) Duración: 30 min. Hemos trabajado figuras geométricas (círculo, triángulo y cuadrado) y reconocimiento de números (conteo y escritura)		
	• Ya han trabajado las figuras del círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo. Reforzar. • Psicomotricidad fina: escribir con el dedo en la pizarra o con el lápiz (dedo mágico, lápiz mágico de Mai). • **Conceptos trabajados**: • Triángulo (TRI- TREs lados) • Cuadrado (CUA- CUAtro lados) • Círculo • Conteo • Escritura de números 1,2,3. • **Participan todos los niños.** **Conceptos trabajados**: • Triángulo (TRI- TREs lados) • Cuadrado (CUA- CUAtro lados) • Círculo	Les cuesta diferenciar el triángulo del cuadrado. La actividad la hacen bien porque tienen la ayuda visual en cada una de las columnas. Es importante reforzar a nivel auditivo para que vayan interiorizando los nombres de las distintas formas. El trazo de los números hay que seguir trabajándolo ya que es algo que no han terminando de adquirir muchos de los niños todavía.

<table>
<tr><td colspan="3">2ª SESIÓN. (23/03/22)
Duración: 30 min.
Hemos trabajado figuras geométricas (círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo) y reconocimiento de números (conteo y escritura)</td></tr>
<tr><td>Puzzle de pollito
 </td><td>Conceptos trabajados:
• Reconocer y diferenciar figuras geométricas (círculo y triángulo).
• Conteo y escritura de cantidades (2,3)

Fallos detectados: ninguno
Participan la mitad de la clase</td><td>La mayor dificultad está en escribir los números. El ala del pollito había que colocarla después del cuerpo. El primer niño que ha salido ha necesitado ayuda verbal para hacerlo pero después han estado atentos y lo han sabido hacer solos.

Se hace un poco larga la espera para realizar el mismo muñeco tantas veces. Quizá podrían salir en parejas y completarlo entre dos.</td></tr>
<tr><td>Puzzle de perro
  </td><td>Conceptos trabajados:
• Reconocer y diferenciar figuras geométricas (triángulo, cuadrado y rectángulo).
• Conteo y escritura de cantidades (3,4,5)

Fallos detectados:
• Cuesta mover algunas figuras.
Participa el resto de la clase</td><td>Tienen dificultad para diferenciar cuadrado, rectángulo y triángulo de forma oral. Hay que ir repasando verbalmente los conceptos mientras se realiza.

El trazo de 4 y 5 no se ve hasta el curso que viene.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3ª SESIÓN. (30/03/22)
Duración: 30 min.
Tablas de doble entrada</td></tr>
<tr><td>Animales por colores
 </td><td>Conceptos trabajados:
• Descubrir el uso de las tablas de doble entrada.
• Reconocer colores, figuras y animales.
• Conteo cantidades por filas, por columnas y totales.

En la primera actividad se les dejaba elegir animal y color a ellos, en la segunda, se les indicaba que mover.

Fallos detectados: ninguno</td><td>Este tipo de actividades las habíamos trabajado previamente por lo que la mayoría no tiene dificultad para realizarlas.

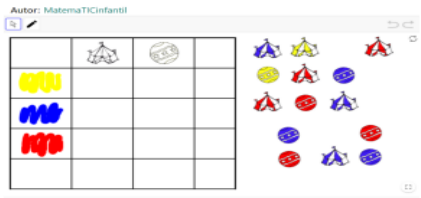
Van cambiando de niños, algunos pueden repetir, es una actividad bastante amena.</td></tr>
<tr><td>Formas y colores en el circo
  </td><td>Entre las dos actividades, participa la clase entera y algún niño repite en la parte final de conteo.</td><td></td></tr>
</table>

Imagen 6. Ejemplo de tabla de actividades trabajadas y comentarios de los docentes implicados

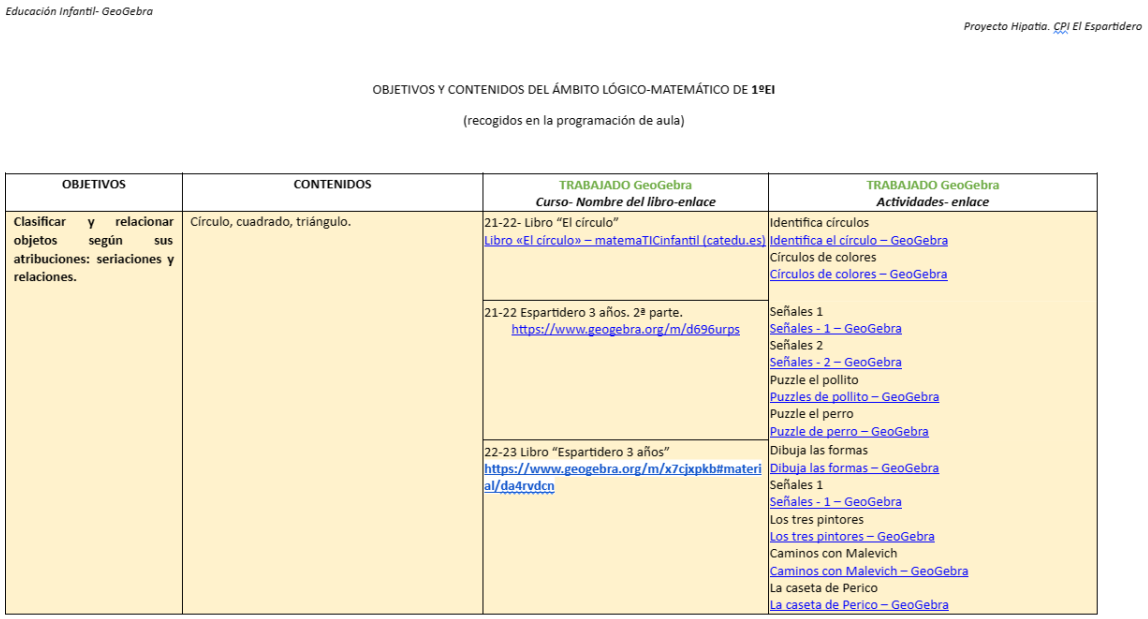
3.3. CONTENIDOS INFANTIL- ACTIVIDADES RELACIONADAS

Trás nuestro paso por Hipatia, organizamos algo mejor los materiales, de manera que no acabara siendo un baúl desastre.

Desde infantil nos aportaron su organización de contenidos. Nuestra aportación a dicha organización ha sido introducir en dicha tabla, las actividades trabajadas para profundizar-asentar dichos conceptos trabajados en el aula de forma diferente a la que aporta Geogebra.

Enlace:

https://docs.google.com/document/d/1qICLsDpdJ4sM4cZXCQzKNbTtiRRNnIAW/edit



Educación Infantil- GeoGebra

Proyecto Hipatia. CPI El Espartidero

OBJETIVOS Y CONTENIDOS DEL ÁMBITO LÓGICO-MATEMÁTICO DE **1ºEI**

(recogidos en la programación de aula)

OBJETIVOS	CONTENIDOS	TRABAJADO GeoGebra *Curso- Nombre del libro-enlace*	TRABAJADO GeoGebra *Actividades- enlace*
Clasificar y relacionar objetos según sus atribuciones: seriaciones y relaciones.	Círculo, cuadrado, triángulo.	21-22- Libro "El círculo" Libro «El círculo» – matemaTICinfantil (catedu.es)	Identifica círculos Identifica el círculo – GeoGebra Círculos de colores Círculos de colores – GeoGebra
		21-22 Espartidero 3 años. 2ª parte. https://www.geogebra.org/m/d696urps	Señales 1 Señales - 1 – GeoGebra Señales 2 Señales - 2 – GeoGebra Puzzle el pollito Puzzles de pollito – GeoGebra Puzzle el perro Puzzle de perro – GeoGebra
		22-23 Libro "Espartidero 3 años" https://www.geogebra.org/m/x7cjxpkb#material/da4rvdcn	Dibuja las formas Dibuja las formas – GeoGebra Señales 1 Señales - 1 – GeoGebra Los tres pintores Los tres pintores – GeoGebra Caminos con Malevich Caminos con Malevich – GeoGebra La caseta de Perico La caseta de Perico – GeoGebra

Imagen 7. Ejemplo Tabla de contenidos Infantil y actividades Geogebra trabajadas en el aula

4. VALORACIÓN DEL TRABAJO QUE LLEVAMOS ENTRE MANOS

Nuestra valoración ha sido, es y será siempre muy positiva, a pesar de momentos donde apetezca "tirar la toalla", pero el poder trabajar con "los peques del centro" y de forma internivelar, no tiene precio.

Estos años han sido un aprendizaje continuo, puesto que el proyecto ha supuesto un aprender a trabajar de forma internivelar con los compañeros de infantil, salir de nuestras clases y aprender a trabajar con alumnado de infantil y no menos importante, acercar a nuestros alumnos a disfrutar de los más pequeños del centro con matemáticas.

El poder estar un curso dentro del proyecto Hipatia, nos ha ayudado a organizarnos mejor, fue una gran oportunidad para compartir experiencias con otros docentes y con los estudiantes del grado de Educación Infantil, pudiendo abrir una pequeña ventana en su futura práctica docente.

Referencias

- Orden ECD/1082/2018, de 24 de mayo, se regulan las condiciones de organización y funcionamiento de los Centros Públicos Integrados.
- Orden ECD/853/2022, de 13 de junio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Infantil y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Calculadora en mano:
potenciando el aprendizaje en el aula

Ángel A. García Marrero
agarciam@escuelaspiastenerife.net
CEIPS Escuelas Pías Tenerife

María Salgado Somoza
maria.salgado@usc.es
Universidad Santiago de Compostela

Santos Pinto Cerezo
santos82@educarex.es
Colegio San José, de Villafranca de los Barros

Núcleo temático: Comunicación y divulgación

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

Presentación de un libro en el que se desarrollan diferentes situaciones de aprendizaje, adaptadas por nivel, donde la calculadora será la aliada para el proceso y desarrollo de las actividades planteadas.

El objetivo principal de la comunicación es ofrecerle al docente una propuesta de material didáctico para su puesta en práctica en el aula. En ella estarán presentes los seis sentidos matemáticos: numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo.

En concreto, en esta comunicación, se presentará una de las situaciones de aprendizaje destinadas a desarrollar el sentido estocástico. La estadística y

probabilidad está presente en los diversos ámbitos de la vida diaria y de ahí su importancia y necesidad de su tratamiento en las aulas.

Este trabajo presenta una propuesta de intervención, diseñada en el marco de un Seminario de la FESPM, en donde se desarrolla y describe una situación de aprendizaje para llevar a cabo desde infantil hasta el último curso de p primaria enmarcada en el desarrollo del sentido estocástico.

Palabras clave: calculadora, sentido estocástico, educación, situación de aprendizaje, estadística.

Comunicación

1. **Introducción**

Hay numerosas situaciones del entorno en los que un estudio estadístico nos va a permitir tomar decisiones razonadas en aras de minimizar gastos o para optimizar recursos. En otras ocasiones, tener los conocimientos necesarios para interpretar gráficos se hace cada vez más necesario dada la proliferación de estos en los distintos medios de comunicación, y no siempre con una ejecución correcta, lo cual puede inducir a interpretaciones erróneas de los mismos.

En esta línea, Chamorro (2003) afirma que estas situaciones deberían ser aprovechadas para que el alumnado llegue a ser consciente de los distintos fenómenos y sucesos que ocurren a su alrededor, siendo capaz de analizarlos y estudiarlos, proporcionando así una mayor comprensión de los mismos y favoreciendo su desarrollo personal, entendiendo que las matemáticas sirven para interpretar la realidad.

Recogiendo todo esto sobre el sentido estocástico y añadiendo el uso de la calculadora como es prescriptivo en el marco de la LOMLOE, conseguimos un proceso de aprendizaje más rico para el alumnado. La calculadora en el aula, entre otras cosas, fomenta mecanismos de resolución de problemas, desarrolla el espíritu crítico, favorece la relación de conceptos y conexión de ideas.

2. Propuesta de intervención

La siguiente propuesta de intervención es una situación de aprendizaje que introduce contenidos de probabilidad y estadística desde el enfoque de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1993), partiendo de un contexto real como es el de una zapatería para la construcción significativa de conocimientos matemáticos.

Los conocimientos probabilísticos y de estadística con respecto a otras ramas de las matemáticas, se han desarrollado de forma tardía. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) incluye "datos y azar" en la década de los 80 como área temática (NCTM, 1989), contemplando que el alumnado debería aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y la probabilidad a partir del Nivel Pre-K (3 años) teniendo una continuidad a lo largo de toda la escolaridad. Esta iniciativa se reforzó a principios del siglo XXI incluyéndose en currículos de muchos países, y en particular en el español (Alsina, 2016).

Con relación a esto, el currículo actual de Educación Primaria señala que las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales y relacionándolos con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo, progresivamente conocimientos más complejos a partir de experiencias y de los conocimientos previos, teniendo recursos y estrategias para conocer la realidad, representarla e interpretarla críticamente.

Por otra parte, resulta necesario el uso apropiado de las herramientas tecnológicas (calculadoras, ordenadores e internet), ya que posibilita a que el alumnado explore ideas y datos estadísticos, haciendo así investigaciones sobre fenómenos reales de su entorno, promoviendo que el alumnado sea ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes (Alsina, 2019).

La calculadora es uno de esos recursos que en la actualidad parece relegada a un uso meramente instrumental para comprobar el resultado de operaciones aritméticas. "Es bien extraño que las calculadoras sean para calcular, y justamente en la clase de matemáticas no las podamos utilizar… es como se para la lectura no pudiésemos utilizar libros" (Canals, 1992: 5). Sin embargo, hay diversos estudios que confirman

que el uso de la calculadora desarrolla estrategias para la resolución de problemas, desarrolla el espíritu crítico, favorece la relación de conceptos y conexión de ideas, por lo que debería utilizarse como instrumento de apoyo didáctico, permitiendo no solo el trabajo individual, también en parejas y en grupo.

3. Conclusión

La comunicación expondrá a los docentes parte del trabajo que estamos realizando. Se mostrará una situaciones de aprendizaje que ya ha sido testeada en los diferentes niveles a los que va dirigida. Son situaciones cercanas y reales para el alumnado donde se potencia el desarrollo cognitivo desde distintas áreas tales como el sentido estocástico, y donde la calculadora adquiere el papel de herramienta protagonismo de quede patente viendo que su uso puede empoderar y motivar tanto a maestros como a estudiantes para que lleven a cabo actividades enriquecidas desde la resolución de problemas.

Referencias

Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? Aula de Innovación Educativa, (251), 12- 17

Alsina, Á. (2019). Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6- 12 años). Barcelona: Graó

Canals, M.A. (1992). Per una didáctica de la matemática a l´escola. I. Parvulari. Vic. Eumo Editorial.

Chamorro, C. (2003). Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Pearson Educación.

Fraile, J. (1997). Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años. SUMA (26), 95- 102.

Freudenthal, H. (1993). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Kluwer.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. [Trad. Castellana: NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Proyecto Erasmus+ DiToM

(Herramienta de diagnóstico en Matemáticas)

María Claudia Lázaro del Pozo (1)

claudia.lazarodelpozo@educantabria.es (1)

Pilar Sabariego Arenas (2)

sabariego0@educantabria.es (2)

Blanca Arteaga-Martínez (3)

blanca.arteaga@edu.uned.es (3)

Carme Aymerich Padilla (4)

maymeri8@gmail.com (4)

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) (1) y (2)

UNED, Departamento de DOE y DDEE, Área de Didáctica de la Matemática (3)

FEEMCAT (4)

Núcleo temático: Evaluación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

En esta comunicación se presenta el proyecto Erasmus+ DiToM, acrónimo de Diagnostic Tool in Mathematics. El principal objetivo de este proyecto es prestar apoyo al profesorado europeo en la detección precoz de alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas. Para ello se proporcionará un conjunto de herramientas de diagnóstico a lo largo del proceso de aprendizaje de las matemáticas, desde el final de la etapa de Educación Infantil hasta el final de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, con el fin de identificar a aquellos estudiantes que necesitan un apoyo inmediato. Asimismo, se aporta información sobre los grupos de trabajo del

proyecto referentes al marco teórico, desarrollo y pilotaje de las herramientas de diagnóstico, así como sobre el grupo de trabajo que se ha organizado desde la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), institución socia de DiToM, para contribuir a la realización de tareas encomendadas.

Palabras clave: DiToM, herramienta de diagnóstico, detección de dificultades, aprendizaje de las matemáticas.

1. El proyecto DiToM

El proyecto DiToM, acrónimo de Diagnostic Tool in Mathematics es un proyecto Erasmus+, con número de referencia 2022-1-DE01-KA220-HED-000087983. Está coordinado por la Universidad de Bielefeld (Alemania) y en él participan, además de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), otras universidades de Croacia, Francia, Grecia, Italia y Suecia.

El propósito del proyecto DiToM es prestar apoyo al profesorado europeo en la detección precoz de alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas, a fin de conseguir una educación matemática inclusiva que atienda a la diversidad del alumnado. Para ello pretende desarrollar herramientas de diagnóstico para utilizar en las etapas clave del proceso de aprendizaje de las matemáticas, dado que para el docente resulta primordial contar con apoyo para conocer el punto de partida (diagnóstico) de cada estudiante con relación al aprendizaje de las matemáticas, para brindar el apoyo individual necesario.

Bien es sabido, que las matemáticas presentan unas particularidades en relación con el aprendizaje, por lo que sin un buen diagnóstico precoz pueden darse situaciones de desventaja para el estudiante, por lo que será fundamental el apoyo prolongado e intensivo para adquirir destrezas y saberes matemáticos clave que constituyen la base del aprendizaje posterior. De esta manera será posible "conseguir la igualdad de oportunidades y unos niveles de desarrollo similares en todos los estudiantes" (García-García y otros, 2024, p.25). No obstante, para que este apoyo sea eficaz, debe partir del conocimiento de las necesidades específicas de la persona con respecto al aprendizaje de las matemáticas. Mientras que hay alumnado que tiene

dificultades para comprender el valor posicional de las cifras, otro tiene dificultades para desarrollar estrategias de cálculo y resuelve problemas sencillos permaneciendo en las estrategias de conteo. Esta diversidad puede dar lugar a dificultades que se transformen en aversión hacia todo lo relacionado con el aprendizaje matemático. Por tanto, el profesorado debe saber qué procesos de las matemáticas dificultan el avance de cada uno de sus estudiantes para poder actuar del modo más adecuado.

La evaluación detallada, exhaustiva y continua es la clave para el apoyo individual y el avance del alumnado y la base de una educación inclusiva (González, 2018), en particular de las matemáticas.

A través del proyecto DiToM se busca compensar las desigualdades apoyando al profesorado para que ningún estudiante se quede atrás en su aprendizaje de las matemáticas. Además, la prevención del fracaso en matemáticas contribuye a reducir el abandono escolar temprano y a que el alumnado adquiera de las competencias matemáticas específicas, que le permitirán participar plenamente en la sociedad moderna (Hattie y otros, 2016).

Así, el proyecto DiToM apunta directamente a uno de los principales horizontes de la Unión Europea, la inclusión y la diversidad en todos los ámbitos de la educación. El conjunto de herramientas de diagnóstico que se desarrollarán proporcionará un recurso de apoyo en el aula, ya que tendrán en cuenta las principales etapas de aprendizaje de todo el alumnado.

El proyecto se centra en la colaboración conjunta para el desarrollo, el pilotaje y la implementación de un conjunto de cinco herramientas o pruebas de diagnóstico que detecten la adquisición de conocimientos y destrezas matemáticas necesarios para el aprendizaje de nuevos contenidos.

- La prueba 1 se centra en el desarrollo del sentido numérico y las capacidades de recuento tempranas, ya que son esenciales para las matemáticas escolares (transición de Infantil a Primaria).

- La prueba 2 se centra en el desarrollo del sentido numérico y la comprensión operativa básica en relación con suma/resta, multiplicación/división (transición de 2º a 3º curso de Primaria).
- La prueba 3 se centra en el desarrollo de la comprensión del valor posicional de las cifras, estrategias de cálculo y la comprensión de los algoritmos para sumas, restas y multiplicaciones (transición de 4º a 5º curso de Primaria).
- La prueba 4 se centra en la comprensión de los números racionales y las habilidades de cálculo relacionadas, que son esenciales para el pensamiento algebraico (paso de Primaria a 1º de ESO).
- La prueba 5 se centra en el desarrollo del razonamiento proporcional como concepto básico de las relaciones matemáticas y el concepto de función y los modos de representación de las funciones (transición del 2º a 3º de ESO).

Estas pruebas se elaborarán en inglés y se traducirán a las lenguas de los países participantes, es decir, alemán, croata, español, francés, griego, italiano y sueco, con las adaptaciones necesarias dependiendo del contexto educativo y curricular en el que se vayan a aplicar, ofreciendo su libre disposición a todo el profesorado europeo a través de un portal web.

Utilizando estas herramientas de diagnóstico, el profesorado podrá identificar a los estudiantes que aún no han conseguido desarrollar las competencias matemáticas necesarias para dominar nuevos procesos matemáticos.

1.1 Diferencias entre evaluaciones de diagnóstico y las herramientas de diagnóstico de DiToM

Podemos definir la evaluación de diagnóstico como un procedimiento para recoger y tratar información sobre el nivel de conocimientos, habilidades y competencias de un individuo en una determinada disciplina, en este caso matemáticas, con el fin de identificar sus fortalezas y debilidades en relación con ciertos criterios predefinidos, y, de este modo, pronosticar y tomar decisiones que favorezcan su pleno desarrollo en la materia (Sección de Evaluación. Servicio de Inspección Educativa, 2008).

De este modo, la evaluación de diagnóstico se centra en identificar el nivel actual de un estudiante en una determinada competencia con respecto a unos criterios específicos, y se utiliza para planificar la intervención curricular individualizada que mejore el procedimiento de enseñanza y aprendizaje. La evaluación diagnóstica puede realizarse mediante observación, cuestionarios, pruebas, ... En este caso planteamos una evaluación que "además de servir para diagnosticar y aprender sobre nuestra realidad, sirve para crear modelos sobre lo que debemos enseñar" (Rodríguez-Martínez, 2011, p.214).

Según se recoge en Cortés de las Heras (2022) los instrumentos de evaluación son las “herramientas que permiten establecer una valoración sobre el nivel de logro de los aprendizajes (cualitativa – cuantitativa)” y pueden ser pruebas objetivas, cuestionarios, listas de comprobación, escalas de valoración o estimación, rúbricas, escalas de actitudes, registros, diarios (observacionales), ... Así pues, una herramienta de diagnóstico es un instrumento que se utiliza para recopilar información con el fin de realizar un diagnóstico con respecto a una competencia determinada.

En el sistema educativo español, la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) establece en el artículo 144 que «Los centros docentes realizarán una evaluación a todos sus alumnos y alumnas en cuarto curso de educación primaria y en segundo curso de educación secundaria obligatoria, según dispongan las Administraciones educativas. La finalidad de esta evaluación será diagnóstica y en ella se comprobará al menos el grado de dominio de la competencia en comunicación lingüística y de la competencia matemática». Estas evaluaciones serán útiles para realizar un diagnóstico de las competencias adquiridas por el alumnado, y permitirán informar, formar y orientar a los centros educativos, al profesorado, al alumnado y a sus familias, así como al conjunto de la comunidad educativa, como recoge el Instituto Nacional de Evaluación Educativa en el *Marco general de las evaluaciones del sistema educativo. Evaluación general del sistema y Evaluación de diagnóstico* (2023).

Las evaluaciones de diagnóstico contempladas en la LOMLOE se plantean tanto como una evaluación del sistema educativo de una comunidad autónoma, como un elemento de reflexión para cada centro educativo, que se pueda utilizar para la elaboración y/o revisión de su plan de mejora, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en dichas evaluaciones. Es decir, se trata de pruebas externas con un carácter más general. Por el contrario, las herramientas de diagnóstico que se crearán en el marco del proyecto DiToM se plantean más a nivel de aula, pretendiendo que el profesorado de matemáticas identifique el dominio de unos determinados procesos de los sentidos numérico y algebraico de cada estudiante con respecto a unos criterios específicos que se consideran básicos para garantizar el posterior avance en esta disciplina.

Cuando el profesorado conozca los resultados individuales obtenidos por su alumnado podrá realizar un plan de trabajo personalizado que permita el avance de cada estudiante. En este sentido, resulta especialmente relevante la detección temprana del alumnado con dificultades, así como su problemática específica, para detectar posibles obstáculos y así actuar a tiempo y de manera eficaz.

1.2 Paquetes de trabajo 2 y 3 de DiToM

Los proyectos europeos se organizan en paquetes de trabajo, de manera que permitan alcanzar los objetivos propuestos en su diseño inicial.

En DiToM el paquete de trabajo 2 define las directrices y criterios según los cuales se diseñarán las pruebas de herramientas de diagnóstico y la guía de apoyo para el docente.

Las directrices establecen los fundamentos teóricos que justifican la estructura de las pruebas y de los manuales para el área de la aritmética y el álgebra.

Además de esto, existen otros dos objetivos concretos para este paquete. En primer lugar, la creación de una guía en la que se recojan las especificaciones necesarias para la construcción de una herramienta de diagnóstico en matemáticas accesible a personas con diversidad funcional; y, en segundo lugar, visualizar las diferencias

contextuales de los distintos países participantes para que sea posible una adaptación teórica de los distintos enfoques nacionales y su alineación con un marco común.

En el paquete de trabajo 2 también se propone un modelo de formato para la prueba que realizará el alumnado, el cual se someterá a revisión, tanto cuando se elaboren las actividades en el paquete de trabajo 3, como cuando se realice el pilotaje de las pruebas (Ver Imagen 1).

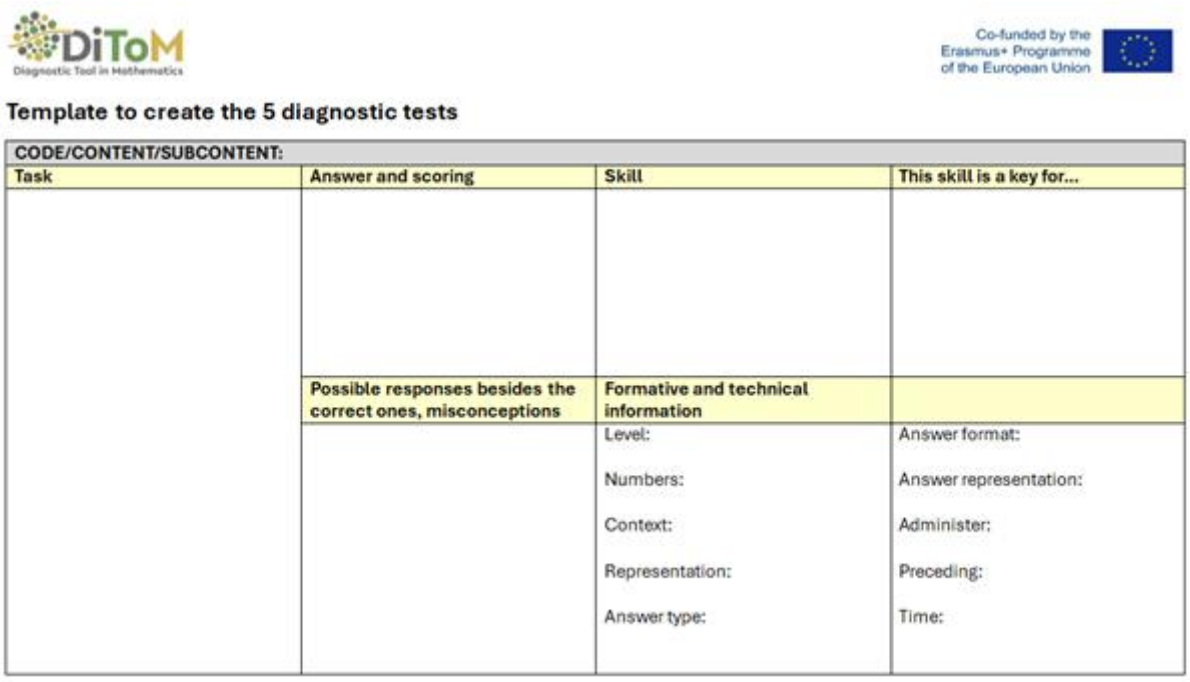
Nombre:		**Time:** 20 minutes
Grado:		
Competencia clave:	Resta de números naturales	
Nivel:	2	
ILO:	2.2 "Resta de números de dos y tres dígitos"	
Tarea (#)	**[ID de la Tarea]**	**Respuesta**
1	Rodea tu respuesta: 98-18= A. 70 B. 78 C. 80 D. 88	Rodea tu respuesta: A. B. (C.) D.
2	Rodea tu respuesta: 67-38= A. 21 B. 29 C. 30 D. 31	Rodea tu respuesta: A. (B.) C. D.
3	Rodea tu respuesta: 777-105= A. 670 B. 672 C. 680 D. 772	Rodea tu respuesta: A. (B.) C. D.
4	Rodea tu respuesta: 888-209= A. 679 B. 589 C. 680 D. 681	Rodea tu respuesta: (A.) B. C. D.
...	...	...

Imagen 1. Modelo de formato para la prueba del alumnado.

Teniendo en cuenta las plantillas y las directrices definidas en el paquete de trabajo 2, en el paquete de trabajo 3 se desarrollan las herramientas de diagnóstico para los

grados 0, 2, 4, 6 y 8. Estas consisten en colecciones de tareas que se desarrollan en los diferentes niveles de medición diagnóstica, teniendo en cuenta las competencias que se consideran clave para poder avanzar al siguiente nivel, los elementos comunes en los distintos currículums de los países y los requisitos nacionales.

Para poder clasificar las tareas se han elaborado unas plantillas que recogen la información que se considera básica para categorizar las actividades: tarea, respuesta y puntuación de la misma, posibles respuestas correctas o no, competencia clave que se evalúa, información técnica, ... (ver Imagen 2). De este modo se pretende facilitar la elección de las actividades que formarán las pruebas que realizará el alumnado, a fin de que la evaluación de las mismas dé un diagnóstico lo más preciso posible al profesorado.



DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Template to create the 5 diagnostic tests

CODE/CONTENT/SUBCONTENT:			
Task	**Answer and scoring**	**Skill**	**This skill is a key for...**
	Possible responses besides the correct ones, misconceptions	**Formative and technical information**	
		Level: Numbers: Context: Representation: Answer type:	Answer format: Answer representation: Administer: Preceding: Time:

Imagen 2. Plantilla para recoger la información de una tarea.

Tras la elaboración de las pruebas, el siguiente paso es realizar las adaptaciones necesarias para el alumnado con diversidad funcional.

Por último, se elaborará un manual o guía de apoyo para el profesorado que imparte matemáticas, que incluya instrucciones sobre el uso adecuado de la herramienta de

diagnóstico y su evaluación, así como un conjunto de recursos didácticos de apoyo para el área de matemáticas relacionados con la prueba.

Una vez traducidas las herramientas de diagnóstico, se implementarán como un piloto en las escuelas asociadas. La evaluación realizada por el profesorado será analizada y los resultados obtenidos se tendrán en cuenta para realizar mejoras en las pruebas elaboradas y así conseguir las herramientas de diagnóstico definitivas.

2. Grupo de trabajo de la FESPM sobre el proyecto DiToM

Con el fin llevar a cabo las tareas que hay que realizar en el proyecto DiToM, la FESPM ha considerado oportuna la organización de un Grupo de Trabajo (GT) que comparta inquietudes y responsabilidades. Para ello se convocó, dentro del plan de formación aprobado por el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, un seminario con los siguientes objetivos iniciales:

- Informar acerca del Proyecto Erasmus+ DiToM (Diagnostic Tool in Mathematics) Nº: 2022-1-DE01-KA220-HED-000087983.
- Dar a conocer modelos de evaluaciones de diagnóstico en competencia matemática.
- Formar acerca de cómo elaborar unidades de evaluación de diagnóstico en competencia matemática.
- Fomentar la colaboración y el intercambio de experiencias docentes, basadas en la aplicación y análisis de evaluaciones de diagnóstico en competencia matemática.

La constitución del GT se llevó a cabo mediante un encuentro presencial que se celebró en Valladolid los días 26 y 27 de enero de 2024. En esos días, además de dar a conocer este proyecto Erasmus+ entre los participantes, el trabajo se centró en revisar el paquete de trabajo 2 y en proponer mejoras sobre el marco teórico elaborado por los representantes de las instituciones socias del proyecto. Además, se presentaron las ideas iniciales del consorcio acerca de las cinco herramientas de

diagnóstico o pruebas anunciadas en el apartado 1 de la presente comunicación, con el fin de recoger sugerencias para su elaboración y desarrollo.

A partir del encuentro de Valladolid se establecieron dos subgrupos de trabajo, uno sobre Infantil y Primaria (3 componentes) y otro sobre Secundaria (11 componentes), con una estrecha coordinación entre ambos.

Desde la constitución del GT hasta el momento actual, el trabajo principal de los integrantes del mismo se ha enfocado en la elaboración de las tareas que constituyen las pruebas que se pilotarán en el curso 2024-2025 (Ver Imagen 3) siguiendo como esquema el que se recoge en la siguiente plantilla que aparece en la Imagen 2.

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Template to create the 5 diagnostic tests

CODE/CONTENT/SUBCONTENT: AS2 - Addition in different complexity			
Task	**Answer and scoring**	**Skill**	**This skill is a key for...**
Complete the following table adding 10 	The possible answers will be: • Correct: 34, 44, 54, 64 • Not correct: Different from previous The correct option is 6 points	Given a two-digit number, mentally find 10 more or 10 less than the number, without having to count.	Mental calculation ability.
	Possible responses besides the correct ones, misconceptions	**Formative and technical information**	
	The key to this question to evaluate skill is that the completion time is not too long.	Level: 2 Numbers: Natural Context: Mathematical (algorithmic) Representation: Mathematical notation (symbolic) Answer type: Produce (answer)	Answer format: Closed Answer representation: Mathematical notation (symbolic) Administer: Written Preceding: Time: 2 minutes

Imagen 3. Plantilla de una tarea sobre suma realizada por el grupo de la FESPM

3. Perspectivas de futuro

Una vez se consensuen las herramientas de diagnóstico entre los socios del proyecto, se harán traducciones a los idiomas de los países de los socios participantes y se realizarán, también, las adaptaciones que se consideren necesarias, de acuerdo con los contextos y currículos de cada país o territorio.

La previsión es realizar un pilotaje mediante el que se apliquen las pruebas diseñadas en al menos dos centros de cada país de las instituciones asociadas al proyecto, con el fin de hacer las modificaciones que se consideren oportunas, a partir de la revisión y análisis de resultados y validar las herramientas de diagnóstico propuestas.

A lo largo de este proceso la FESPM se apoyará en su grupo de trabajo para efectuar las tareas asignadas, tanto aquellas relacionadas con la elaboración de las pruebas de aula en los cinco niveles diferenciados, como otras referidas a la difusión del proyecto DiToM.

4. Agradecimiento

Comunicación en el marco del Proyecto DiToM financiado con fondos europeos a través del Programa Erasmus+ (número de referencia 2022-1-DE01-KA220-HED-000087983).

Referencias

Cortés de las Heras, J. (2022, 3-4 noviembre*). Evaluación en la LOMLOE*. Jornadas Nacionales Modelo, Curricular Competencial. Campus de la Universidad de Castilla La Mancha, Cuenca (España) [Material digital]. *https://intef.es/wp-content/uploads/2022/12/Evaluacio%CC%81n-en-la-LOMLOE_Javier-Corte%CC%81s.pdf*

García-García, M., Carpintero, E., Biencinto, C., y Arteaga, B. (2024). *Pedagogía Diferencial Adaptativa*. Síntesis.

González, S. (2018, 9 mayo). *¿Es la evaluación del alumnado un mecanismo de mejora del rendimiento escolar?* En Fundació Jaume Bofill, *¿Qué funciona en Educación? Evidencias para la mejora educativa*. Ivàlua. *https://ivalua.cat/sites/default/files/2019-11/11_05_2018_08_06_28_Que_funciona_09_castella.pdf*

Hattie, J., Ficher, D., Frey, N., Gojak, L.M., Delano Moore, S., y Mellman, W. (2016). *Visible Learning for Mathematics, Grades K-12: What Works Best to Optimeza Student* Learning. Corwin Mathematics Series. Corwin Press.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación y Formación Profesional (2023). *Marco general de las evaluaciones del sistema educativo. Evaluación general del sistema y Evaluaciones de diagnóstico*. Edita: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Atención al Ciudadano, Documentación y Publicaciones.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE). *Boletín Oficial del Estado, 340*, de 30 de diciembre de 2020, 1-83.

Rodríguez-Martínez, C. (2011). *Evaluation for improvement: Andalusia's Diagnostic Analysis model*. Culture and Education, *23*(2), 205-219. https://doi.org/10.1174/113564011795944703

Sección de Evaluación. Servicio de Inspección Educativa (2008). *Marco teórico de la evaluación diagnóstica. Educación Secundaria.* Gobierno de Navarra. Departamento De Educación.

Importancia del diálogo en el aula de educación primaria para fomentar la construcción de conocimiento matemático

Yolanda Martín Blanco
yolanda.martin@uvic.cat
Escoles FEDAC (FEDAC Manresa)

Isabel Sellas Ayats
isabel.sellas@uvic.cat
Universitat de Vic - UCC

Núcleo temático: Evaluación

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

La presente investigación tiene como finalidad poner en valor la importancia del diálogo entre el docente y el alumno y entre los mismos alumnos en el aula de educación primaria para contribuir en la construcción de conocimiento matemático a partir de sus propias ideas. También enfatiza la actitud responsiva por parte del docente para tener en cuenta el proceso de aprendizaje de todos los alumnos.

Este estudio muestra evidencias del aprendizaje del alumnado a través de preguntas sobre fracciones y también se presenta el análisis del diálogo en las sesiones de enseñanza de las fracciones.

Palabras clave: Responsive teaching, diálogo, educación matemática, fracciones.

1. Introducción

El estudio que se presenta a continuación pretende mostrar de qué manera el diálogo tiene un efecto directo en el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos de educación primaria. Para ello es necesario que el docente mantenga una actitud responsiva para atender las ideas matemáticas de todos los alumnos y adaptar la clase a sus conocimientos e intervenciones para ayudarles a construir el conocimiento matemático desde, con y sobre sus ideas (Marimon i Martí, 2023; p.9).

La presente experiencia también es una práctica de evaluación contínua de los conocimientos matemáticos de los alumnos que se van modelando a través del diálogo que los alumnos van expresando tanto de manera oral como escrita.

2. Marco teórico

William (2018) enfatiza que los procesos consisten en descubrir dónde se encuentran los alumnos en su aprendizaje, establecer hacia dónde se dirigen y determinar cómo llegar hacia el objetivo deseado. Para ello, Davidson et al. (2024) ponen el foco en la escucha y el diálogo para interactuar con las ideas de los alumnos.

En el proceso de aprendizaje los conocimientos de los alumnos son esenciales para construir nuevos conocimientos con el soporte de los maestros, es decir, “los maestros tienen que saber actuar desde, con y sobre las ideas y razonamientos de los niños y niñas” (Marimon i Martí, 2023; p.9).

La enseñanza responsiva (responsive teaching) es el proceso que sigue el maestro para comprender el proceso de aprendizaje de los alumnos encontrando evidencias para identificar su razonamiento (Fletcher-Wood, 2018). Actuar de esta forma responsiva es un reto, hace falta saber identificar, entender y atender las acciones de los alumnos para dar respuesta a sus necesidades. El maestro necesita identificar las ideas del alumnado, interpretar la comprensión matemática a partir de estas ideas y decidir cómo actuar para ayudar a que cada alumno avance.

3. Participantes y contexto de la experiencia

Esta experiencia de aula se sitúa en el marco de una tesis doctoral, y los resultados que se expondrán a continuación forman parte de la recogida de datos del estudio.

La propuesta ha sido aplicada por la maestra del grupo escolar participante y a la vez investigadora del proyecto. El estudio se realiza con alumnos de quinto curso de educación primaria en una escuela de Manresa, con un total de quince alumnos que completaron el estudio de principio a fin, contando con seis niñas y nueve niños. En la etapa de educación primaria se sigue la propuesta didáctica de una editorial para enseñar matemáticas pero cuyo nombre no se citará por derechos de autor.

El contenido estudiado y que presentaremos a continuación es la noción de fracción. Durante el curso anterior, en cuarto de primaria, y siguiendo con la guía didáctica de la editorial, los alumnos realizaron dos sesiones sobre fracciones, de aproximadamente una hora cada una, para introducir los conceptos de fracción como parte de una unidad y como parte de una colección. La guía didáctica de quinto curso propone ocho sesiones sucesivas para conocer las fracciones propias e impropias, la noción de numerador y denominador, la fracción como parte de una colección de objetos, la fracción como parte de una unidad en el contexto de la medida, fracciones equivalentes, comparación de fracciones para establecer relaciones de orden entre ellas, y las fracciones en contextos de vida cotidiana.

Este estudio tiene por objetivos comprender el pensamiento matemático de los alumnos a través del diálogo entre la maestra y los alumnos y entre alumnos. En esta presentación nos centramos en la primera sesión que se llevó a cabo con los alumnos de quinto con contenidos sobre la noción de fracciones propias. El estudio se ha dividido en tres etapas.

- La primera etapa consistió en conocer los conocimientos previos de cada alumno, su razonamiento y posibles errores o ideas erróneas de las fracciones mediante preguntas sobre este contenido. En la Tabla 1 se presentan las tres primeras preguntas propuestas:

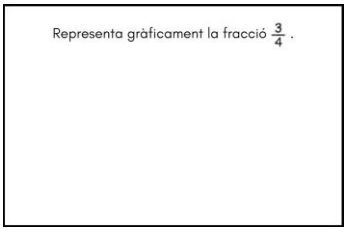
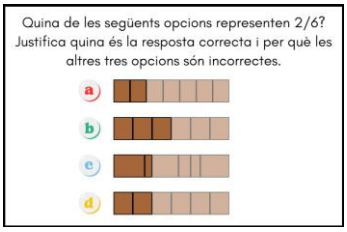
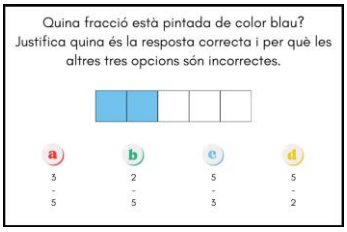
Pregunta 1: Representa gráficamente la fracción ¾.	Pregunta 2: ¿Cuál de las siguientes opciones representan 2/6? Justifica cuál es la respuesta correcta y por qué las otras opciones son incorrectas.	Pregunta 3: ¿Qué fracción está pintada de color azul? Justifica cuál es la respuesta correcta y por qué las otras tres opciones son incorrectas.
		

Tabla 1: Preguntas 1, 2 y 3 sobre fracciones

Con la primera pregunta se pretende no influenciar a los alumnos con ninguna representación previa, y se usa una fracción que se usa con cierta frecuencia en situaciones diarias.

La segunda pregunta hace referencia a una actividad que se realizará posteriormente en clase y nos sirve para conocer con antelación si los alumnos identifican la fracción con su representación, y a la vez detectar si alguno de ellos tienen la idea errónea de partir el total en seis partes y colorear dos trozos, pero sin tener en cuenta las dimensiones de cada parte.

La tercera pregunta hace referencia a identificar cómo se escribe una fracción a partir de su representación gráfica.

- La segunda etapa consiste en la realización de las clases siguiendo la guía didáctica de la editorial y complementándola con acciones que permitan a la docente tener conocimiento de los pensamientos matemáticos de los alumnos durante la clase para dar una respuesta adecuada a cada uno de ellos, según

sus conocimientos, errores y/o ideas erróneas. Esta fase es la que permite conocer los avances de todos los alumnos sobre cada concepto concreto y qué es lo que le hace avanzar.

- La tercera etapa consiste en realizar las mismas preguntas que se realizaron en la fase 1 de tal manera que se pueda analizar la evolución del conocimiento y razonamiento matemático en relación al concepto estudiado.

4. Recogida y análisis de datos

Para recoger los datos del estudio y poderlos analizar posteriormente, hemos utilizado dos elementos distintos:

- Libreta personal. Es un material complementario a la clase en el cual se han recogido todos los datos que hacen referencia al estudio y donde se pueden encontrar las preguntas que ha contestado el alumnado. La maestra guardaba la libreta y se facilitaba al alumnado en el momento de contestar las preguntas.
- Grabadoras de voz. Durante todas las sesiones de clase los alumnos se han distribuido en cuatro grupos, y cada grupo tenía una grabadora de voz con la finalidad de grabar todos los comentarios, razonamientos y el diálogo entre todos los integrantes del grupo, para después hacer una transcripción precisa de todo lo sucedido.

4.1. Análisis de los conocimientos previos

Tal y como se ha descrito en el apartado de metodología, con la finalidad de detectar los conocimientos previos de todos los alumnos antes de empezar la secuencia de clases, se realizaron unas preguntas iniciales dónde los alumnos debían contestar a la pregunta y expresar de la manera más detallada posible qué habían pensado para

dar la solución y por qué creían que habían seleccionado o descrito la respuesta correcta.

Dado que en el curso anterior las fracciones ya fueron objeto de estudio, la primera pregunta tiene como objetivo representar una fracción bastante común sin dar ninguna representación previa, para comprobar que recuerdan. Hemos detectado que, de de las 15 respuestas analizadas, únicamente una de las respuestas muestra que la alumna tenía conocimiento sobre cómo representar la fracción ¾, dibujando una representación bastante aproximada y, en este caso, no hace referencia a lo aprendido el curso anterior si no a un momento de aprendizaje con su madre.

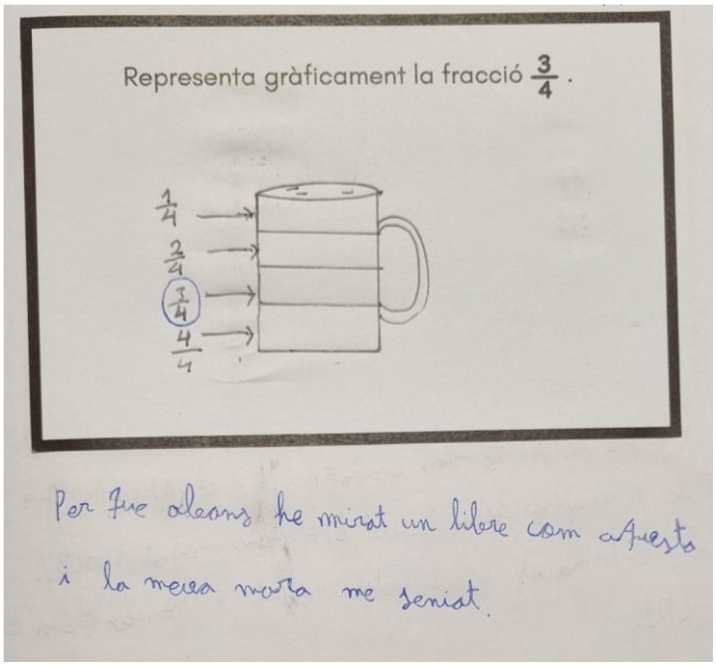


Figura 1: Solución Arlet pregunta inicial 1

La pregunta 2 tiene como objetivo identificar qué representación gráfica escogen dada una fracción concreta. En este caso, 5 de los 15 alumnos, equivalente al 33,3%, creen inicialmente que la respuesta correcta a la pregunta 2 es la opción b), que representa 3/6. Estos alumnos justifican su respuesta alegando que para encontrar la representación de la fracción 2/6, necesitamos realizar la mitad (referente al número del numerador) de seis (referente al número del denominador). De esta manera, calculan que la mitad de seis es tres y, por este motivo, la respuesta seleccionada es

la b) porque tiene seis espacios en total y tres (la mitad) están pintados. En las figuras 2 y 3 se presentan ejemplos de las respuestas de dos alumnos:

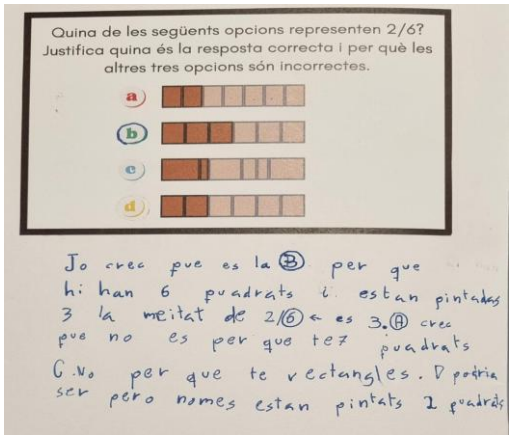


Figura 2: Solución Aina pregunta inicial 2

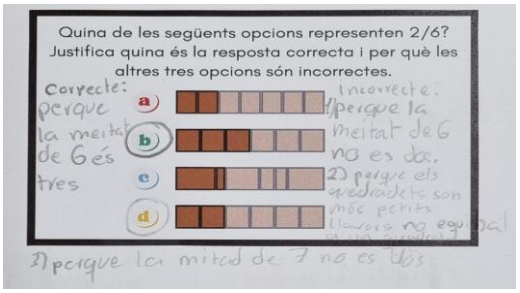


Figura 3: Solución Martí pregunta inicial 2

Finalmente, la pregunta 3 tiene como objetivo estudiar cómo el alumnado identifica una fracción mediante una representación gráfica. Ocho alumnos (53%) identifican correctamente la fracción a partir de la representación gráfica, aunque si analizamos sus justificaciones, solo la mitad de ellos dan una justificación correcta. De las respuesta erróneas, dos alumnos (13%) marcan la respuesta d), donde el numerador y el denominador están intercambiados. Los demás alumnos marcan las respuestas a) y c), que hacen referencia a la parte blanca de la representación. En las figuras 4 y 5 se pueden observar las respuestas de dos alumnos que han seleccionado la opción correcta pero que en la justificación muestran falta de comprensión sobre la opción seleccionada:

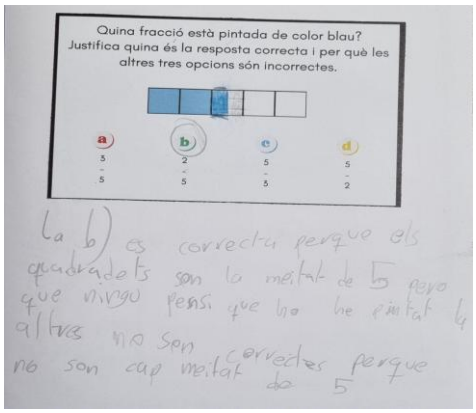


Figura 4: Solución Blai pregunta inicial 3

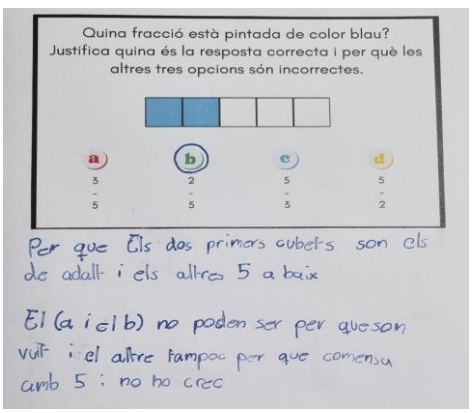


Figura 5: Solución Nil pregunta inicial 3

Los alumnos que han marcado la respuesta d), es decir, la fracción $\frac{5}{2}$, justifican su respuesta alegando que hay cinco espacios en total, y de ellos dos están pintados (véase figuras 6 y 7).

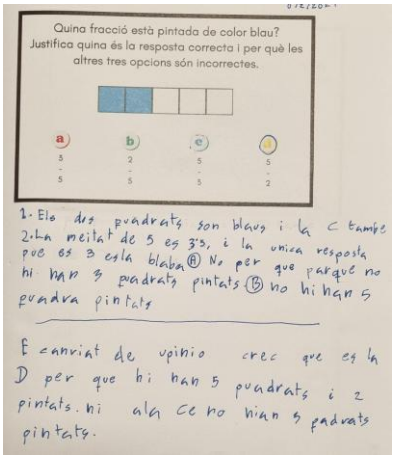


Figura 6: Solución Aina pregunta inicial 3

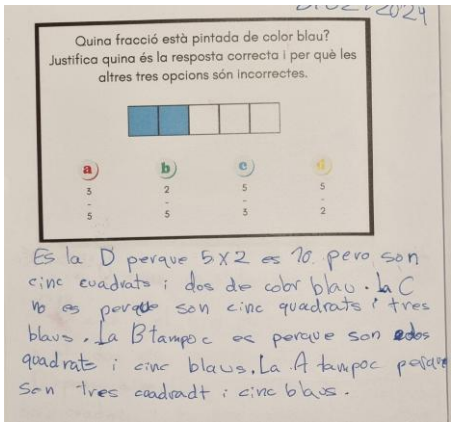


Figura 7: Solución Lia pregunta inicial 3

4.2. **Análisis del discurso de la primera sesión**

La primera sesión sobre fracciones se realizó una vez tenía todas las respuestas de los alumnos a las preguntas iniciales. Esta primera sesión duró dos horas aproximadamente, repartidas en dos clases de una hora cada una. Para esta primera sesión, cada alumno del aula tenía una bolsita con las piezas de fracciones circulares para que pudieran manipularlas en cualquier momento de la clase. La secuencia de actividades previstas era la siguiente:

- Descubrir la fracción como unidad, utilizando la pieza circular como unidad y, a partir de esta pieza, descubrir algunas particiones (mitades, cuartos y octavos).
- Interpretar cómo se escribe simbólicamente una fracción, y diferenciar el numerador del denominador y que las partes de la representación gráfica de una fracción deben ser iguales (entendiendo que si está partida en cuartos, cada cuarto debe tener el mismo tamaño).
- Deducir qué són las fracciones equivalentes e iniciarse con la suma y resta de fracciones con el uso del material en alguna situación contextualizada.

En el presente análisis nos vamos a centrar en Max, uno de los alumnos del estudio, para mostrar la evolución que ha ido realizando durante la primera sesión en relación al contenido de las fracciones, con las intervenciones de sus propios compañeros y compañeras del aula y de la maestra y como el diálogo afecta en su construcción de conocimiento matemático (véase tabla 2).

Episodio 1	La maestra reparte una bolsa con piezas de fracciones circulares y Max se pregunta por qué hay piezas de distintos colores mientras que admite no saber nada sobre fracciones. La maestra identifica que Max no sabe qué son las fracciones pero que tiene interés por saberlo.	**Max**: De las fracciones no tengo ni idea. Son piezas. Ahh, tenemos que completar el cubo. ¿Y qué son las fracciones?
Episodio 2	Max relaciona las fracciones con las multiplicaciones. Vinyet y Quim observan algunas relaciones y las comentan con el equipo. Max no lo entiende y le pregunta a Vinyet qué son las fracciones, y ella le responde con lo que ella cree, aunque no convence a Max, que sigue preguntando con interés. La maestra identifica que los alumnos tienen curiosidad por descubrir y comprender las relaciones entre las piezas del material y el contenido matemático. Figura 8: Material de fracciones circulares utilizado	**Quim**: Esto es 1 de 8. ¡Necesitamos 8 piezas de estas para completar esto! Alaaa, ¡ya lo sé! **Max**: ¡Ahora ya lo entiendo! Ah, claro, ahora es 1x2, pues necesitamos 1x2, 2. **Vinyet**: Están divididas por los números que hay aquí, que hay 1, rayita, y 6, porqué hay 6 de estas piezas. **Quim**: Se necesitan 2 negras para hacer una blanca. **Max**: ¿Me puedes decir qué son las fracciones ya? Vinyet, habla.Vinyet: Una redonda que está dividida en diferentes figuras.Max: ¿Y por qué se dividen, y no se multiplican? **Vinyet**: Porqué me parece que es así.
Episodio 3	La maestra propone una situación sobre pasteles, y pregunta qué pieza de todas las que tienen	**Maestra**: ¿Qué pieza de todas las que os he dado

	representan un pastel entero. Los alumnos responden que la pieza blanca representa todo el pastel entero. La maestra interpreta que los alumnos comprenden que la pieza blanca muestra la unidad y decide seguir con la siguiente pregunta	a cada uno un pastel representa. entero? **Max**: Color blanco.
Episodio 4	La maestra les pregunta qué podemos hacer si queremos partir este pastel por la mitad Max contesta que podemos coger las piezas negras. La maestra le pregunta por qué cogería estas piezas, y Max responde que si se parte el pastel por la mitad, entonces tendríamos dos trozos, y vuelve a hacer referencia a la multiplicación 1x2 para justificar su respuesta. La maestra realiza preguntas con el objetivo de que los alumnos relacionen la unidad con dos mitades. Los alumnos llegan a la conclusión que dos piezas (dos mitades) completan un pastel entero y, por lo tanto, 2/2 y para hacer referencia a una mitad la fracción es 1/2, y que para ello los trozos tienen que ser iguales, ni uno más grande ni uno más pequeño. La maestra decide avanzar con la siguiente pregunta.	**Maestra**: Ahora imaginaros que este pastel lo queremos cortar por la mitad. ¿Qué haremos? **Max**: Las negras. **Maestra**: ¿Qué quieres decir con que cogeremos las negras? **Max**: ¿Porqué las partimos por la mitad? **Maestra**: Pero, ¿por qué cogerías las negras? **Max**: Porqué si cortas por la mitad da dos trozos.
Episodio 5	La maestra pregunta qué quiere decir el 1 de la fracción que muestra la pieza que representa la mitad. Arlet aporta que es la línea que se recorta, aunque no todos los alumnos están de acuerdo con su aportación. La maestra interpreta que el alumnado no entiende el concepto, así que decide pedirles que cojan las dos mitades del material de fracciones circulares. Max insiste que representa la multiplicación 1x2, y seguidamente Vinyet muestra cómo sería el pastel con las dos mitades. Con las aportaciones posteriores de Max, Blai relaciona su comentario con que la fracción muestra la parte que te llevas. La maestra aprovecha su aportación para relacionar que el dos de la fracción ½ se le llama denominador, y pregunta qué nos indica. Jan responde que este dos nos dice en cuántas partes hay que cortarlo, a lo que Blai continúa añadiendo que el número de arriba es la cantidad que te llevas. La maestra indica que la aportación de Blai habla del numerador. La maestra identifica que algunos alumnos interpretan la fracción con las líneas que se observan entre piezas.	**Maestra**: ¿Y este 1? ¿ Qué creeis que quiere decir este 1? **Max**: ¿Que hay una persona? **Maestra**: Hemos dicho que esta es la cantidad de partes que cortamos y, en este caso, cortamos en mitades, y si cortamos en mitades nos salen dos trozos, pero y este 1, ¿ qué creéis que es? **Max**: Es la línea que se recorta. **Max**: Es una línea, por dos. **Maestra**: ¿Y por qué dos, Max? **Max**: Porqué 1x2 da 2. Porqué hay un 1 y un 2. Y dos veces 1, da 2.
Episodio 6	La maestra les pregunta qué pasaría si una vez tenemos el pastel partido por la mitad, lo volvemos a cortar otra vez por la mitad, y los invita a pensarlo haciendo uso del material de fracciones circulares.	**Max**: 1 de 4, porqué 4 veces 1 hace una redonda.

Max sigue relacionado lo que observa de las fracciones con las multiplicaciones. A continuación el equipo entra en duda porqué ellos son tres en el equipo y están cortando cuatro partes, a lo que la maestra les recuerda que tienen que buscar la manera de volver a cortar por la mitad, independientemente de los que sean en el grupo.

Max y Quim comparan los distintos tipos de piezas que tienen y se dan cuenta que todas ocupan lo mismo, y solamente cambia la cantidad de piezas que utilizan.

La maestra identifica que Max sigue relacionando las fracciones con las multiplicaciones. La maestra decide avanzar para poner en común lo que han investigado los cuatro grupos.

Episodio 7

Después de investigar en equipos, la maestra vuelve a preguntar a todo el grupo qué obtenemos si volvemos a partir por la mitad. Max responde que nos quedarían 4 trozos.

Jan piensa que al cortar por la mitad, obtendrá un trozo más, es decir, un total de 3. Max le responde que no se puede partir en 3 ya que no estaría haciendo la mitad, en hacerlo le saldrían 4 trozos, alegando que la línea que aparece está de punta a punta.

Figura 9: Muestra de la línea que parte las dos mitades

La maestra interpreta que Jan tiene una idea errónea sobre este contenido y decide atender su aportación para clarificar a Jan el motivo por el cual la aportación de Max es cierta. Para ello, la maestra les propone coger las mitades y los tercios para compararlos entre ellos.

Aina observa que la línea que se ve con las mitades desaparece parcialmente cuando se ponen los tercios encima.

Figura 10: Muestra del trozo de línea que desaparece con los tercios encima de las mitades

La maestra interpreta el razonamiento de los alumnos y hace preguntas para que lleguen a la conclusión que los tercios no nos muestran la solución al problema

Max: Porqué ha dicho que lo partamos por la mitad, y la mitad no lo partimos en··· lo partimos recto.

Max: Ahora cuando separas el negro se van dos y no una. ¿Ves?

Maestra: Ahora pon los cuartos encima de las mitades. ¿Qué pasa si ponemos los cuartos encima de las mitades?

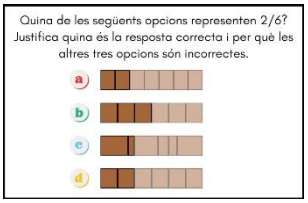
Quim: ¡Ala! ¡Mira! ¡Ahora la línea no desaparece!

Max: Ahora cuando separas···

Vinyet: ¡Ahora cuando separas ya no desaparece!

Figura 11: Muestra de la línea vertical que se mantiene con los cuartos encima de las mitades

	planteado. A continuación expresan que cada mitad equivale a dos cuartos y la maestra decide avanzar con la siguiente pregunta.	
Episodio 8	A continuación Blai realiza una pregunta interesante a la maestra. La maestra decide pedir a los alumnos que con la ayuda del material de fracciones circulares cojan las piezas que ha dicho Blai y traten de dar con la solución, a la vez que escribe en la pizarra las tres fracciones. El alumnado llega a la conclusión que si juntamos una mitad con dos cuartos conseguimos un pastel entero. La maestra interpreta que el alumnado empieza a comprender el significado de fracciones equivalentes porque justifican que dos cuartos equivalen a una mitad y deducen que si cortamos la mitad en cuartos, se consiguen cuatro trozos iguales. La maestra decide avanzar con la siguiente pregunta.	**Blai**: Ya, pero una cosa. Si ponemos un cuarto, una mitad, y otro cuarto, ¿cuánto sería? **Maestra**: Vamos a probarlo. **Martí**: Pasa esto porqué hay cuatro cuartos, de cuatro. **Maestra**: Cuatro cuartos de cuatro. ¿Cuántos cuartos hay en una mitad? **Martí**: Dos.
Episodio 9	La maestra les pregunta qué pasará si, con la unidad partida en cuartos, queremos volver a cortar por la mitad. La maestra interpreta que los alumnos comprenden el significado de partir por la mitad ya que enseguida responden que hay que utilizar las piezas amarillas, las de ocho, y muestran cómo con dos octavos pueden llenar un cuarto. La maestra decide avanzar con la siguiente pregunta.	**Maestra**: Vale, y si ahora queremos volver a cortar estos cuartos por la mitad, ¿qué piezas necesitaremos ahora? **Max**: Las amarillas, las de ocho. **Martí**: Porqué en cada cuarto hay dos, entonces en cada recta habrá cuatro.
Episodio 10	La maestra muestra en la pizarra tres imágenes y pregunta qué opción muestra ocho octavos, y les pide que justifiquen su respuesta. La maestra identifica que Vinyet se posiciona con una de las tres opciones y justifica su respuesta de manera correcta y lo demuestra con la ayuda del material manipulativo de fracciones circulares. Después de hablar de las tres opciones, llegan a la conclusión que la respuesta correcta es la b), ya que está partida en ocho trozos iguales.	**Vinyet**: ¿Cuál crees que es la de octavos? Que hay ocho partes. ¿Por qué? Pues porqué si cogemos un pastel entero y lo partimos y lo volvemos a partir, es decir, el de cuatro, y si ponemos dos fichas en cada mitad del cuatro del ocho, da dos, y si ponemos dos, da ocho.
Episodio 11	Una vez en clase se ha trabajado el concepto de fracción propia y la noción de numerador y denominador, la maestra decide que los alumnos piensen de manera individual una pregunta que ya respondieron antes de empezar las sesiones para conocer los conocimientos previos y así identificar el proceso de aprendizaje de todos los alumnos del aula. Una vez recogida la solución y el razonamiento de manera individual de cada alumno, la maestra decide avanzar con la siguiente pregunta (episodio 13).	
Episodio 12	Este episodio pasa a la vez que el episodio 11, ya que el episodio anterior recoge las respuestas individuales de los alumnos, mientras que el presente episodio recoge los comentarios de los alumnos en cada grupo	**Quim**: ¿Cuál es? **Max**: Es la··· ¿pero por qué? ¿Pero por qué? Es

	mientras los alumnos iban saliendo de clase para explicar su respuesta correcta y justificación. Max pregunta a todos sus compañeros de grupo diversas veces el por qué de la justificación de la respuesta correcta. Él tiene claro cuál es la respuesta correcta pero no sabe explicar el por qué. Durante este episodio ningún alumno le explica el por qué y él es capaz de justificar su elección, tal y como hemos visto en el episodio anterior.	que no sé por qué. ¿Por qué?
Episodio 13	La maestra, después de recoger todas las respuestas individuales de los alumnos, decide preguntar a la clase cuál es la respuesta correcta para clarificar el razonamiento con todos los alumnos. Max es uno de los alumnos que da su opinión. La maestra escucha las intervenciones de los alumnos, se clarifican algunos razonamientos y decide avanzar con las actividades que propone el libro de ejercicios.	 Figura 13: Pregunta 2 **Max**: La d) porqué hay seis cuadrados y dos están pintados.
Episodios 14, 15 y 16	En el episodio 14 empiezan a leer que tarea hay que realizar en el libro. En el episodio 15 empiezan a resolver los ejercicios. En el episodio 16 lo corregimos conjuntamente con todo el grupo clase. Durante los tres episodios hacemos las dos páginas del libro con los equipos. En estos episodios no se detallan los ejercicios por la confidencialidad de derechos de autor de la editorial.	

4.3. **Análisis de la evolución del conocimiento de fracciones**

En la tabla 3 se pueden observar las preguntas iniciales y las preguntas finales expuestas en la tabla 1 del presente estudio y que completa Max, para analizar la progresión de su conocimiento sobre las fracciones que han aparecido en la primera sesión de clase:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3

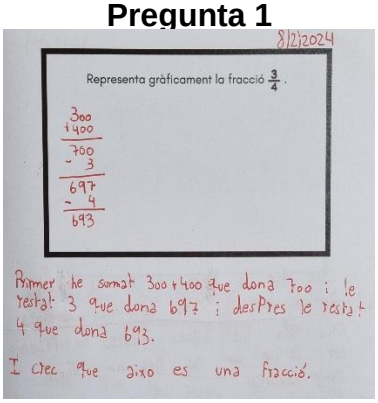
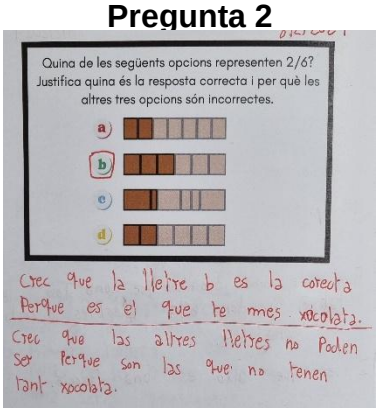
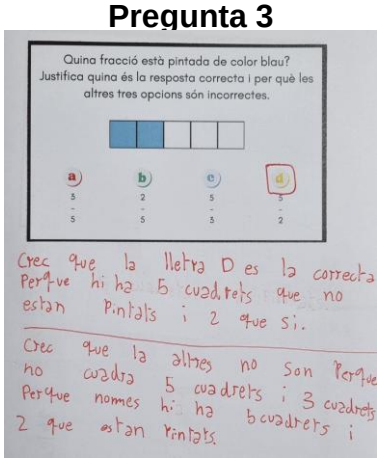

		

Figura 14: Pregunta inicial 1 Max	Figura 15: Pregunta inicial 2 Max	Figura 16: Pregunta inicial 3 Max
Primero he sumado 300 + 400 que da 700 y le he restado 3 que da 697 y después le he restado 4 que da 693. Y creo que esto es una fracción.	Creo que la letra b es la correcta porque es la que tiene más chocolate. Creo que las otras no pueden ser porque son las que no tienen tanto chocolate.	Creo que la letra d es la correcta porqué hay 5 cuadrados que no están pintados y dos que sí. Creo que las otras no son porque no cuadra 5 cuadrados y 3 cuadrados porqué solo hay 5 cuadrados y 2 que están pintados.

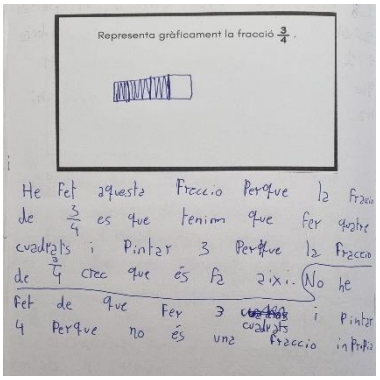
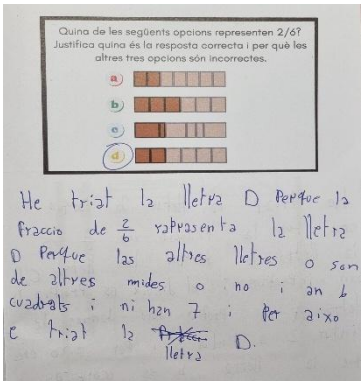
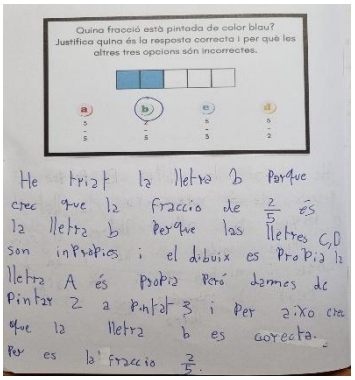

		

Figura 17: Pregunta final 1 Max	Figura 18: Pregunta final 2 Max	Figura 19: Pregunta final 3 Max
He hecho esta fracción porqué la fracción de ¾ es que tenemos que hacer cuatro cuadrados y pintar 3 porque la fracción de ¾ creo que es así. No he hecho de que hacer 3 cuadrados y pintar 4 porque no es una fracción impropia	He escogido la letra d porque la fracción de 2/6 representa la letra d porque las otras letras o son de otras medidas o no hay 6 cuadrados y hay 7 y por eso he escogido la letra d.	He escogido la letra b porque creo que la fracción de ⅖ es la letra b porque las letras c, d son impropias y el dibujo es propia, la letra a es propia pero en vez de pintar 2 ha pintado 3 y por eso creo que la letra b es correcta, es la fracción

Tabla 3: Respuestas iniciales y finales 1, 2 y 3 de Max

Podemos observar que Max modifica sus respuestas en las tres preguntas y el conocimiento adquirido sobre el concepto de fracciones analizado de la primera sesión, aunque las preguntas finales no se administraron al final de esta primera sesión, si no al final de toda la intervención.

En la primera pregunta inicial Max hace un conjunto de operaciones para dar respuesta a la pregunta. Después de la intervención, Max es capaz de representar la fracción de manera correcta y de justificar por qué ha decidido representarla así. Su justificación también hace referencia a los dos tipos de fracciones que ha aprendido (propias e impropias) y justifica por qué esta representación no puede ser una fracción impropia.

En la segunda pregunta inicial Max escoge la opción que muestra más cantidad sin hacer referencia a la cantidad de partes totales ni las partes seleccionadas. En la pregunta final, Max elige la respuesta correcta y en su justificación se puede deducir que ha aprendido que las partes que parten la representación deben de ser iguales y también descarta las opciones que no tienen o bien 6 partes en total o 2 partes seleccionadas.

En la tercera pregunta inicial Max muestra una idea errónea al elegir la respuesta d) porque interpreta que la representación tiene 5 trozos (numerador) y 2 están pintados (denominador). En la pregunta final, Max elige la respuesta correcta justificando también por qué las demás no son correctas; en el caso de las opciones c) y d) porque son fracciones impropias y la opción a) no corresponde con la representación.

Realizar preguntas individuales dónde se espera que los alumnos únicamente marquen qué opción es la correcta da información al docente sobre si es capaz de identificarla, pero proponer al alumnado que también escriba el porqué de su elección, da aún más información al docente para interpretar el razonamiento para decidir su respuesta. De esta manera, si la respuesta es correcta ayuda al docente a conocer la comprensión del alumno, pero si la respuesta es incorrecta permite al docente preparar su actuación para ayudarle a seguir construyendo conocimiento contemplando las ideas erróneas que contiene.

5. Conclusiones

Escuchar y dialogar con los alumnos en el momento que están aprendiendo y construyendo conocimiento matemático es clave para comprender sus razonamientos y detectar posibles ideas erróneas que puedan interferir en el aprendizaje.

Es importante que los maestros puedan preparar muy bien y con antelación las sesiones que van a realizar con los alumnos en el aula porque esto les permite dar una respuesta más adecuada a los razonamientos e ideas erróneas que puedan mostrar mientras aprenden conceptos matemáticos. Aún así, es posible que durante el transcurso de la sesión puedan aparecer ideas que el maestro no haya contemplado, como podemos observar en el episodio 7 de la tabla 2, ya que hay alumnos que van dando sentido a las fracciones observando la línea que separa las partes.

También es de especial relevancia que se tengan en cuenta todas las ideas de los alumnos, favoreciendo el diálogo en el aula, ya que les permite expresar su razonamiento y a la vez da conocimiento al maestro de todas las ideas de los alumnos. En el caso del alumno mostrado, Max, podemos observar cómo sus ideas se han ido adaptando y modificando a medida que ha ido aprendiendo y relacionando los conceptos.

Finalmente, damos valor a una actitud responsiva del docente para que identifique, interprete las ideas de los alumnos para después decidir cómo hacer avanzar la clase (Fletcher Wood, 2018) para construir el conocimiento desde, con y sobre las ideas de los alumnos (Marimon i Martí, 2023; p.9).

Referencias

Davidson, S. G., Jaber, L. Z., & Metcalf, A. (2024). Learning to Listen: Cultivating Pre-Service Teachers' Attunement to Student Thinking. *Journal of Science Teacher Education*, 1-20. https://doi.org/10.1080/1046560X.2024.2302694

Fletcher-Wood, H. (2018). *Responsive teaching: Cognitive science and formative assessment in practice*. Routledge.

Marimon-Martí, M., & Martí, J. (coord.) (2023). *Orientacions per introduir l'ensenyament responsiu a la formació inicial de mestres*. Universitat de Vic Universitat Central de Catalunya.

William, D. (2018). *Embedded formative assessment* (2a ed.). Solution Tree.

ProyectaMates: formación mediante la observación de videograbaciones

Alberto García Díaz
agarcidi@ull.edu.es
Universidad de La Laguna, IES Andrés Bello

María José González Lorenzo
mgonlory@gobiernodecanarias.org
IES La Laboral de La Laguna

Israel García Alonso
igarcial@ull.edu.es
Universidad de La Laguna

Núcleo temático: Formación de profesorado, Procesos

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

La observación de aula es un recurso muy utilizado en los cursos de formación. Su práctica lleva asociada la utilización de un Protocolo de Observación, que es una herramienta de fácil manejo en el que el profesorado reconoce elementos metodológicos y registrar evidencias durante la observación que le permiten hacer un ejercicio de reflexión de la práctica docente.

En este trabajo presentamos la descripción de un Protocolo de Observación orientado a la resolución de problemas de Matemáticas y se analizan algunas discusiones y resultados de su puesta en práctica dentro de un curso de formación con profesorado de educación primaria y secundaria. Se concluye que el protocolo de observación centra las discusiones de los docentes en los procesos de resolución de problemas en el aula y, permite señalar las estrategias a incorporar en su práctica.

Palabras clave: Observación de aula, Matemáticas, Formación docente, ProyectaMates.

1. Introducción

La observación de aula es una actividad docente que se utiliza habitualmente durante la formación docente inicial. ProyectaMates es un proyecto de innovación educativa con un curso de formación dirigido al profesorado de Educación Primaria y primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria acerca de la resolución de problemas. ProyectaMates promueve una formación eminentemente práctica, de forma que todo lo que se discute en las sesiones de formación se deberán llevar a la práctica del aula. Esta práctica será observada por el resto de los docentes y será en ese instante en el que, a su vez, pondrán en práctica lo estudiado acerca de cómo observar, con qué instrumento y con qué finalidad (Imagen 1).

Imagen 1: Itinerario de aprendizaje del profesorado en formación. Fuente: elaboración propia.

ProyectaMates cuenta con varios módulos formativos:

- **Módulo de resolución de Problemas**: en el que se selecciona algunas de las estrategias de resolución descritas por Polya (1945) y se aplican a problemas no rutinarios (García-Alonso et al., 2019).

- **Módulo de Estructuras de Trabajo Cooperativo**: en el que se introducen las estructuras simples de trabajo cooperativo en las aulas, de cara a potenciar la resolución de problemas matemáticos como proceso social, en el que la interacción entre los estudiantes permite una mejor y mayor adquisición de la competencia matemática.

- **Módulo de Observación de Aula**: con el que se introduce una estrategia de observación por medio de un protocolo de observación que presenta diferentes dimensiones o aspectos a observar, que permitirá identificar buenas prácticas en el aula.

Como hemos indicado, uno de los módulos formativos se dirige a promover la observación de aula como estrategia de desarrollo profesional más allá de la formación inicial. Así, se promueve la reflexión acerca de la práctica docente del profesorado en formación con el objetivo de que esta permita aumentar las oportunidades de aprendizaje a su alumnado en matemáticas. Los docentes, a través de la visualización de episodios de clases de resolución de problemas implementadas por el propio profesorado en formación, se promueve la reflexión acerca de la práctica de sus iguales.

En esta comunicación presentamos el instrumento utilizado para la observación de aula, así como las estrategias desarrolladas en la formación de cara a promover el intercambio de experiencias y la reflexión crítica y constructiva sobre la práctica docente. Todo ello dirigido al crecimiento profesional de los docentes participantes.

2. Desarrollo profesional: ¿por qué observar?

Los resultados en matemáticas por el alumnado español en pruebas de evaluación internacional como TIMSS o PISA durante las últimas décadas no están siendo los deseados y esto está promoviendo mayor concienciación entre el profesorado de matemáticas y la búsqueda de estrategias dirigidas a mejorar su práctica docente. Se sabe que el aula es un lugar muy complejo, en el que se suceden diferentes eventos de forma simultánea. Observar estos eventos permite analizar aspectos como la calidad de la instrucción matemática de la clase, la diversidad de estrategias de enseñanza presente en diferentes centros o aulas o, simplemente, medir y cuantificar aspectos que tienen lugar en el aula, porque todo lo medible adquiere valor y toma relevancia (Bostic et al., 2019). Así pues, la observación entre docentes será una estrategia capaz de detectar fortalezas y debilidades del proceso de enseñanza de las matemáticas, mediante la recogida sistemática de información de lo que ocurre durante una sesión de clase y atendiendo a unos criterios que se pactan entre los docentes.

Sin embargo, la observación de aula en directo presenta una limitación, en ocasiones insalvable, que precisa de más de un profesor en el aula de forma simultánea y, en determinados momentos, la logística del equipo docente no lo permite. Por ello, la videograbación u observación en diferido se presenta como un recurso válido y práctico para el análisis de las sesiones de clase de un profesor o grupo de profesores, que aporta, además, la posibilidad de revisar con mayor detalle los eventos sucedidos en el aula. La tecnología actual ha universalizado el acceso a la videograbación y la digitalización de cualquier ámbito, también del educativo, proporcionando nuevas oportunidades para reflexionar sobre la práctica y promover acciones de mejora en su instrucción (Geiger et al., 2016). A lo largo de los últimos años, las investigaciones han ido dejando constancia sobre el uso de la videograbación en el desarrollo profesional docente y su eficacia para la mejora de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias (Santagata, 2009; Seidel et al., 2011; van Es, 2012; van Es y Sherin, 2008).

Si bien las limitaciones técnicas (como la calidad de la grabación, la capacidad de procesamiento de archivos de gran tamaño de los equipos, su distribución en el aula, el conocimiento de los dispositivos de edición, ...) pueden volverse en detrimento del objetivo de una videograbación, son muchas las ventajas de su utilización. La videograbación permite a muchos profesores poder hacer la visualización de su actividad en el aula, lo que es una buena estrategia para difundir buenas prácticas o promover el análisis de una práctica docente. Además, permite apreciar mayor nivel de detalle en las observaciones debido a que se puede visualizar más de una vez, no pudiendo hacerse esto en una observación en directo.

3. Protocolo de Observación: ¿con qué observar?

Los protocolos de observación permiten sistematizar y objetivar el análisis de la observación de una sesión de clase, ya sea en tiempo real o en una videograbación, y puede ser utilizada para observar fragmentos de sesiones o sesiones completas, ya que los protocolos de observación se confeccionan a partir de los aspectos que deseen ser analizados y suele apoyarse en elementos concretos y agrupables, distribuidos en dimensiones y graduadas con uno o diferentes grados de consecución observada. Pero, el docente que va a realizar una observación que promueva la reflexión deberá, previamente, educar su mirada. Para ello, una buena estrategia será contar con alguno de estos protocolos, que le permita identificar los elementos didácticos a observar y, consecuentemente, dirigir su reflexión acerca de la enseñanza en un sentido determinado.

En ProyectaMates contamos con un protocolo de observación de aula, esto es, una herramienta útil y sencilla de utilizar que, tras una breve formación, permite identificar y discutir estrategias de enseñanza observadas en un aula (García-Díaz et al., 2021). En este proyecto los docentes reciben la formación necesaria para su utilización en el análisis de videograbaciones de clase atendiendo a varias dimensiones. La herramienta consta de cinco dimensiones (Imagen 2). Cada una de las dimensiones

centran la mirada del docente en aspectos concretos con los que “educar” y dotar de estrategias para observar lo que sucede en el aula.

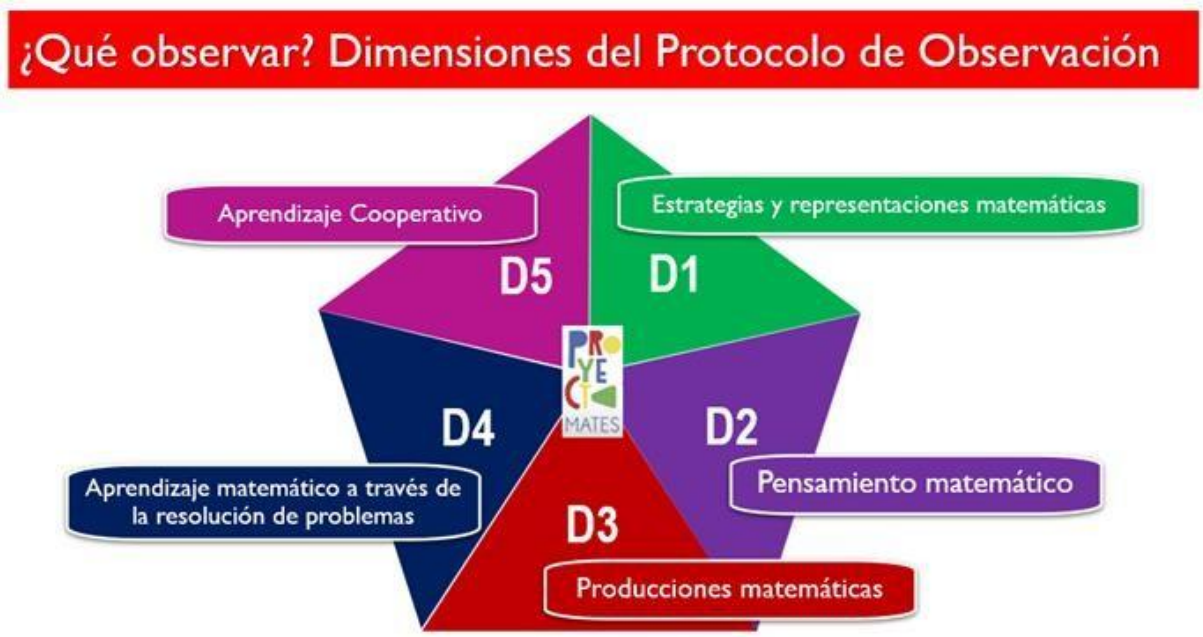


Imagen 2: Diagrama de dimensiones del Protocolo de Observación. Fuente: elaboración propia.

Las dimensiones son:

D1. Estrategias y representaciones matemáticas. Esta dimensión indica si el profesorado da pie a que se resuelva el problema atendiendo a diferentes estrategias heurísticas o durante la resolución se evidencian varias fases de Bruner (manipulativa, gráfica y simbólica).

D2. Pensamiento matemático. Esta dimensión recoge en qué grado el profesorado promueve la profundización en el seguimiento de las fases de la resolución de Polya y en la comprensión de todos los elementos que comprende.

D3. Producciones matemáticas. Esta dimensión indica cómo el profesorado gestiona las intervenciones orales o producciones escritas del alumnado y si las incorpora a su discurso.

D4. Aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas. Esta dimensión determina si se utiliza un vocabulario técnico riguroso de las matemáticas emergentes en el problema por parte del profesorado y si se promueve el cierre

matemático (reformulación del problema trabajado, utilizar el problema trabajado para destacar las matemáticas utilizadas, buscar matemáticas en el contexto del problema resuelto,...) en la sesión.

D5. Aprendizaje cooperativo. La dimensión del trabajo cooperativo da una visión de si el profesorado sigue las pautas de este tipo de trabajo grupal con su alumnado y no se reduce únicamente a su agrupación en el espacio de clase.

4. Módulo de Observación de Aula: Nos formamos para crecer

La formación en este módulo se inicia presentando el Protocolo de Observación y con la explicación de las dimensiones que lo conforman (Imagen 3). A continuación, se ejemplifica la aplicación del mismo a la observación de algunos fragmentos de sesiones de clase de ediciones anteriores escogidos para poner el foco en alguna dimensión.

Imagen 3: Ejemplo de graduación de una dimensión en el Protocolo de Observación. Fuente: elaboración propia.

El profesorado observa el episodio y, siguiendo el protocolo, valora cada una de las dimensiones en tres niveles: incipiente (o básico), medio y avanzado. Además, para cada dimensión observada se le solicita que aporte una evidencia que justifique dicha valoración, tanto gráfica, oral o escrita (Imagen 4).

Imagen 4: Protocolo de observación (izquierda) y fragmento de una sesión de clase (derecha). Fuente: elaboración propia.

A lo largo de dos sesiones de formación los docentes participantes en el proyecto se inician en educar la mirada con el propósito de realizar una observación dirigida a aspectos que puedan enriquecer su actividad docente en el aula.

5. Comunidad de prácticas: ¿cómo observamos nuestra práctica?

Una vez completada la etapa de entrenamiento (Imagen 1), los docentes aplicarán en una sesión de resolución de problemas con su clase lo visto en la formación. Esta sesión será videograbada y esta grabación será observada por todos los docentes participantes del proyecto por medio del Protocolo de Observación.

Previamente a la sesión presencial de discusión con todos los docentes participantes en el proyecto, los formadores revisan y aplican el mismo protocolo a todas las videograbaciones, seleccionando aquellos episodios adecuados para su discusión. Además, se elabora un informe individual de cada videograbación que se comparte con cada docente de forma que tiene acceso no sólo a este informe sino también a su grabación (Imagen 5).

En el desarrollo de la sesión formativa presencial de revisión de las grabaciones, el profesorado visualiza algunos fragmentos significativos seleccionados por los formadores como buenas prácticas (Imagen 6), sobre las que aplicará el protocolo de observación, de la misma manera en que fueron entrenados. Será el punto de partida de la discusión acerca de cómo se han integrado los elementos de la formación recibida en torno a la resolución de problemas en el aula y qué estrategias

observadas por otros docentes pueden ayudarnos a mejorar nuestra práctica. Se convierte, de esta manera, en una auténtica comunidad de prácticas (Buysse et al., 2003), es decir, un marco que integra la investigación educativa con la práctica, mediante el desarrollo de una práctica reflexiva y un aprendizaje situado como fundamento de la propuesta.

Valorado por	D1	D2	D3	D4	D5
Alberto	1 - Incipiente	0 - No observado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado
Alberto	2 - Medio	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado
María José	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	2 - Medio
María José	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	0 - No observado	3 - Avanzado
Alberto	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	1 - Incipiente	0 - No observado
María José	2 - Medio	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado	3 - Avanzado

Observaciones	¿Trozo?
Hacen 1-2-4 en cooperativo. Diagrama partes-todo. Uso de regletas. Operaciones de dos formas diferentes (horizontal y vertical) y trabajo manipulativo con regletas. Aplicación de la propiedad asociativa para la suma. Cierre matemático: propuesta de un problema diferente con esos números. Animamos a seguir las fases sistemáticamente.	**05:02 - 08.21. Se aplica el cooperativo (tres fases) y se pregunta a portavoces por método seguido. Aparece diagrama partes-todo. No se hace con las fases sistemáticamente.** // 15:27 - final : cierre matemático: con estos datos, proponer un problema diferente. No tiene mucho éxito.
Reparto de roles para cooperativo. Recordar las fases. Indica que están empezando a trabajar con datos, relaciones y objetivo. El estudiante verbaliza el proceso. Sigue las fases, pero deja que los grupos escriban la respuesta sin compartirla. La fase 4 no se presenta al resto, es oral. Propone hacer un cierre matemático, pero no tiene éxito en las propuestas.	18.11 - 22.05: Resolución por tabla de ensayo error con argumentación de una estudiante. Se observa trabajo cooperativo pasando por los grupos. Se utilizan palabras técnicas (D2, D3, D4, D5)
Lápices al centro, inicia aplicándola en la fase 1, pero luego no. Sigue las fases. Hace un diagrama simbólico. Sigue las fases sistemáticamente. Usa vocabulario técnico (fracción de una cantidad, numerador, denominador,...). Cierre matemático: cómo modificar el problema.	1:11 - 7:18: Recaba datos, operaciones y objetivos. Incide en los diagramas y avanza a la fase de pensar. Se aprecia el trabajo cooperativo
Se aplica lápices al centro. La profesora hace un cuadro con las respuestas de todos los grupos. La docente propone la "solución" para la fase 1. Propone seguir dos estrategias.	10.31 - 14.48 : Seguimiento de las fases, recogida de datos de los grupos. La profesora propone una solución. Uso de dos estrategias (se propone). Comienza manipulación (pero no manipula)
Agrupación del alumnado en parejas. Recuerda las fases al principio. Incide en la diferencia de dato-relación. Análisis de estrategias. La tabla de ensayo y error se plantean dudas y se verifica la unicidad. Utilizan decimales. No se hace un cierre matemático ni se aprecia un lenguaje técnico.	**06.40 - 09:40: Se termina fase 1 y se pasa a fase 2. Se analizan los diferentes tipos de estrategia a seguir.**// 11.01 - 17.48 : ensayo-error y hace otra estrategia al final
Trabajo cooperativo 1-2-4. El profesor verifica que las parejas tienen la misma información. Trabajan manipulativamente con regletas. Pasan a lo simbólico en la fase de ejecutar. Ampliación: ¿seríamos capaces de crear otro problema? Análisis de la solución del nuevo problema, a partir de una operación diferente.	**3.19 - 7.50 : Repasa los datos conseguidos en gran grupo. El profesor hace grupos de 4 y repasa las fases y establece roles. Saca material manipulativo para trabajar.** // 21.46 - 30-17 Ampliación del problema. Se lee de nuevo, se pregunta por la solución y se cuestiona si se puede crear un nuevo problema a partir de ese. Incluyen cambio de operación

Imagen 5: Documento de valoración de los formadores e informe individual de grabaciones. Fuente: elaboración propia.

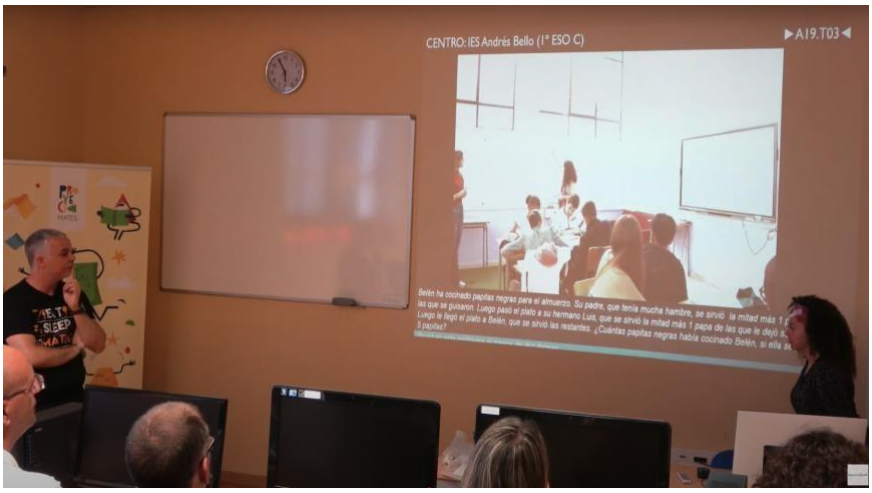


Imagen 6: Momento de la sesión presencial donde el profesorado en formación observa a sus iguales y se hacen reflexiones sobre la práctica observada. Fuente: elaboración propia.

Uno de los momentos más importantes de ProyectaMates tiene lugar cuando se inicia la discusión acerca de lo observado, destacando aquellas buenas prácticas o aspectos observados durante la implementación, intercambiando y conectando esta observación con su experiencia como docente. Es el momento en el que los diálogos permiten que entre todos crezcan como docentes de matemáticas. Algunos de estos diálogos mostraban su propia autocrítica con respecto a su actuación, pues no se evidenciaron por no tenerlas en cuenta:

> *[Profesor en formación]: Yo me puse nivel intermedio en la Dimensión 2, porque al final, la evidencia, lo que hay en el vídeo, aunque hayan ocurrido otras cosas en clase, lo que se ve es que hay un modelo, y creo que hay ciertos aspectos mejorables, en el sentido en que hay cosas que se podrían haber cuidado un poco más, como el vocabulario, o en las fases de comprender, de pensar, ejecutar y responder.*

5. Algunos ejemplos: nos observamos para crecer

Tras la primera sesión formativa presencial se diseña y planifica una nueva implementación (Fase de rediseño en Imagen 1) que será también videograbada. Se pretende con ello tener una nueva oportunidad para incorporar nuevas estrategias y observarlas en la siguiente videograbación.

Tal y como indicamos anteriormente, los formadores elaboran un informe de cada videograbación que recoge las valoraciones extraídas de la aplicación del protocolo de observación. El análisis comparativo del desempeño de los participantes en cada una de las dimensiones, tanto en la primera como en la segunda sesión, es un primer indicador de cómo su práctica docente se modifica ante la resolución de problemas en su clase. Este análisis comparativo de la consecución de dimensiones en los dos vídeos correspondientes a las implementaciones de cada profesor permitió, en la última edición (2023), observar una mejora global en 13 de los 18 docentes que realizaron las dos grabaciones (Imagen 7).

Estos resultados fueron, a su vez, compartidos con el profesorado participante como cierre de la formación, en la última sesión presencial.

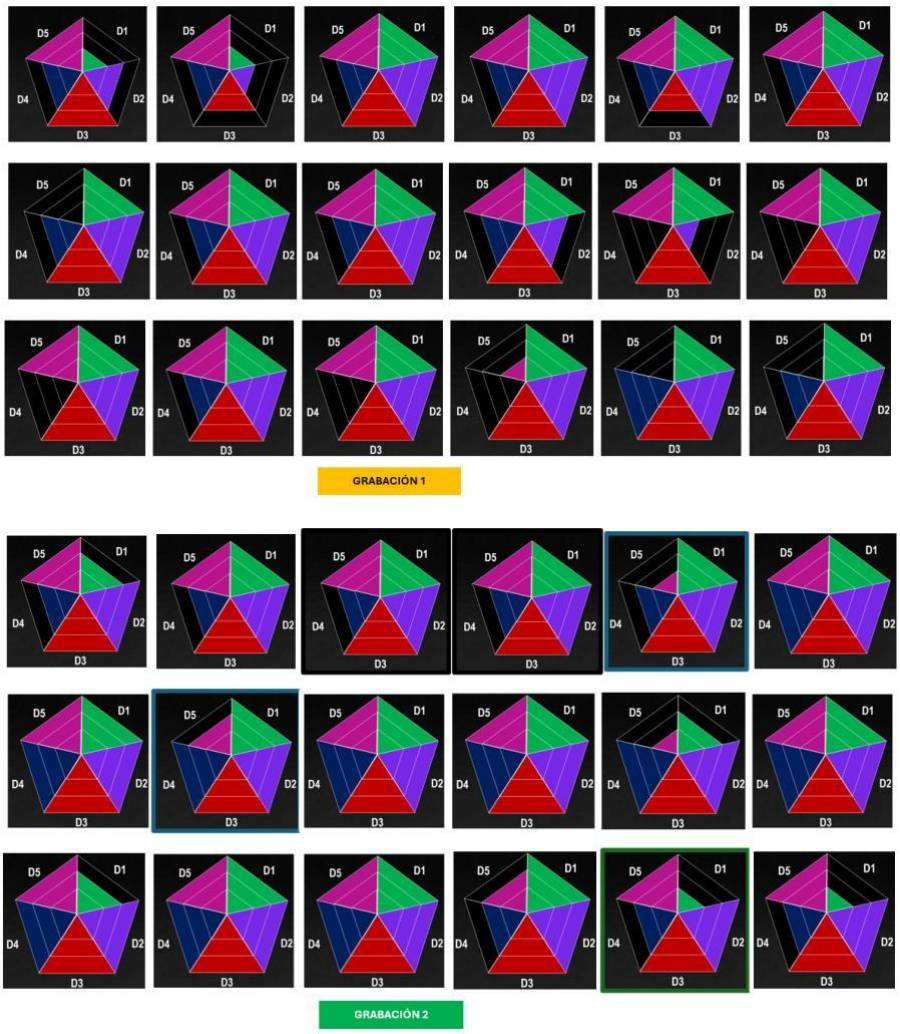


Imagen 7: Análisis comparativo de la 1ª y 2ª implementación realizada por los formadores de ProyectaMates.
Fuente: elaboración propia.

Si bien es cierto que en un principio los docentes se muestran contrarios a que se realicen grabaciones de su desarrollo en el aula, una vez se completa el ciclo formativo del proyecto los docentes manifiestan que no se han sentido juzgados:

> *[Profesora en formación]: Al profesor en ningún momento [se juzga al docente].*

En general, el profesorado en formación expresa su valoración final del curso en términos de lo que ha significado para su práctica:

> *[Profesor en formación]: Crear un nuevo problema me ha parecido una forma interesante de hacer al alumnado partícipe de la clase.*
> *[Profesora en formación] Me quedé sorprendidísima con el resultado [de aplicar la metodologia de las cuatro fases] y también he visto cómo ellos mejoran, cómo ha habido una evolución. Yo también he aprendido mucho. Además [durante el cierre matemático] crearon el nuevo problema (refiriéndose a un problema visto en la última sesión) basado en sus intereses, porque ellos son muy fans del fútbol. Entonces, los tenía a todos conectados con el tema del fútbol, porque a veces una no es consciente de que a ellos hay temas que les apasiona.*

Conclusiones

El uso del Protocolo de Observación de aula dentro de un curso de formación en resolución de problemas es una herramienta sencilla con la que el profesorado puede entrenarse y educar su mirada de cara a hacer observaciones objetivas entre iguales. Su estructura se fundamenta en diferentes dimensiones confeccionadas a partir de elementos que se estudian durante el curso de formación y que se identificarán durante la implementación de una sesión de clase.

Su uso entre el profesorado promueve un espacio de reflexión de la práctica docente. En concreto, se identifican elementos de la actividad docente que luego el propio

profesorado incorpora a su práctica y que refinan su metodología de trabajo en el aula de Matemáticas, mejorando así su ejercicio docente y ofreciendo a su alumnado mejores oportunidades de aprendizaje. Estas mejoras contemplan desde la ejemplificación de la resolución de problemas a la selección de nuevas técnicas o metodologías que el profesorado va añadiendo a su práctica en el aula.

En este trabajo se han volcado resultados sobre los cambios en la práctica de la resolución de problemas, así como diferentes ejemplos de diálogos que mantienen los profesores en formación después de analizar una secuencia de clases de resolución de problemas de matemáticas con el Protocolo de Observación con el que fueron entrenados, convirtiendo a esta herramienta en un elemento para el crecimiento profesional. Consideramos que es una estrategia de formación continua de interés para implementar en otros lugares del territorio nacional, de forma que contribuya a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Agradecimiento

Proyecto de innovación educativa ProyectaMates, financiado por el Ilustrísimo Cabildo Insular de Tenerife.

Referencias

Bostic, J., Lesseig, K., Sherman, M., Boston, M. (2021). Classroom observation and mathematics education research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24, 5-31. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09445-0

Buysse, V., Sparkman, K. L. y Weley, P. W. (2003). Community of Practice: Connecting What We Know with Whta We Do. *Exceptional Children, 69*(3), 263-277.

García-Alonso, I., García-Díaz, A. y Camacho-Machín, M. (2019). La resolución de problemas no rutinarios en el Aula de Primaria y Secundaria. Un estudio con profesores. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, pp. 323-332. SEIEM.

García Díaz, A., García-Alonso, I., y Sosa-Martín, D. (2021). Observando mi clase de Matemáticas: Protocolo de observación como estrategia de formación docente. En A. Vico-Bosch (Coord.), *Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: Perspectivas metodológicas,* pp. 621-642. Editorial Dykinson.

Geiger, V., Muir, T., & Lamb, J. (2016). Video-stimulated recall as a catalyst for teacher professional learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*, 457475.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Santagata, R. (2009). Designing video-based professional development for mathematics teachers in low-performing schools. *Journal of teacher education, 60(1)*, 38-51.

Seidel, T., Stürmer, K., Blomberg, G., Kobarg, M., & Schwindt, K. (2011). Teacher learning from analysis of videotaped classroom situations: Does it make a difference whether teachers observe their own teaching or that of others?. *Teaching and teacher education*, *27*(2), 259-267.

Van Es, E. A. (2012). Using Video to Collaborate around Problems of Practice. Teacher Education Quarterly, 39 (2), 103-116. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/23479674

Van Es, E. A. Y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and teacher education*, *24*(2), 244-276.

El método Singapur: Resolviendo problemas con el método de barras en Educación Primaria

José Luis González Fernández
Jluis.gonzalez@uclm.es
Universidad de Castilla-La Mancha

José Antonio Núñez López
JoseAntonio.Nunez@uclm.es
Universidad de Castilla-La Mancha

David Molina García
David.Molina@uclm.es
Universidad de Castilla-La Mancha

Iván Fernández Suárez
orientacion@marianistas-cr.org
Colegio Nuestra Señora del Prado

Núcleo temático: Procesos

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

El informe PISA 2022 revela que el rendimiento en matemáticas de los estudiantes españoles está en la media de la UE, pero dista mucho del sobresaliente desempeño de Singapur. Este contraste destaca la urgencia de revisar los planes educativos en España. El Método Singapur, conocido por su éxito, se centra en la comprensión matemática mediante un enfoque estructurado que prioriza la resolución de problemas en contextos relevantes. Sus principios, como el enfoque CPA y el currículo

en espiral, junto con la herramienta del modelo de barras, promueven la comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Este enfoque interactivo y participativo puede ser una solución efectiva para mejorar el aprendizaje de las matemáticas y elevar el rendimiento estudiantil en España.

Palabras clave: Matemáticas, método Singapur, modelo de barras.

1. Introducción

Aunque los resultados en el área de matemáticas obtenidos por los estudiantes españoles en las principales evaluaciones internacionales se sitúan en la media obtenida por lo países de la UE, tienen un alto margen de mejora si los comparamos con los obtenidos por los estudiantes de Singapur.

En el último informe PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes) publicado en el año 2022, que estudia el rendimiento del alumnado de entre 15 y 16 años, participaron 37 países de la OCDE y 43 asociados. España obtuvo 473 puntos, frente a los 474 de la UE y muy lejos de los logrados por Singapur, que se sitúa a la cabeza de dicho estudio con 575 puntos (Imagen 1).

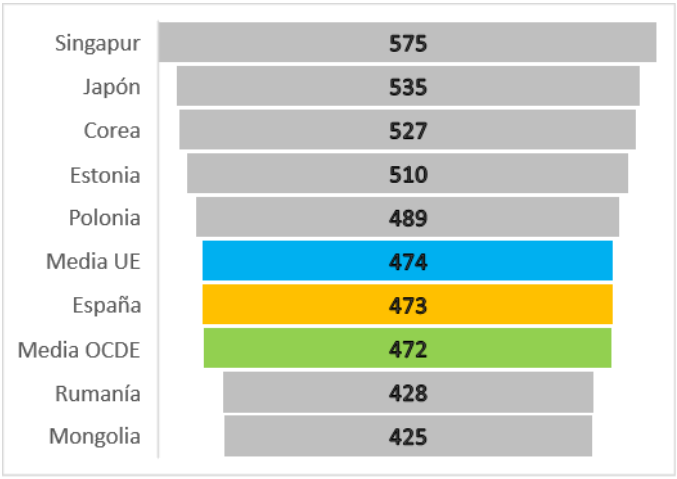


Imagen 1. Resultados del estudio PISA 2022

Por otra parte, el informe TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) del año 2019 dirigido a estudiantes de 4º de Educación Primaria ratifican esa tendencia como se aprecia en la Imagen 2.

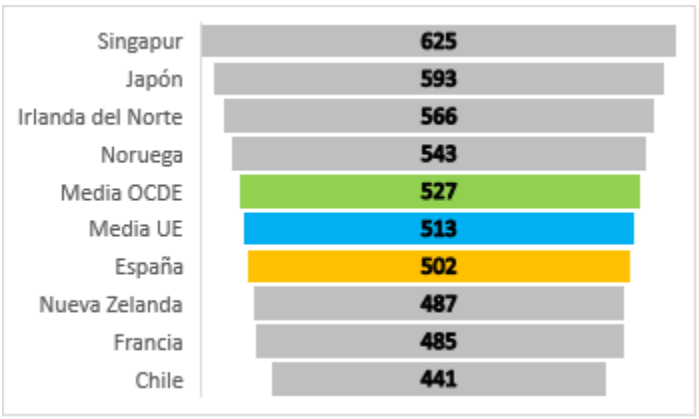


Imagen 2. Resultados del estudio TIMSS 2019

El análisis de los datos anteriores revela dos aspectos cruciales: por un lado, destaca el sobresaliente desempeño que Singapur ha alcanzado gracias a la reforma en la enseñanza de las matemáticas y, por otro lado, evidencia la urgencia de países como España de realizar una revisión exhaustiva de sus planes educativos con el fin de elevar el rendimiento de sus estudiantes (Zapatera, 2020).

Una posibilidad podría ser adaptar, al menos en parte, la metodología empleada por Singapur. Es el camino seguido por países como Sudáfrica, Brunei y Holanda, quienes ya están incorporando libros de texto inspirados en el método singapurense. Esta práctica fue implementada hace cinco años en Tailandia y Libia, y actualmente es seguida por alrededor de tres mil escuelas en Estados Unidos. En Australia, una iniciativa piloto que comenzó en tres colegios se ha expandido a cincuenta, mientras que, en India, 85 instituciones educativas están utilizando esta metodología. El modelo se ha extendido a un total de 42 naciones, incluyendo Chile.

2. Método Singapur

De acuerdo con el Ministerio de Educación de Singapur en 2012, el objetivo primordial del plan de estudios de matemáticas es garantizar que todos los estudiantes alcancen un nivel de competencia que les sea útil en la vida diaria. Por lo tanto, los objetivos generales de la educación matemática en Singapur se centran en permitir que los estudiantes (Espinoza et al., 2016):

- Adquieran y apliquen conceptos y destrezas matemáticas.
- Desarrollen habilidades cognitivas y metacognitivas mediante el enfoque en la resolución de problemas matemáticos.
- Cultiven actitudes positivas hacia las matemáticas.

El Método Singapur busca alcanzar los objetivos anteriores mediante un enfoque estructurado que abarca el desarrollo de conceptos, habilidades matemáticas, procesos cognitivos y actitudes necesarias para el aprendizaje (Imagen 3). Su eje central es la resolución de problemas en contextos significativos.

Imagen 3. Currículo de matemáticas (Ministerio de Educación de Singapur, 2012)

Cuatro son los pilares que sustentan el método Singapur:

1) Enfoque concreto-pictórico-abstracto (C-P-A)
2) El currículo en espiral
3) La variación sistemática
4) La comprensión relacional

Mediante el enfoque CPA (basado en la teoría de Bruner), los estudiantes adquieren sus conocimientos atravesando tres niveles, graduados en base a su dificultad: concreto, pictórico y abstracto. En el nivel concreto, se utilizan materiales manipulativos (bloques, fichas, cubos, etc.) que sirvan como elementos motivadores.

En el nivel pictórico se avanza construyendo una representación gráfica del concepto estudiado, que sirva de ayuda para la comprensión de este. Por último, en el nivel abstracto se termina el proceso de compresión mediante la representación del concepto trabajado, utilizando símbolos o signos matemáticos. En la Imagen 4 se puede observar el enfoque CPA para la descomposición del número 5.

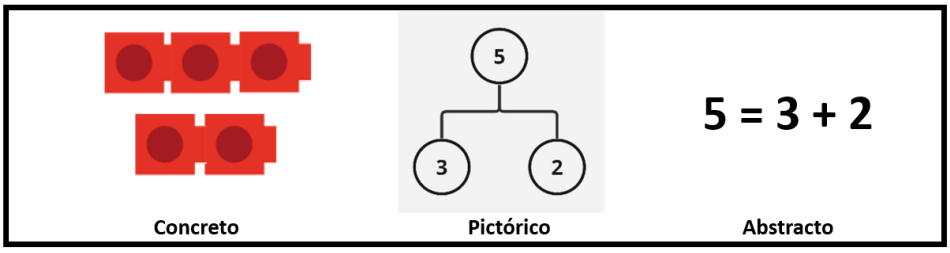


Imagen 4. Ejemplo de CPA

El currículo en espiral permite trabajar de forma periódica los mismos contenidos, no solo durante el mismo curso sino también en cursos sucesivos. Es decir, “se trabajan los conceptos a distintos niveles y adaptados a las posibilidades de los estudiantes: se introduce un concepto y se trabaja con él varias veces durante el mismo año y en años posteriores, aumentando gradualmente su complejidad y abstracción” (Zapatera, 2020, p.266). Esta forma de trabajo permite reforzar y afianzar los contenidos sobre los que se van sosteniendo los nuevos, por eso se logra un aprendizaje significativo sin llegar a saturar al alumno con demasiados conceptos (Gonzáles, 2015).

Con la variación sistemática de Dienes (1978), fundamentada en las teorías de Piaget y Bruner, se logra presentar un mismo concepto de diferentes formas y con diversos niveles de dificultad y abstracción. Este enfoque permite al estudiante interiorizar dicho concepto de la forma que más le interese. La Imagen 5 muestra un ejemplo en el que se recogen diversas formas de introducir el número 11.

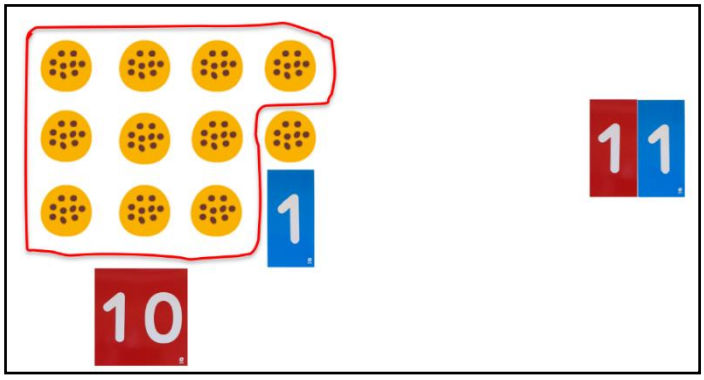


Imagen 5. Variación sistemática

Otro investigador que contribuyó significativamente a esta metodología fue Richard Skemp (Arias-Huerta et al., 2017), quien exploró la distinción entre comprensión relacional (saber qué) y comprensión instrumental (saber cómo). De hecho, la enseñanza tradicional ha tendido a enfocarse en esta última, fomentando la memorización y el uso de fórmulas, mientras que el enfoque metodológico de Singapur se centra en la comprensión instrumental, donde los estudiantes desarrollan habilidades de pensamiento lógico-matemático para dar solución a problemas de su propio entorno.

3. El modelo de barras

Como se ha mencionado previamente, el currículo de Singapur se centra en la resolución de problemas, y para ello, utiliza cinco elementos esenciales: conceptos, procesos, metacognición, actitudes y habilidades (Imagen 3).

La resolución de problemas se lleva a cabo a partir de situaciones de la vida cotidiana, planteando desafíos que requieren que los estudiantes formulen preguntas, contrasten hipótesis y descubran los conceptos matemáticos subyacentes en cada situación. Este enfoque prioriza la comprensión y explicación del proceso frente a la obtención del resultado final, lo que motiva a los alumnos a abordar los problemas de manera variada, proporcionando múltiples estrategias, herramientas y enfoques para hacerlo. Con esto se evita la formación de hábitos mecánicos que asocian automáticamente un problema con un algoritmo específico.

Una de las herramientas distintivas de este enfoque, en contraste con otros métodos de enseñanza, es el conocido "modelo de barras". Este modelo contribuye a mejorar la capacidad de abstracción al desarrollar la visualización y permite una comprensión más profunda del significado de las operaciones matemáticas.

La clave del “modelo de barras” es que se centra en el dibujo de barras/rectángulos, que representan las cantidades involucradas en el problema, y en el etiquetado de dichas barras. Es importante escribir los datos o valores en cada barra (o parte de ella) y poner un signo de interrogación en aquellos que sean desconocidos. Esta representación gráfica facilita la comprensión del problema que se debe resolver. Según Ho y Lowrie (2014) dibujar diagramas representando las relaciones entre cantidades ayuda en el entendimiento y la resolución de problemas.

Para explicar el modelo de barras (Cabo et al., 2007), se deben llevar a cabo una serie de pasos, basados en la teoría de Polya:

- Leer con atención el problema completo.
- Identificar los sujetos del problema.
- Dibujar una barra unida para cada uno de ellos.
- Leer el problema de nuevo, haciendo paradas en cada dato numérico del enunciado. Etiquetar las “barras-unidad” con los datos suministrados por el enunciado.
- Identificar la cantidad desconocida que constituye la pregunta del problema y etiquetarla.
- Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.
- Redactar la solución del problema con una oración completa.

En cuanto a los tipos de problemas en los que se puede aplicar, en este documento nos centraremos en los tres más importantes: todo-parte, comparación y antes-después o cambio.

3.1. Todo-parte

Este primer tipo se utiliza para representar situaciones en las que existe un total y varias partes que componen ese total. Lo que debe hacer el alumno es representar los datos conocidos en barras consecutivas, formando una barra más grande que representa el total. Así, dependiendo del tipo de enunciado, podemos tener dos tipos básicos de representación de problemas. Estos vienen reflejados en la Imagen 6.

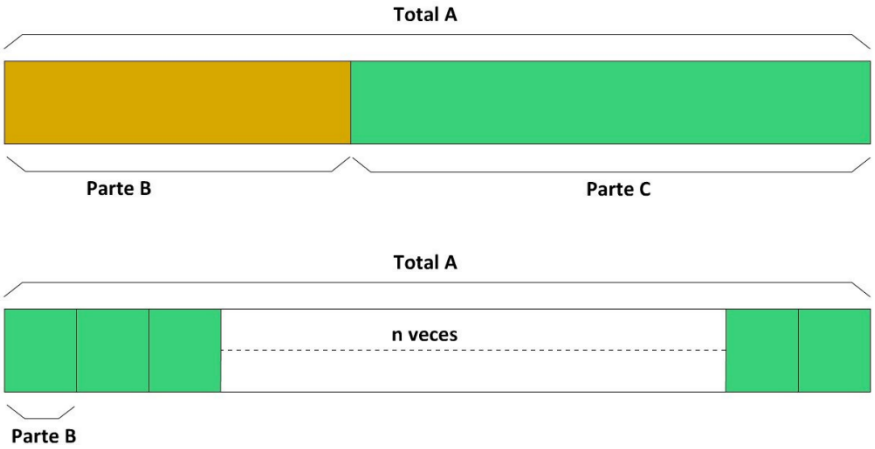


Imagen 6. Modelo todo-parte

La primera de las tipologías (barra superior de la Imagen 6) corresponde a un problema en el que hay tres cantidades involucradas dos de ellas son las partes y la tercera es el total. Las operaciones necesarias para resolver el problema serán sumas o restas.

En función de lo que pida el enunciado, el alumno puede o no conocer la operación que debe realizar, ya que pueden darse diferentes situaciones:

$A = B+C$ $B = A – C$ $C = A – B$

En cuanto al segundo tipo (barra inferior de la Imagen 6) será necesario, para su resolución, el uso de multiplicaciones y divisiones. Lo más habitual es que en el enunciado se indique que una cantidad es “n” veces otra. Nuevamente, en función del valor pedido en el enunciado, las operaciones serán las siguientes:

$A = n \times B$ $B = A / n$ $n = A / B.$

3.1.1. Ejemplo

Un zoo ha recibido hoy 300 visitantes, de los cuales una cuarta parte han sido adultos y el resto niños. El precio por adulto es de 3€, mientras que cada niño paga 1€. ¿Cuál ha sido la recaudación del día?

En este enunciado, se habla de una cantidad total (número de visitantes del zoo) que se descompone en dos partes (adultos y niños).

El modelo de barras se puede aplicar de la siguiente forma:

1º Se dibuja una barra para representar el total de visitantes, poniendo los datos que se conocen (etiquetándola).

2º Se divide la barra en cuatro partes, pues una de ellas corresponde a los adultos y tres a los niños (Imagen 7).

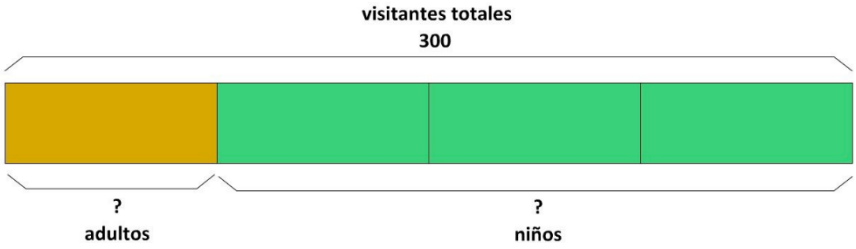


Imagen 7. Ejemplo de un problema todo-parte

3º ¿Cómo puede resolver el alumno el problema con la ayuda de los gráficos?

- La barra completa es el número de visitantes totales.
- Para saber el número de adultos debe dividir 300 entre 4.
- En cuanto a los niños que visitaron el zoo, se puede obtener multiplicando por 3 el número de adultos (También se puede restar a 300 el número de adultos).
- Por último, una vez que se sabe el número de adultos y de niños, multiplicando y sumando se puede obtener la recaudación diaria.

3.2. Comparación

Se aplica a problemas en los que la mejor estrategia consiste en comparar dos situaciones distintas. Para cada una de dichas situaciones, el alumno debe dibujar

una barra, de modo que obtendrá dos barras alineadas con longitudes diferentes (se conoce una de las barras y su relación con la otra).

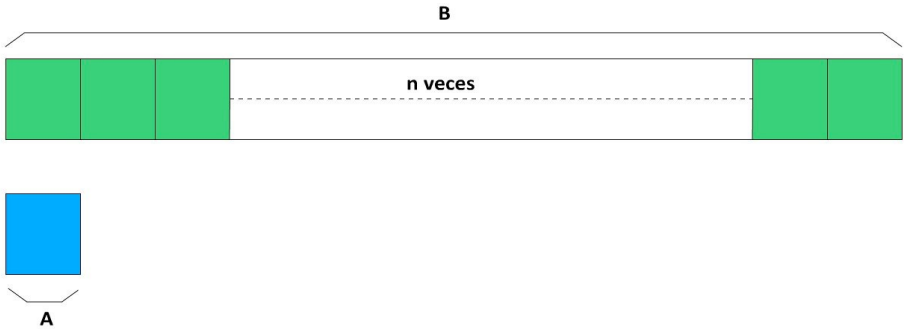


Imagen 8. Modelo de comparación

Como en el modelo todo-parte, es muy importante colocar correctamente los datos numéricos (etiquetar) en las barras dibujadas. Pueden resolverse con sumas, restas, multiplicaciones o divisiones en función de los datos proporcionados y el dato que no conocemos.

3.2.1. Ejemplo

Luis tiene 15 canicas y Juan tiene 27. ¿Cuántas canicas más tiene Juan que Luis?

En este problema aparecen dos cantidades (número de canicas de Luis y número de canicas de Juan).

Para trabajar con el modelo de barras, se puede proceder de la siguiente forma:

1º Dibujar una barra para representar las canicas que posee Luis, poniendo su cantidad (etiquetándola).

2º Dibujar otra barra, debajo y alineada con la anterior, para representar las canicas que posee Juan, poniendo su cantidad (etiquetándola).

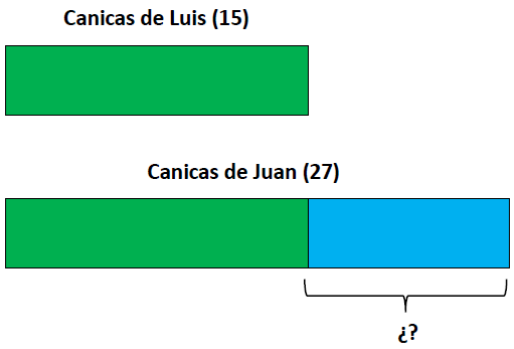


Imagen 9. Ejemplo de un problema de comparación

3º ¿Cómo puede resolver el alumno el problema con la ayuda de los gráficos?

- Restando la cantidad de canicas de Luis a la de Juan.
- Otra posibilidad sería buscar un número que sumado a la cantidad de canicas de Luis nos de las que tiene Juan

3.3. Antes-después o cambio

Este último tipo se usa cuando la situación a la que se refiere el problema implica un estado anterior y uno posterior, dándose algunos datos de ambos. Para enunciados simples, el modelo no tiene ninguna diferencia con el modelo de comparación o incluso con el todo-parte.

El alumnado debe aprender a trasladar una barra a la otra. Esta acción puede realizarse de forma física, cortando y moviendo tiras de papel de colores.

3.3.1. Ejemplo

Andrés tiene 124 canicas y Begoña tiene 473. Begoña le da algunas de sus canicas a Andrés, de forma que ahora Andrés tiene el doble de canicas que Begoña. ¿Cuántas canicas ha dado Begoña a Andrés? ¿Cuántas canicas tiene ahora Andrés?

El alumno debe identificar que se trata de un problema en el que, para resolverlo, debe aplicar el modelo antes-después porque el anunciado presenta dos situaciones separadas en el tiempo y nos da algunos datos para cada una de ellas.

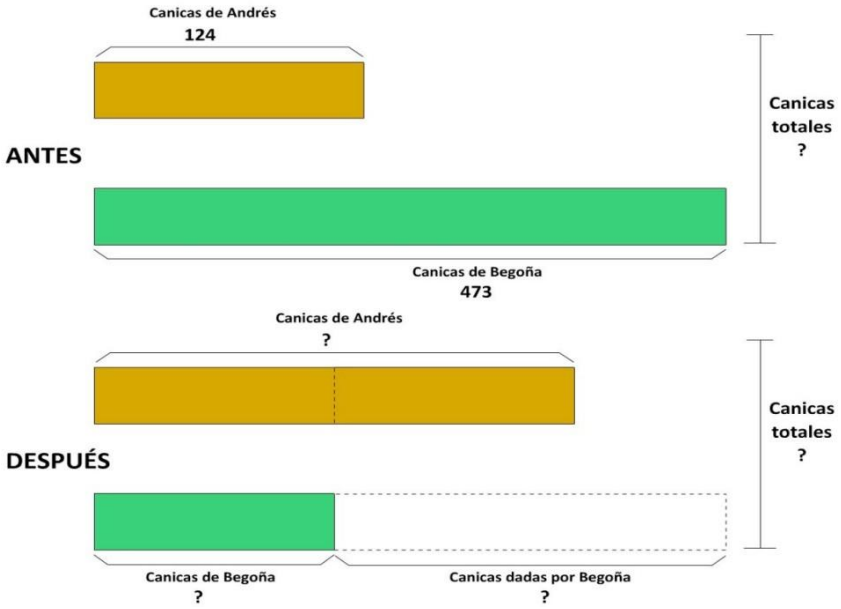


Imagen 10. Ejemplo de un problema antes-después

Empezamos representando dos juegos de barras, uno para la situación “antes” en la que Andrés tiene menos canicas que Begoña (parte superior de la Imagen 10) y otro para la situación “después” en la que Andrés tiene el doble de canicas que Begoña (parte inferior de la Imagen 10).

Así pues, de la situación “antes”, aplicando el modelo de comparación, obtenemos la cantidad total de canicas. Esta cantidad es idéntica al número de canicas en la situación “después” (pues en ningún momento se pierden o se dan canicas a terceras personas).

Este dato y la aplicación del modelo de comparación para la situación “después” nos permitirá conocer la cantidad final de canicas de ambos. Es decir, el número total de canicas que tienen entre Andrés y Begoña es 124 + 473 = 597. Como solo intercambian canicas entre ellos, al final siguen teniendo la misma cantidad.

Si observamos las partes coloreadas de la situación “después”, se pueden observar dos aspectos importantes: hay tres y son exactamente iguales, lo que nos lleva a que cada una de las partes estará formada por 199 canicas (597:3).

Utilizando los resultados anteriores, podemos concluir que la cantidad final de canicas de Andrés es 199 x 2 = 398 y que Begoña ha dado 274 canicas a Andrés (473 – 199).

Es importante hacer notar que es difícil representar fielmente las barras de acuerdo con los datos y resultados. Cheong (2002) afirma que, aunque efectivamente la solución puede no verse alterada, las proporciones entre las barras tienen que respetarse para que se puedan obtener deducciones válidas entre las partes conocidas y las desconocidas. En cualquier caso, una estrategia de ensayo y error es siempre aceptable para representar correctamente el problema.

4. Conclusiones

Como se desprende de lo presentado en este trabajo, la utilización del modelo de barras, herramienta del método Singapur, promueve el desarrollo integral del estudiante al fomentar competencias clave como el pensamiento crítico, la colaboración y la capacidad de aprender de forma autónoma. A través de este método, los alumnos no solo resuelven problemas, sino que también explican y discuten sus soluciones con el grupo, lo que fortalece su capacidad de comunicación y adquisición de conceptos. Además, la representación gráfica de los problemas matemáticos facilita la comprensión y el aprendizaje de esta materia.

Por otro lado, este enfoque requiere que los docentes adopten un papel de facilitadores en el aula, estimulando la creatividad y la participación activa de los estudiantes. El maestro guía el proceso de aprendizaje, planteando preguntas desafiantes y proporcionando apoyo cuando sea necesario, en lugar de simplemente ofrecer respuestas correctas. Además, el currículo se adapta de manera flexible, permitiendo ajustes graduales y aumentando la complejidad a medida que los alumnos avanzan, lo que contribuye a mantener su interés y motivación.

En resumen, el modelo de barras promueve un enfoque interactivo y participativo en el aula, donde tanto estudiantes como docentes trabajan juntos para construir conocimiento y desarrollar habilidades fundamentales para la vida.

Referencias

Arias-Huerta, T., Arrunátegui, C., Julca, L., y Zúñig, K. (2017). *Mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje de las competencias matemáticas tempranas mediante la aplicación del método de Singapur, las clases eurítmicas y los grupos interactivos en los niños y niñas de 4 años del aula "tulipanes" de la institución educativa* (Tesis de licenciatura). Universidad Pedagógico Nacional Monterrico. Lima, Perú.

Cabo, M., Moreno, G., y Bazán, A. (2007). *Método gráfico de Singapur: Solución de problemas*. Editorial Santillana. Madrid.

Cheong, Y. K. (2002). The model method in Singapore. *The Mathematics Educator*, vol. 6, nº. 2, 47-64.

Dienes, Z. (1978). *La matemática moderna en la enseñanza primaria.* Editorial Teide. Barcelona.

Espinoza, L., Matus, C., Barbe, J., Fuentes, J. y Márquez, F. (2016). Qué y cuánto aprenden los estudiantes de básica con el método Singapur: evaluación de impacto y de factores incidentes en el aprendizaje, enfatizando en la brecha de género. *Calidad en la Educación,* nº. 45, 90-131.

Gonzáles, L. (2015). *Efecto del método Singapur en el desarrollo de competencias matemáticas para niños de 3º de básica primaria.* (tesis de maestría) Universidad de la Costa CUC. Barranquilla, Colombia. *https://doi.org/10.1145/3132847.3132886*

Ho, S. Y. y Lowrie, T. (2014). The model method: Students' performance and its effectiveness. *The Journal of Mathematical Behavior*, nº. 35, 87-100.

PISA (2022). Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes.

TIMSS (2019). Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Zapatera, A. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las Matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *INFAD: Revista de Psicología,* nº. 2, 263-274.

El potencial del juego en la LOMLOE, una experiencia basada en el juego del DOGGY BAG

José M. Maimó Oliver

josemiguelmaimo@gmail.com

CEIP Ses Rotes Velles (Calvià, Baleares, España)

Luis Cros Lombarte

lluis.cros@sarria.epiaedu.cat

Escola Pia Sarrià (Barcelona, España)

Jordi Deulofeu Piquet

jordi.deulofeu@uab.cat

Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra (Cerdanyola del Vallès, España)

Helena Garví Casas

hgarvi@xtec.cat

Institut Pau Casals (Badalona, España)

Núcleo temático: recursos para el aula, procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

En la actualidad, con la presente ley educativa la cual contempla que los estudiantes no solo adquieran conocimientos, sino que también desarrollen habilidades y competencias de manera significativa, los juegos de mesa ofrecen una experiencia

de aprendizaje activa y participativa. Al promover la resolución de problemas, la toma de decisiones y el pensamiento crítico, los juegos de mesa estimulan el aprendizaje de una forma vivencial y ayudan al alumnado a construir sus propios conocimientos, aspectos fundamentales en el enfoque pedagógico contemplado en la LOMLOE. El objetivo de la presente comunicación es ofrecer una experiencia de aula basada en un juego de mesa (Doggy Bag), mostrando de qué forma se ha aplicado en el aula, atendiendo a la curva de aprendizaje del juego, la atención a la diversidad y la evaluación.

Palabras clave: ABJ, metacognición, lógica, aprendizaje significativo, DUA.

1. ¿Por qué juegos de mesa?

Tradicionalmente, una parte del alumnado, influido por experiencias de aprendizaje de las matemáticas traumáticas y por lo que perciben en casa y en la sociedad, afrontan el aprendizaje de las matemáticas con ciertas reticencias y se ponen barreras que dificultan, tanto su aprendizaje como su disfrute.

Como docentes y amantes de esta hermosa ciencia, tenemos la obligación de darle la vuelta a esta percepción, romper esas barreras y cambiar la creencia injustificada de que las matemáticas son difíciles y aburridas. Tenemos que contribuir a generar emociones positivas.

Hoy en día disponemos de muchos recursos y múltiples metodologías para conseguir una disposición socioemocional positiva a través de la que, según diversos estudios pedagógicos, se facilita el aprendizaje que además es un aprendizaje significativo. Nosotros hemos escogido los juegos de mesa como recurso pedagógico

Desde *SET, grup de jocs d'ABEAM*, apostamos por el juego de mesa contemporáneo como recurso pedagógico y por el Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ) como metodología. Porque, en la práctica de un juego, encontramos muchas cosas: diversión, ilusión, relación social, comunicación, reto intelectual, ganas de mejorar, competición, negociación, colaboración, trabajo en equipo, imaginación, creatividad,

habilidades mentales y manuales, interpretación, memoria, resolución de problemas, toma de decisiones, conocimientos, competencias, seducción e incluso pequeños engaños-cambio de roll. En resumen, diversión y aprendizaje.

La diversión y el carácter lúdico del juego està fuera de toda duda. Pero además de divertirse, cuando uno juega, muestra sus capacidades y su manera de ser en aspectos cognitivos, emocionales, sociales y de comportamiento, a partir de las decisiones que toma (diferentes maneras de jugar): si es arriesgado o conservador, competitivo o colaborador, negociador o intransigente, empático o individualista. Porque un juego es, casi siempre, una simulación, más o menos próxima, de una situación de la vida o del mundo en el que vivimos. En definitiva, jugando se aprende a vivir, a convivir y a compartir. Los jugadores son los actores principales: sin ellos nada tiene sentido y con ellos la práctica de un juego puede convertirse en una actividad relevante, fuente de placer y de aprendizajes significativos, tanto desde el punto de vista de los que lo juegan como desde aquello que queremos que aprendan.

Además de este aprendizaje social, personal, también se produce un aprendizaje significativo del contenido matemático, todos los juegos se pueden relacionar con alguno de los bloques del currículum de matemáticas: el numérico (especialmente sentido numérico y cálculo), el geométrico (sentido geométrico, relación 3D-2D), el probabilístico (idea de azar, sucesos, equiprobabilidad, y también con la medida (percepción, estimación y medida efectiva de diferentes magnitudes) o con el bloque de relaciones y cambios (identificación de patrones, generalización, tipo de cambios), en muchas ocasiones incluso con más de uno. Por otra parte, entender las normas de un juego, aplicarlas correctamente y establecer una estrategia ganadora, tiene una enorme similitud al procedimiento que se sigue para la resolución de problemas, con lo que jugar a juegos de mesa ayuda a mejorar como afrontamos la resolución de problemas.

En esta comunicación se presentará una experiencia exitosa de utilización del juego en el aula como herramienta pedagógica, empezando por su preparación hasta el retorno realizado al acabar de jugar.

Programación de juegos

Para poder contextualizar la experiencia basada en el juego Doggy Bag (editorial GDM Games) se expondrá la programación que llevo a cabo para trabajar diferentes contenidos del área de matemáticas a través de juegos de mesa, siguiendo la metodología de *Aprendizaje Basado en Juegos*.

Se trata de una programación estructurada en tres cursos (de 4º a 6º de Educación Primaria), en la cual se organizan los diferentes juegos teniendo en cuenta el momento de su aplicación (curso y trimestre) y el bloque al que hace referencia, entre los cuales encontramos:

- Numeración y cálculo.
- Espacio y forma.
- Resolución de problemas / Estrategia.
- Estadística y azar.
- Razonamiento lógico.

De esta forma, además de conocer el juego de Doggy Bag, se mostrarán una gran variedad de juegos que de la misma forma se podrían aplicar en el aula.

Experiencia basada en el juego Doggy Bag

Introducción

Antes de dar a conocer la experiencia llevada a cabo es importante dar algunas pinceladas sobre el mismo juego, sus componentes y sus mecánicas. Se trata de un juego de gestión de recursos en el que los jugadores asumen el papel de perros hambrientos tratando de recolectar la mayor cantidad de huesos posibles.

Encontramos huesos de diferentes colores atendido a sus respectivos puntos, se van introduciendo los huesos dentro de una bolsa de tela y cada jugador apuesta cuantos huesos cree que será capaz de sacar de la bolsa sin que el hueso sea negro (es el color que se tiene que evitar, con tres negros estás eliminado de la partida).

Siguiendo estas mecánicas se van jugando las rondas necesarias hasta que se de el caso de que ya no se pueden introducir más huesos dentro de la bolsa, factor que provoca el final de la partida y el contaje de puntos.

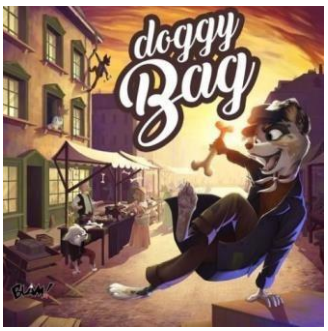


Imagen 1. El juego de Doggy Bag

Elementos curriculares

Este apartado está estrechamente relacionado con el de evaluación. Mientras que en la evaluación me centraré en los instrumentos y momentos a tener en cuenta para evaluar al alumnado, en el presente apartado se centra la atención en el qué se evalúa, es decir, en los criterios de evaluación.

Tal y como se ha explicado en el resumen, los criterios de evaluación de la LOMLOE se centran en procedimientos y habilidades, hecho que facilita la aplicación de determinados juegos de mesa en el aula, los cuales permiten evaluar una gran cantidad de criterios del área de Matemáticas.

Los criterios que se evalúan con el juego son los siguientes:

- Seleccionar entre diferentes estrategias para resolver un problema, justificando la elección.

- Obtener posibles soluciones de un problema seleccionando entre diversas estrategias conocidas de manera autónoma.

- Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado.

- Autorregular las emociones propias y reconocer algunas fortalezas y debilidades, desarrollando así la autoconfianza en afrontar retos matemáticos.

Aplicación

En la aplicación del juego en el aula hay que tener en cuenta una gran variedad de factores: presentación del juego, organización del grupo-clase, desarrollo y estructura de las sesiones, actividades intermedias, materiales principales y valoración final del juego.

Presentación del juego

Es uno de los momentos más importantes de la aplicación de un juego en el aula ya que como docentes hay que conseguir que en el primer momento que se pongan a jugar ya sepan jugar.

Con saber jugar se refiere al conocimiento de las reglas del juego y de sus mecánicas, no a que sepan jugar aplicando una determinada estrategia. El primer paso es el conocimiento de las reglas del juego, que sepan lo que tienen que hacer durante una partida de Doggy Bag.

Es esencial realizar diferentes actividades previas para asegurarse el mayor conocimiento del juego posible. Entre estas actividades se visualizan diferentes videos tutoriales, trabajando de esta forma aspectos de otras áreas curriculares, como podría ser la comprensión oral. También se leen las instrucciones del juego (texto instructivo) e incluso se puede organizar una partida previa para ver hasta que punto dominan el juego.

Por último, también se puede preparar una batería de preguntas sobre las reglas del juego y sus mecánicas. Todo este conjunto de dinámicas o actividades planteadas tiene como objetivo que el alumnado en la primera sesión de la experiencia ya tenga un dominio básico del juego y se pueda “enfrentar” a las preguntas que se le planteen.

Organización del grupo-clase

En el momento que se explica la programación de juegos también se comentaría que en cada trimestre se aplican tres juegos de mesa diferentes. Este detalle es importante tenerlo en cuenta para comprender la organización del grupo-clase.

Se organiza el grupo-clase en tres grupos (grupo A, B y C). Son grupos totalmente heterogéneos, en los que encontramos diferentes niveles de aprendizaje. Al ser grupos heterogéneos el alumnado se va ayudando a lo largo del proceso.

Se organizan tres estaciones, en cada estación se juega a uno de los tres juegos. Cada semana los grupos van rotando, así van pasando por todos los juegos. A lo largo del trimestre se producen nueve rotaciones, consiguiendo de esta forma que cada grupo haya jugado tres veces a cada juego.

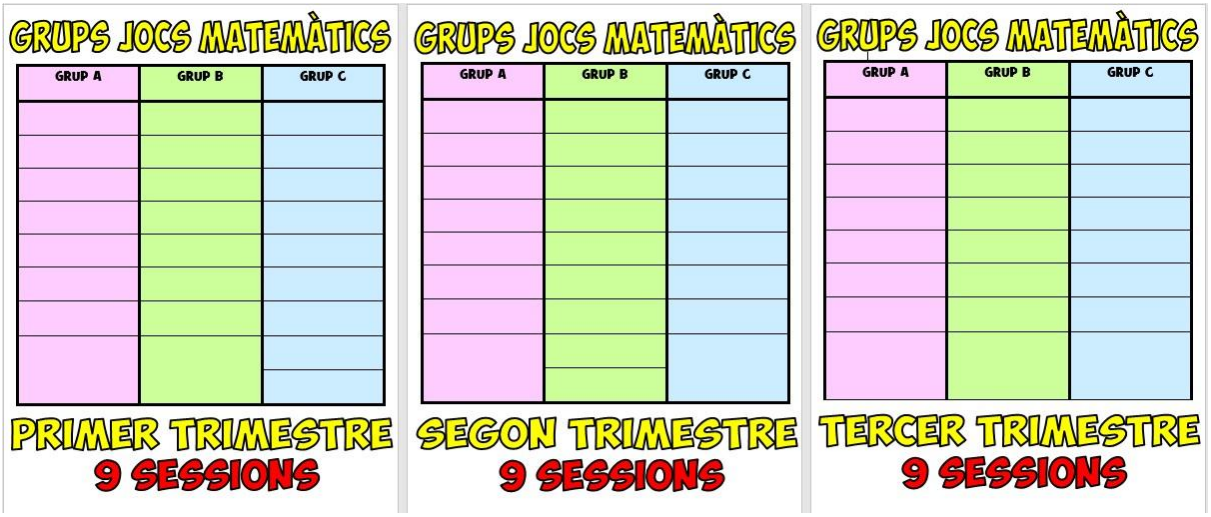


Imagen 2. Organización de los grupos

Desarrollo y estructura de las sesiones

El desarrollo de la sesión tiene una duración de 75 minutos, de los cuales 60 minutos están destinados a que jueguen y los 15 minutos restantes a preparar y recoger el material junto a una actividad final de reflexión de la sesión (exit ticket).

La experiencia lúdica está estructurada en tres fases diferenciadas, ya que cada fase tiene un objetivo en específico. En la fase 1 el alumnado juega por primera vez, en la

fase 2 por segunda vez y en la fase 3 por tercera y última vez. A continuación, se explican los objetivos de cada fase:

- Fase 1, fase de ANÁLISIS: se pretende que el alumnado comprenda las mecánicas del juego y como afrontar una partida con la menor ayuda posible. También se contempla la parte emocional, las sensaciones que han tenido a la hora de jugar.

- Fase 2, fase de PRUEBA o CAMBIO: se trabaja el plan de resolución, probar diferentes estrategias, corregir sus propias estrategias o también reajustarlas para poderlas optimizar.

- Fase 3, fase de COMPROBACIÓN: se trata de la fase final de reflexión sobre las diferentes estrategias puestas en práctica y su respectiva valoración, análisis de cual sería la estrategia ganadora y reflexión sobre como han ido evolucionando a lo largo de las tres sesiones.

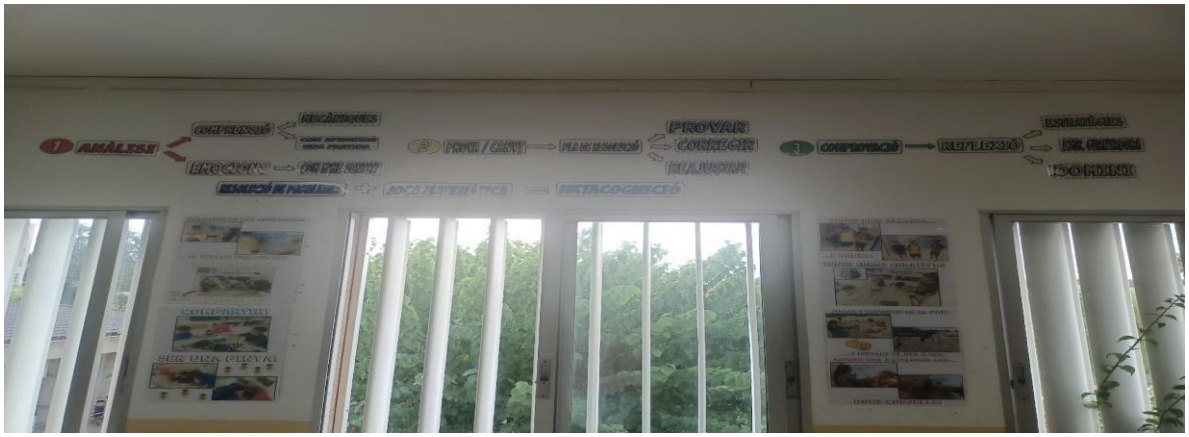


Imagen 3. Esquema del aula sobre las fases

Estas fases además de estar relacionadas con la curva del aprendizaje están totalmente conectadas con las preguntas de metacognición que se plantean al final de cada una de ellas.

Una vez han jugado al juego tienen que contestar en el cuaderno a una serie de preguntas que les planteo a partir del juego. Estas preguntas son esenciales para que el alumnado pueda evolucionar a lo largo de la experiencia y sea consciente de

como juega, lo pueda valorar, corrija sus propios errores (ensayo-error), pruebe diferentes formas de jugar (o estrategias), las analice y las reajuste a sus necesidades o criterios propios. A todo esto se le llama METACOGNICIÓN, pensar o valorar los propios procesos mentales, reflexionar sobre el propio pensamiento (Competencia de aprender a aprender).

Por último, anteriormente he explicado que al finalizar la sesión se hace una reflexión final de la sesión. El objetivo de esta actividad no es otro que el de acabar la sesión de una forma reflexiva. Se plantean preguntas en diferentes formatos (paddlet, exit tickets impresos…) teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

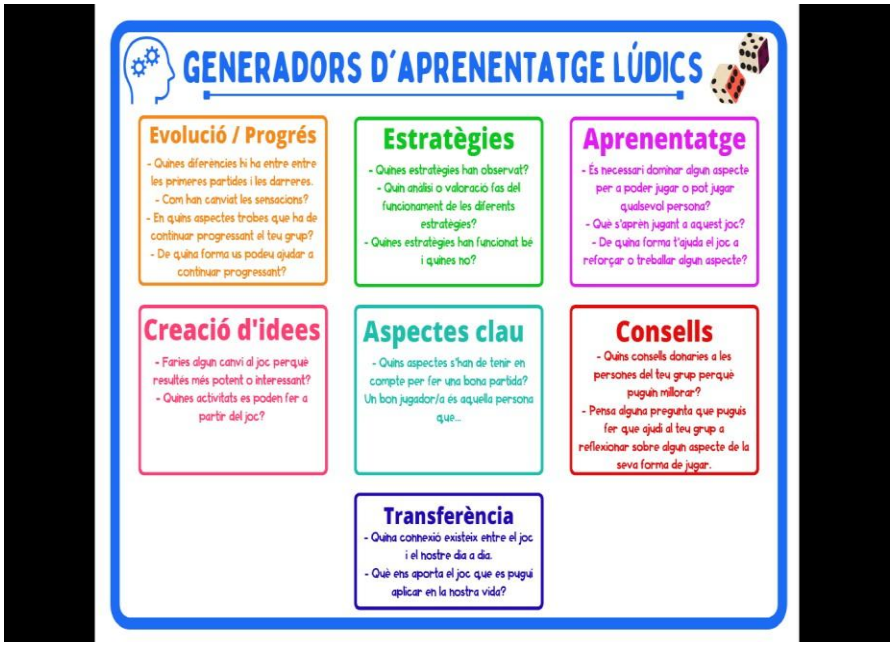


Imagen 4. Generadores de aprendizaje lúdicos

Actividades intermedias

Además de las actividades de metacognición que se realizan al final cada fase siempre se organiza una sesión intermedia (normalmente al finalizar la primera fase) en la cual se ponen en común algunos de los aspectos clave trabajados en las mismas preguntas de metacognición.

Se trata de hacer un primer análisis del juego en gran grupo, haciendo participar al alumnado. Son sesiones muy activas en las que la participación del alumnado es

clave para ir desarrollando y construyendo los diferentes objetivos que se han planteado con el juego. También es una manera de que los alumnos que hayan tenido más dificultades después de jugar el primer día entiendan mejor el juego o las claves para hacer una buena partida.

En este sentido, preparo una presentación para ir desarrollando los diferentes contenidos de la sesión. El alumnado va recogiendo las conclusiones en su cuaderno, las cuales les servirán para futuras fases del juego.

Imagen 5. Portada de la presentación llevada a cabo después de la primera fase

Materiales principales

Además del material principal, el propio juego, suelo diseñar materiales de apoyo para que los puedan consultar durante la partida. Normalmente estos materiales son muy visuales y recogen las mecánicas principales del juego, es decir, los movimientos que tienen que hacer en su respectivo turno.

Es una forma de atender a la diversidad del aula y ayudarles a que puedan jugar de una forma más autónoma. Concretamente, en el juego de Doggy Bag, el material que se les pone encima de la mesa corresponde a las tres fases del juego: tirar las monedas e introducir los huesos en la bolsa, fase de apuestas (más respectivos efectos) y fase de robo. También tienen una explicación de los diferentes roles, por si no entienden las propias fichas del juego.

Imagen 6. Material de consulta durante la partida

Valoración final del juego

Una vez finalizada la experiencia lúdica se organiza una sesión final a modo de cierre, en la cual se valoran diferentes aspectos: si ha gustado el juego (nivel de satisfacción), aprendizajes nuevos, como han progresado, aspectos que destacarían y aspectos de mejora.

A través de “Mentimeter” se plantean las diferentes preguntas y las van valorando.

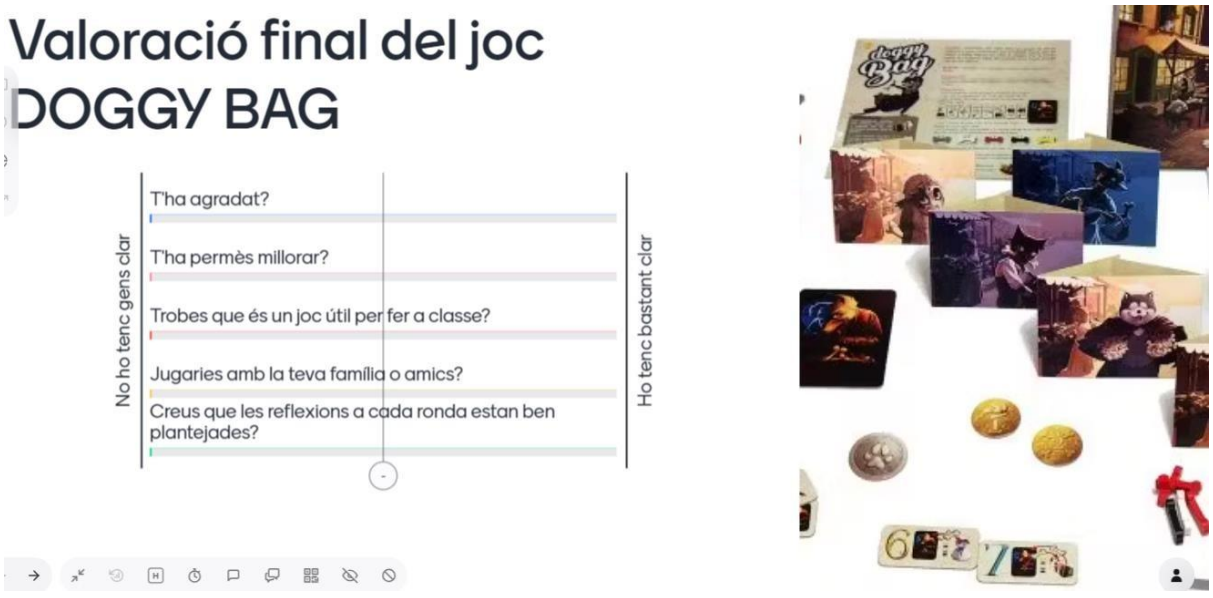


Imagen 7. Mentimeter Doggy Bag

Rol del alumnado y del docente

Como es de prever, el rol del alumnado y del docente durante las sesiones es muy activo. Para el alumnado hay que conseguir que tengan una participación activa, no solamente que jueguen sino conseguir que piensen mientras están jugando. De este modo, el docente tiene que provocar estas situaciones, plantearles dudas, forzar errores, cuestionar movimientos o ponerlos en duda, etc.

Para ello, el docente tiene que conocer muy bien el juego, tiene que haber jugado muchas veces y se tiene que haber puesto en el papel de sus propios alumnos, para analizar qué sensaciones tendrían, qué dudas pueden tener, qué bloqueos tendrán que afrontar, etc.

Además, durante algún trimestre he puesto en práctica diferentes roles cooperativos, para que pudieran asumir diferentes funciones al mismo tiempo que están jugando.

- Responsable: encargado/a de coger y entregar el juego.
- Cuestionador/a: persona que va cuestionando los movimientos de sus compañeros a lo largo de la partida.
- Registrador/a: en algunos juegos (no es el caso de Doggy Bag) cada grupo tenía un cuaderno para ir anotando diferentes aspectos relacionados con el propio juego, a modo de cuaderno de aprendizaje.
- Evaluador/a: responsable de reunir al equipo al finalizar la sesión para valorar el funcionamiento del grupo, si han estado concentrados, si han sido responsables, ambiente del equipo…

Evaluación

Referente a la evaluación se usan dos rúbricas bien diferenciadas. La primera rúbrica está relacionada con las preguntas de metacognición que se hacen al finalizar cada una de las fases del juego. Cada ítem de dicha rúbrica comprende un aspecto clave de la sesión en concreto. Por otro lado, una segunda rúbrica la cual se usa en la fase 3. En la última fase del juego se evalúa la partida de Doggy Bag teniendo en cuenta

la actitud, concentración y observación de la partida (estrategias puestas en práctica en los diferentes momentos de la partida). Esta segunda rúbrica, al ser más general que la primera, también hay un ítem relacionado con las propias preguntas de metacognición y un último ítem de valoración general.

Por último, además de evaluar la tercera vez que juegan también se organiza una sesión extra para trabajar las situaciones de juego. Es una sesión que se evalúa con una rúbrica específica. En esta sesión se plantean diferentes situaciones que te puedes encontrar a lo largo de una partida de Doggy Bag y tienen que explicar cómo afrontarían cada situación, justificando los motivos.

Imagen 8. Esquema de las situacions de juego

Los gráficos, imágenes o tablas deben estar insertadas en el cuerpo del trabajo en el lugar que corresponda en el texto, centradas y con un título o pie, por ejemplo:

Imagen 1. Logo.

La propia plantilla del documento tiene unos estilos propios (se identifican por JAEM21_autores para el estilo del texto que incluye esta información, para el texto del documento JAEM21_texto, etc.) para favorecer el diseño del trabajo.

Referencias

Deulofeu, J. (2016). Juegos de mesa para aprender matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 74, 7-13.

Deulofeu, Jordi (2017). Els jocs de taula a l'escola: ¿per a què? ¿quins? ¿com? ¿quan?

Durán, Sonia (8 de abril de 2024) Teoría del aprendizaje basado en la emoción. Eurekando.org. *https://www.eurekando.org/educacion/teoria-del-aprendizajebasado-en-la-emocion/*

Paula Bañuelos Herrán. Paula (8 de abril de 2024) Emotions La importancia de las emociones en el proceso de aprendizaje:

https://www.linkedin.com/pulse/laimportancia-de-las-emociones-en-el-proceso-paula-ba%C3%B1uelosherr%C3%A1n/

El sentido numérico a través del juego. Banco de fichas colaborativo entre docentes de todas las etapas: “TE TOCA”

Lidia Esparza Díaz
lidia.esparza@murciaeduca.es
CEIP El Alba, Murcia

Mari Cruz Morcillo García
mariacruz.morcillo@murciaeduca.es
CEIP San Félix, Murcia

Andrea de la Fuente Silva
andrea.delafuente@uam.e
Universidad Autónoma de Madrid

Núcleo temático: Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria

RESUMEN.

El juego puede ser una herramienta efectiva para desarrollar el sentido numérico en los estudiantes. Llevar este tipo de metodologías al aula debe conllevar una reflexión profunda por parte del docente en distintos aspectos didácticos (antes, durante y después). El objetivo de esta comunicación es facilitar todo ese trabajo de selección y análisis de propuestas de juego. Se presenta una herramienta eficaz y de fácil acceso, que nos abra la puerta a un banco de recursos en el que localizar distintos tipos de juegos para desarrollar el sentido numérico (comerciales, de papel

y lápiz, con uso de dados, etc.). Bajo la propia experiencia en el aula, se destaca para cada juego el potencial matemático, las habilidades previas necesarias, puntos fuertes y débiles, estrategias ganadoras y posibles adaptaciones.

Palabras clave: sentido numérico, juegos, aprendizaje basado en juegos, recursos

1. Introducción

El juego es la primera estrategia de aprendizaje que tenemos los seres humanos en los primeros años de vida y está muy presente en el desarrollo general durante la infancia. Pero, ¿jugar sólo le gusta a los niños y niñas?, ¿el juego sirve para motivar o también se puede aprender a través de él?, ¿tiene sentido introducirlo en nuestra programación de aula?.

El valor educativo del juego ya se viene defendiendo desde años por autores clásicos como Piaget o Vygotsky. El juego plantea un reto al alumnado despertando su curiosidad, generando dopamina y mandándoles señales al cerebro para que quiera repetir esas experiencias (Revuelta, 2020). Pero el juego además pone en marcha multitud de habilidades específicas, muy relacionadas con las funciones cognitivas y ejecutivas del que juega. Este hecho se refleja en investigaciones recientes que ponen el foco en intervenciones con juegos de mesa. Por ejemplo, en Vita-Barulla et al. (2023), se han encontrado beneficios en las funciones ejecutivas de flexibilidad y mantenimiento de la capacidad de actualización, dos habilidades muy relacionadas con el pensamiento matemático.

Los planes de estudios actuales nos proponen el uso de metodologías activas como una forma de dinamizar el aula, a la que vez que se construye el conocimiento y favorece el intercambio de ideas (LOMLOE, 2022). Pero tan importante es el cómo quiero que aprendan mis alumnos y alumnas, como el qué quiero que

aprendan. Por lo que nuestra labor como docentes es buscar situaciones de aprendizaje que aporten la profundidad y adaptabilidad de los saberes y competencias matemáticas.

En la actualidad, numerosas metodologías activas potencian estos procesos motivadores y vinculados a la afectividad. No obstante, es crucial mantener la prudencia, pues es sencillo enmascarar el proceso de aprendizaje y limitarse únicamente a la búsqueda de recompensas. En nuestra propuesta, el juego va a tomar un papel fundamental, entendido como medio del aprendizaje y como fin en sí mismo. Estaríamos en la línea de la metodología Aprendizaje Basado en el Juego. Además, debemos tener en cuenta que para llevar este tipo de metodología al aula, el rol del docente es esencial en todas sus fases (elección, acompañamiento y evaluación).

El objetivo de esta comunicación es facilitar a los docentes la introducción de los juegos de mesa en el aula de matemáticas. Para ello, se ha creado un banco de recursos de juegos dónde se identifica con claridad la potencialidad de cada juego y la profundidad del mismo para el desarrollo matemático. Se recoge (y actualiza) la opinión sobre distintos juegos tras su experiencia en el aula, toda persona puede colaborar si lo desea, en una herramienta fácil y de libre acceso. En concreto, nuestra comunicación se centra en juegos que desarrollan el “sentido numérico” del alumnado en la etapa de Primaria y los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

2. El juego y las matemáticas

A lo largo de la historia, la resolución de ciertos problemas que surgieron como un juego han motivado importantes avances matemáticos. La búsqueda de estrategias emplea procedimientos similares a los utilizados en la resolución de problemas, y

esta habilidad no es innata. Los juegos pueden ser útiles en su desarrollo (Muñoz et al., 2020).

En los últimos años, es notable el auge en la popularidad de los juegos de mesa. Más allá de ser simples formas de entretenimiento, los juegos de mesa se pueden convertir en una herramienta educativa muy valiosa.

El núcleo de nuestro trabajo es precisamente la recopilación y análisis de los juegos de mesa que nos ayudan a desarrollar el sentido numérico, pero ¿por qué consideramos que los juegos de mesa son un recurso de especial interés en la clase de matemáticas? Algunas de las principales características de los juegos que responden a esta pregunta son:

- Los juegos, por su propio diseño, aportan el necesario equilibrio entre diversión y reto que potencia el trabajo matemático desde la perspectiva de la resolución de problemas, búsqueda de estrategias, ensayo y prueba, observación y comunicación de resultados, representaciones variadas de los contenidos matemáticos. Este balance ayuda a favorecer el interés del alumnado por los aprendizajes matemáticos, partiendo de la motivación que provoca la dinámica del propio juego y la autopercepción de capacidad para participar de ellos que aporta el poder participar en el juego.

- La mayoría de juegos suponen la puesta en marcha de distintas funciones ejecutivas, un conjunto de habilidades que constituyen el sistema de control y regulación de nuestro pensamiento y acciones . Las funciones ejecutivas son necesarias tanto para el desarrollo del juego como del pensamiento matemático y los procesos que forman parte de él. Las que mayor implicación tienen en este aspecto son la memoria de trabajo (la capacidad de retener una información mientras se trabaja en ella), la atención, la planificación para la toma de decisiones, y la flexibilidad cognitiva.

- Un buen análisis y selección del juego puede favorecer la adquisición de las distintas competencias matemáticas. Existen muchos juegos de mesa que son herramientas perfectas para el aprendizaje de los distintos ámbitos matemáticos: sentido numérico, geometría, análisis de datos, probabilidad,..., por lo que las aulas de matemáticas pueden beneficiarse de este recurso tan valioso.

- Las propias dinámicas de los juegos hacen poner en juego a los alumnos habilidades directamente relacionadas con las dimensiones de la competencia matemática, entre las que destacamos el desarrollo de habilidades comunicativas respecto a procesos y resultados, la mejora del autoconocimiento y mejora de la metacognición, y de manera muy especial, un cambio en la vivencia del error y en la percepción del fracaso.

  El enfoque que se da al error durante el juego toma un papel esencial. Para ganar, se buscan estrategias de las que reciben una retroalimentación inmediata. En el caso de fallar, ese error se reformula y se aprende a través de él, suponiendo un desafío que se quiere intentar superar. La experiencia de juego se convierte en aprendizaje (de la Fuente y Garrido-Martos, 2023).

Por último, hay un aspecto de suma importancia en los juegos de mesa que los convierte en una herramienta de aprendizaje de gran potencialidad. Todos sabemos que en las aulas hay una gran diversidad en el alumnado y esta diversidad se hace muy presente en el área de matemáticas. Atender a todo nuestro alumnado, conseguir que todos puedan aprender bien las matemáticas, que desarrollen sus competencias en esta área, es una cuestión de justicia social. Para ello, es necesario poner en marcha estrategias metodológicas que nos permitan ajustar nuestra respuesta educativa a las individualidades de nuestro alumnado. Los juegos constituyen un recurso flexible, con gran capacidad para

atender los diferentes niveles y motivaciones, así como para atender las posibles dificultades de aprendizaje que se dan en el aula, desde una perspectiva inclusiva dentro del DUA.

2.1. El sentido numérico

Si pensamos en matemáticas, seguramente vengan a nuestra mente números y operaciones. Esto es así porque, efectivamente, los números (no sólo sus símbolos gráficos) y las operaciones son una gran parte del quehacer matemático, y por esto mismo tienen una gran presencia durante todas las etapas educativas del aprendizaje matemático.

Para entender bien qué es el sentido numérico y su importancia en el pensamiento matemático y en la educación matemática, nos podemos aproximar a él desde diferentes perspectivas que se complementan. Así, comenzando por el ámbito educativo, encontramos que según recoge el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria en su página 92, "**El sentido numérico se relaciona directamente con las habilidades que nos permiten comprender, trabajar y utilizar los números".**

Este sentido numérico conforma uno de los bloques de los saberes básicos a desarrollar en el área de matemáticas, en el que se incluyen aspectos como el conteo, la cantidad, el sentido de las operaciones y las relaciones.

Para poder profundizar en su comprensión y desarrollar las competencias asociadas a este sentido en nuestro alumnado, necesitamos comprender que el sentido numérico es un constructo multidimensional, que abarca gran cantidad de habilidades (Piazza, 2010), como recogemos a continuación. Es importante señalar también que según Dehaene (2009), estas habilidades parten de una capacidad inherente al ser humano que nos permite, por ejemplo, realizar estimaciones

rápidas del número de objetos presentes, determinar si un conjunto de elementos es mayor o menor que otro dado, y reconocer cómo ese conjunto se ve alterado por medio de adiciones y sustracciones sencillas. Estas capacidades se empiezan a desarrollar desde que nacemos y van cambiando y volviéndose más sofisticadas y complejas cuando accedemos a la educación formal.

Siguiendo a Jiménez (2019) los componentes que abarca el sentido numérico formal (es decir, el que desarrollamos desde la educación en las escuelas) son los siguientes:

- Comparación de magnitudes: capacidad para comprender y manipular cantidades, así como realizar comparaciones entre éstas.
- Conteo: implica dominar los principios básicos de conteo

  (correspondencia uno a uno, orden estable, cardinalidad, abstracción y orden irrelevante). Una vez que dominan estas habilidades, los niños son capaces de comprender la ordinalidad y cardinalidad de los números y de poder contar hacia delante y hacia detrás a partir de un punto cualquiera dentro de la línea numérica.

- Identificación numérica: reconocimiento de los números en formato simbólico, conociendo además su nombre y, por último, su significado.
- Estimación de cantidad: habilidad básica que permite aproximar el número de elementos presentes en un conjunto dado. Una vez se conocen los números, esta habilidad comienza a relacionarse con su posición en la línea numérica.
- Series numéricas o patrones numéricos: conocer las combinaciones que se dan por medio de adiciones y sustracciones, una vez adquirida la serie numérica. Es una habilidad fundamental para desarrollar las habilidades de cálculo superiores.
- Valor posicional: comprender que cada dígito dentro de un número tiene un valor dependiendo de la posición que ocupa

- Cálculo: capacidad de resolver operaciones aritméticas sencillas, esto es, realizar transformaciones en conjuntos por medio de adiciones o sustracciones.

También es importante reflexionar sobre el tipo de representaciones que se utilizan para poder llevar el juego desde las etapas más tempranas y utilizarlo en una fase puente entre lo simbólico y lo abstracto.

Conociendo todas las dimensiones que abarca el sentido numérico, más allá de reconocer los numéricos y "hacer cuentas", podemos plantearnos cómo son los juegos que desarrollan realmente este sentido. Como docentes, por tanto, tenemos que comenzar planteándonos algunas cuestiones: ¿cualquier juego con números realmente trabaja el sentido numérico?, ¿se puede trabajar el sentido numérico a través del juego?, ¿qué procesos matemáticos se ponen en juego?, ¿qué contenidos propios del currículum se trabajan?, ¿a qué curso corresponden? ¿qué tipo de representaciones utilizan?

Poder dar respuesta a estas preguntas conforman el objetivo principal de nuestra propuesta, que detallaremos en las páginas sucesivas.

3. "TE TOCA".

Partiendo de las cuestiones anteriores, lo primero que hay que decir es que **NO todos los juegos con números trabajan el sentido numérico**.

Este es uno de los primeros hechos que se constatan con nuestra experiencia al llevar juegos a nuestras aulas de matemáticas.

Un claro ejemplo es el conocido juego de "Rummikub" de Goliath, *(https://www.goliathgames.es/rummikub-original/)*. Este clásico juego está compuesto por fichas con números, pero el reto numérico del juego es mínimo, ya

que alcanzar su objetivo depende de otras habilidades no numéricas. Por el contrario, otros juegos que aparentemente no desarrollan el sentido numérico (no contienen de forma explícita representaciones numéricas), ponen en marcha una serie de habilidades vinculadas estrechamente al sentido numérico, como es el caso de “El frutal” de HABA e incluso conectan con otros sentidos matemáticos (Beltrán Pellicer, 2017)

Esto nos demuestra que, escoger un buen juego para la clase de matemáticas, y más concretamente para el trabajo del sentido numérico, requiere profundizar en muchas cuestiones, vinculadas tanto con el contenido y la estrategia matemática, como con aspectos referidos a otras habilidades.

Pero la labor del docente no se queda limitada a este trabajo previo de selección, análisis del juego y conocimiento profundo de qué contenidos y competencias matemáticas desarrolla. Son muy importantes las decisiones que debe tomar relacionadas con la gestión de aula, (agrupamientos, adaptabilidad, espacios de trabajo, tiempos, materiales adicionales,....), que dependerán de los objetivos a trabajar y del juego seleccionado, y que son cruciales para desplegar toda su potencialidad.

Hay que destacar que es necesario que el docente tenga muy bien estructurada la sesión en la que va a presentar el juego a su alumnado, ya que éste es un punto de partida importante para que el juego genere la atención y motivación necesarias y para que se comprenda bien su mecánica. Para ello, habrá que tener en cuenta en esta primera sesión aspectos como la presentación del material, ejemplificar con un modelo de partida, visionado de un vídeo, uso de una cámara de documentos,..., así como tener preparadas cuestiones para detectar posibles dudas.

Una vez planificados todos los elementos para la sesión de juegos matemáticos en el aula, es el momento de ver cuál será el rol del docente a lo largo de estas sesiones, teniendo el juego como vehículo del aprendizaje matemático.

En primer lugar señalar que aquí, el docente, deja de ser el centro de la clase, el transmisor del conocimiento, para convertirse en un conductor, facilitador y potenciador del aprendizaje matemático. Con este cambio fundamental, el clima del aula también cambia, potenciando aspectos como la autonomía, la toma de decisiones, la argumentación, la creatividad, etc. Debe enriquecer el aprendizaje que la propia dinámica del juego propicia a través de preguntas, reflexiones y de la escucha activa de las aportaciones que van realizando los alumnos.

A lo largo del desarrollo de las sesiones de juegos en las aulas de matemáticas, una de las funciones principales del docente es la observación de la práctica de la actividad matemática por parte del alumnado. En este sentido, el juego se convierte no solo en vehículo de aprendizaje sino también de evaluación, ya que nos permite acercarnos a procesos del pensamiento matemático de nuestros alumnos de difícil acceso con los instrumentos de evaluación más tradicionales.

Durante el desarrollo del juego, debemos ir evaluando la consecución de los objetivos matemáticos que nos hayamos planteado, ver cuáles son los posibles "errores" y darles sentido, valorar las estrategias desarrolladas, el dominio del contenido que está de base en el juego, la capacidad de argumentación y confrontación, el nivel de atención,...

El día a día en nuestras aulas no nos deja mucho espacio para realizar ese análisis profundo en la búsqueda de los juegos más válidos para el desarrollo de las competencias matemáticas, así como valorar las implicaciones de su uso en las aulas y/o explorar las posibles consideraciones para atender diferentes aspectos

de nuestro alumnado. Esto requiere de una gran inversión de tiempo que, en la mayoría de ocasiones, no tenemos.

Por ese motivo nace nuestra propuesta, con la idea de ayudar a los docentes en esta labor y facilitar la introducción de los juegos de mesa en el aula de matemáticas favoreciendo a su vez una reflexión conjunta.

El objetivo de este trabajo es presentar una herramienta eficaz y de fácil acceso, que nos abra la puerta a un banco de recursos en el que localizar distintos tipos de juegos para desarrollar el sentido numérico (comerciales, de papel y lápiz, con uso de dados, etc.), aportando su análisis y verificación de uso en las aulas.

Los aspectos que hemos tenido para elaborar y organizar este banco de recursos:

- Datos del juego.
- Descripción de la mecánica del juego (enlace para ver con más detalle).
- Principales contenidos matemáticos que trabaja (sentido numérico).
- Conocimientos y habilidades previas necesarias
- Puntos fuertes y puntos débiles (flexibilidad o no del juego, suelo bajo/techo alto, posibilidades de adaptación, diseño del juego, mecánica del juego, etc.) - Estrategias ganadoras.
- Observaciones para el aula: factores clave que pueden condicionar el juego (tiempo, velocidad, materiales, agrupamientos..)
- Posibles adaptaciones o ampliaciones.

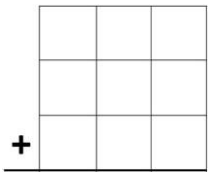
La finalidad de esta herramienta es facilitar a los docentes el uso de los juegos de mesa como un instrumento muy valioso de aprendizaje de las competencias

matemáticas de nuestro alumnado en nuestras aulas. Puedes acceder al Padlet en este enlace: "Padlet Te Toca".

4. Algunos ejemplos concretos.

A continuación, se muestran algunos de los juegos que se pueden encontrar en el Padlet.

BANCARROTA



Fuente: https://www.tocamates.com/juegos-matematicos-con-dados/)

Materiales:

Dados físicos o dado virtual, papel y lápiz. Posible plantilla para la realización de la suma con los espacios para cada dígito de cada número.

Tiempo de juego:

Varía según las competencias matemáticas del alumnado, pero en torno a unos 10-15 min.

¿De qué va este juego?:

Hay que combinar los números salidos al azar al lanzar un dado 9 veces. El jugador/a debe formar tres números de tres cifras que, al sumarlos, no superen 1 000. En cada lanzamiento el jugador/a debe decidir en qué posición va a guardar dicho número, (centena, decena y unidad) y en cuál de los tres números a sumar. Gana el jugador/a que consiga 1 000 o se acerque más.

Principales contenidos matemáticos que trabaja:

- Dominio del valor posicional: millar, centenas, decenas y unidades.
- Habilidades de cálculo mental. Descomposición numérica.
- Estimación: ya que hay que ir revisando constantemente la operación, anticiparnos a posibles números que sean válidos para un determinado valor y cuáles no son válidos, de forma que vayamos ajustando las decisiones.
- Es importante dominar la "llevada", ya que condiciona el resultado. (No condiciona igual una "llevada" en la unidad que una llevada en la decena).

Conocimientos y habilidades previas necesarios:

- Habilidades de cálculo y estimación.
- Inicio en la comprensión del valor posicional de los números de tres cifras.

Puntos fuertes y puntos débiles:

- No es necesario material específico. Se puede usar un dado virtual.
- Explicación sencilla, pocas reglas.
- Adaptable a diferentes niveles.
- No es un juego excesivamente largo.
- Nos da la posibilidad de profundizar en la competencia matemática que estamos desarrollando, (valor posicional, estimación y cálculo mental).
- Permite al alumnado revisar y reajustar sus decisiones a lo largo de la partida.
- No encontramos puntos débiles a destacar.

Estrategias ganadoras:

- Si el dado es de 6 caras, la suma nunca superará el 18, (es decir, 3 veces el 6), por lo que la posibilidad de aumentar la siguiente cifra, (llevarme) más de una no es posible. Con este dato es más fácil controlar la mecánica del juego.
- Si el dado es de 10 caras, las probabilidades de incrementar la cifra siguiente aumentan considerablemente y el juego adquiere mayor complejidad.
- Posibles resultados iguales con diferentes sumados, ¿por qué?. (Propiedad conmutativa de las cifras de un mismo valor posicional.)

Observaciones para el aula:

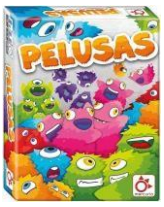
- No requiere de observaciones importantes para el aula.
- Es un juego que se ajusta perfectamente a varios niveles competenciales en un mismo grupo.
- Tener en cuenta la necesidad de usar material manipulativo o gráfico.
- El juego se enriquece mucho con la reflexión en grupo una vez finalizada la jugada: ¿hay varios resultados iguales?, ¿sus sumandos son los mismos?, ¿hay alguna combinación de los números que se acerque más al resultado que queremos?, ¿cómo podríamos haber conseguido un resultado exacto?, ¿qué cambios serán necesarios?.

Posibles adaptaciones o ampliaciones:

Es un juego que, por su sencillez, es fácilmente adaptable.

- Permite jugar con diferentes agrupamientos, según nos interese: individual o en parejas.
- Permite variar el número al que hay que llegar, así como los números implicados en las operaciones. Por ejemplo, no hay que superar 500 con dos números de tres cifras; no hay que superar 100 con tres números de dos cifras,....).
- Una vez terminada la partida, podemos buscar si hay una combinación que se acerque más al resultado determinado.
- Podemos apoyar el juego con material manipulativo, por ejemplo regletas. Se les facilita una base con 10 centenas, (1000) y, conforme vayan eligiendo el valor de cada dado, van completando esa base con regletas. De esta forma, el alumnado visualmente verifica el valor de cada número y, sobre todo, observa la cantidad que le falta para llegar al 1000.

PELUSAS de #mercurio



Link: https://www.instagram.com/p/C54CLKQtdLK/

Precio: aprox. 13€

Edad:

indicado para +8. Se puede introducir desde el primer ciclo de Ed. Primaria

Tiempo de juego:

Aprox. 20 minutos.

¿De qué va este juego?

Juego de dinámica sencilla. Se recomienda explicar al mismo tiempo que se hace un ejemplo para que quede claro. Gana quién más puntuación consigue al final del juego. Pelusas (números) del 1 al 10. En tu turno, con todas las pelusas sobre la mesa (boca abajo), tienes que ir destapando números, dejarlos delante de ti (todo el mundo puede verlos) hasta que decidas plantarte. Hay que tener en cuenta que si ya tienes tres cartas y al destapar coges un número de pelusa que ya tenías, pierdes todas las pelusas que llevabas en esa ronda. ¿Te plantas o quieres seguir arriesgándote? Ojo, durante esa ronda, otras personas pueden robarte pelusas en su turno. Consolidas tus puntos cuando da una vuelta completa y llega otra vez tu turno.

Principales contenidos matemáticos que trabaja:

Las matemáticas aparecen en el recuento de puntos. Nos ayuda a identificar las estrategias de cálculo mental "*suma"* que utilizan (o la ausencia de ellas) y a sugerir nuevas.

Conocimientos y habilidades previas necesarios:

No es necesaria habilidades específicas ni contenidos previos. A los más peques la dinámica del juego hay que repetirla bastante al principio hasta que la entienden en su totalidad.

Puntos fuertes y puntos débiles:

Para el recuento, las cartas son números del 1 al 10 que se pueden agrupar según se necesite (propiedad conmutativa). Permite sugerir estrategias como hacer parejas (o varios sumandos) de suma 10, para facilitar el recuento en decenas.

Estrategias ganadoras: Predomina mucho el azar, no destaca el uso de estrategias.

Observaciones para el aula:

Hay que esperar a finalizar el juego para sacar el potencial matemático. Si es cierto que al ser un juego de "tentar la suerte", se puede ver de manera informal comentarios sobre las "posibles posibilidades" que tienen de aparecer unos números o otros, pero a no ser que se estén contando las cartas, al final predomina el azar.
Destaca por ser un juego divertido. Permite tener libertad a la hora de realizar los agrupamientos.

Posibles adaptaciones o ampliaciones:

En función de la edad a la que se dirige, su forma de recuento dice mucho del punto en el que están. Por ejemplo, se nota cuando empiezan a multiplicar y los agrupan por el mismo número. Si no surge, es una forma también de plantear la multiplicación. Aunque en este juego, la estrategia de suma 10 es más adecuada.

SPLITTISSIMO de Brainy Band

Link: https://www.youtube.com/watch?v=lPsrEnkLe88

Precio: aprox. 15€

Materiales:

Cartas que representan diferentes fracciones de pizza y cartas de pedido con ingredientes y fracciones escritas.

Tiempo de juego:

Alrededor de 15 minutos, pero es muy variable.

¿De qué va este juego?:

En este juego el objetivo es conseguir el mayor número de pizzas enteras (para ello, una vez acabada la partida, los alumnos tienen que ir sumando/uniendo todas las fracciones conseguidas). Para conseguir los trozos de pizzas (las fracciones), tienen que ir asociando la representación gráfica de los trozos de pizza con la fracción de ingredientes indicada en las cartas de pedido. Pueden combinarse varias cartas (de pedido, con la fracción escrita con números; o de pizza, con la fracción representada como trozos de una pizza circular), para realizar las asociaciones.

Principales contenidos matemáticos que trabaja:

- Reconocimiento visual de fracciones
- Comparación visual de fracciones
- Suma visual/manipulativa de fracciones
- Suma de fracciones
- Comparación de fracciones

Conocimientos y habilidades previas necesarios:

- Tener una ligera intuición entre la parte y el todo a nivel espacial (primer nivel)
- Conocer el concepto de fracción y su escritura (segundo nivel)

Puntos fuertes y puntos débiles:

Entre los puntos fuertes hay que destacar que tienen vídeos explicativos en su web, hay 3 niveles graduados de dificultad y que la temática y el diseño son atractivos a la vez que facilitan el reconocimiento de las fracciones.

En cuanto a los puntos débiles, la dinámica del juego es un poco compleja al principio, no queda claro si conociendo el objetivo para ganar (reunir el mayor número de pizzas completas posible) se puede seguir alguna estrategia al seleccionar las cartas de tu mazo y del centro de la mesa que utilizarás.

Estrategias ganadoras:

Debido a la variabilidad que se puede introducir en el juego, es difícil encontrar estrategias ganadoras definitivas, aunque los alumnos pueden poner en marcha estrategias que les permitan ser más eficientes y organizarse mejor.

Observaciones para el aula:

- Como todas las pizzas tienen las líneas de los octavos, les resulta difícil nombrar las fracciones como medios, o cuartos (cuentan directamente octavos), aunque una vez superado esto puede facilitar la comprensión de las fracciones equivalentes
- No queda claro si se pueden jugar diferentes cartas de diferentes pizzas en un mismo turno (como varios pedidos separados). No queda claro si puedo coger una porción de pizza más grande para satisfacer un pedido con una fracción más pequeña (que me sobre)
- Al principio se hace pesado esperar el turno de un jugador a otro si no tienen un nivel parecido de habilidad, o si todos tienen una habilidad baja (quizás primero se pueda practicar la asociación de diferentes cartas de pedido con pizzas de forma individual)
- Los alumnos que no dominan muy bien las fracciones son capaces de ver los “trozos”, pero no tanto de entender de dónde proceden (he tenido que entender que divido la pizza en 4 trozos para coger dos cuartos)
- Puede haber pequeñas confusiones con el pedido y lo que ya falta en la pizza (pueden coger las pizzas por lo que falta en vez de por los trozos que muestran que quedan).

En cuanto a la mecánica del juego, influye la memoria de trabajo ya que tienen que hacer cálculos e imaginar cómo se va componiendo la pizza con los distintos trozos

que van juntando, tienen que probar diferentes opciones para ver si combina, tanto juntando cartas de pedido, como juntando cartas de pizza.

Posibles adaptaciones o ampliaciones:

En las propias instrucciones del juego se plantean 3 niveles diferentes de dificultad.

Para facilitar el juego, se puede complementar el material creando una serie de cartas recortables, para poder juntar y separar trozos de pizza para completar los pedidos y que se pueda ver de forma manipulativa cómo se completa la suma de distintas fracciones.

Se pueden dibujar los diferentes pedidos como entrenamiento previo.

5. ¿Quieres colaborar?

Esperamos que esta herramienta sea de utilidad para docentes que se animen a introducir juegos en clase de matemáticas.

Si has puesto en práctica alguna de las propuestas, puedes contarnos tu experiencia en la propia plataforma para que otras personas puedan utilizarlo como referencia. Si conoces algún otro juego y quieres contribuir a seguir haciendo crecer esta base de juegos, mándanos tu propuesta de juego a través del correo que viene en el Padlet.

Creemos entre todos y todas una red en la que nos encontremos docentes "jugones", de forma que nuestro alumnado se beneficie de todo el potencial que tiene incluir los juegos de mesa en el desarrollo de las competencias matemáticas dentro de nuestras aulas. Ahora "te toca".

Referencias

Beltrán-Pellicer, P. (2017). Una propuesta sobre probabilidad en educación infantil con juegos de mesa. *Edma0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(1), 53-61.

Dehaene (2022). *El cerebro matemático*. Clave intelectual.

De la Fuente, A. & Garrido-Martos, R. (2023). Aprendizaje basado en juegos. En L. Cañadas y N. Hidalgo (Eds.), *Materiales docentes para el empleo de metodologías y procesos de evaluación formativa en la formación inicial de profesorado.*
Dykinson. https://doi.org/10.14679/2310

Jiménez, J.E. (2019). *Modelo de respuesta a la intervención. Un enfoque preventivo para el abordaje de las dificultades específicas de matemáticas*. Madrid: Pirámide.

LOMLOE (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Educación Primaria (BOE núm. 52)

Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. y Hans, J.A. (2020). *Jugando con las matemáticas: los juegos como recurso de enseñan-za y aprendizaje matemático.* Catarata. Colección Miradas Matemáticas.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S. y Zorzi, M. (2010) Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition, 116 (1)*, 33-41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012

Revuelta, S. (2020). Conectamos jugando: Aprendizaje basado en juegos de mesa en la clase de ELE. Mosaico. *Revista para la promoción y apoyo a la enseñanza del español, 8,* 131-145.

Vita-Barrull, N., Estrada-Plana, V., March-Llanes, J., Guzmán, N., Fernández-Muñoz, C., Ayesa, R. y Moya-Higueras, J. (2023) Board game-based intervention to improve executive functions and academic skills in rural schools: A randomized controlled trial. *Trends in Neuroscience and Education, 33.* https://doi.org/10.1016/j.tine.2023.100216

El cuento ilustrado como recurso para promover el sentido algebraico en Educación Infantil y Primaria

López-Serentill, Paula(1)
paula.lopez@udg.edu (1)
Universitat de Girona (1)

Pincheira, Nataly(2)
nataly.pincheira@udg.edu (2)
Universitat de Girona (2)

Núcleo temático: Recursos para el aula, procesos.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria

RESUMEN

El cuento se ha utilizado a lo largo de la historia en todas las culturas, como recurso para transmitir conocimiento. En matemáticas, el uso del cuento es un buen recurso didáctico para introducir y trabajar las competencias y saberes del currículum en todas las edades. Por un lado, los cuentos suelen plantear problemas que el protagonista debe superar utilizando distintas estrategias y por otro lado los cuentos nos ayudan a presentar conceptos matemáticos en contexto. Además, es fácil que los alumnos se identifiquen con los personajes del cuento, sus emociones y sentimientos, mejorando el sentido socioafectivo del alumnado y facilitando el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se presentan y analizan distintos cuentos que trabajan el sentido algebraico para educación infantil y educación primaria y se describen actividades que se pueden llevar a cabo en el aula para trabajar el álgebra en las primeras edades.

Palabras clave: cuento matemático, recurso didáctico, educación infantil, educación primaria, sentido algebraico.

1. Introducción

El cuento es una invención humana que se ha utilizado a lo largo de la historia, en todas las culturas, como recurso para enseñar y transmitir conocimiento. Hoy en día se ha hablado mucho del potencial de los cuentos como herramienta para formar adecuadamente la mente de los niños, fomentando la capacidad de entender y razonar. Algunos autores como Marín (2007, 2013) los consideran «alimento intelectual» por excelencia de la primera infancia. Un cuento te enseña aunque tú no quieras aprender ya que, según Bettelheim (1999), los cuentos aportan importantes mensajes al consciente, preconsciente e inconsciente, sea cual sea el nivel de funcionamiento de cada uno en aquel instante. Cuando se explica una buena historia en el aula, se abren un sinfín de posibilidades. Cuando los alumnos se quedan boquiabiertos y desean descubrir el final de la historia, te das cuenta que tienes una oportunidad.

2. El cuento como recurso para el aula de matemáticas

Como se ha dicho ya muchas veces en las últimas décadas, los recursos y materiales didácticos son herramientas fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, favoreciendo la comprensión de los contenidos y el proceso de abstracción de algunos conceptos. Entre otros recursos, hay un gran grupo que son los recursos literarios (cuentos, novelas, canciones, poesías, etc.).

Desde la perspectiva del EIEM (Alsina, 2020), se asume que los recursos literarios (e.j., cuentos, entre otros) tienen un papel relevante en la clase de matemática ya que no solo permiten motivar al alumnado y generar interés, sino que también ayudan a conectar ideas matemáticas con experiencias personales y desarrollar el pensamiento crítico, al proveer contextos en los que la matemática es útil para resolver problemas (López-Serentill y Alsina, 2023).

Diversos autores vienen trabajando con cuentos como recurso para enseñar matemáticas en las primeras edades (Marín, 2007, 2013; Saá, 2023, López-Serentill, 2024; López-Serentill y Alsina, 2023). López-Serentill (2024) describe una síntesis de las principales ventajas, entre las que destacan el potencial de los cuentos para trabajar distintos contenidos matemáticos en contexto, haciendo múltiples conexiones dentro y fuera de las matemáticas y valorando la utilización de las matemáticas en la vida cotidiana. De hecho, si nos fijamos de nuevo en el nuevo currículum, la competencia 5 hace referencia a la importancia de reconocer y utilizar la conexión de las matemáticas con otras materias, con la vida real o con la propia experiencia ya que aumenta el bagaje matemático del alumnado.

Otra de las ventajas que señala la autora sobre la utilización del cuento como recurso en el aula de matemáticas en cualquier edad, es en relación a la resolución de problemas. Si nos fijamos en la estructura de cuento clásico de planteamiento, nudo y desenlace, la mayoría de veces los protagonistas se enfrentan a una situación problemática o conflicto y todo el cuento gira alrededor de este conflicto. Por tanto, el cuento ayuda a los alumnos a crear puentes entre la resolución de problemas en situaciones informales, y los procedimientos y estrategias de resolución de problemas matemáticos más formales (Lemonidis y Kaiafa, 2019).

Por último, la investigación en didáctica ha demostrado que el rendimiento en matemáticas puede mejorar si se cuestionan los prejuicios y se desarrollan emociones positivas hacia las matemáticas. Por ello, en el nuevo currículum español (MEFP, 2022), se ha añadido el sentido socioafectivo dentro del currículum. Creemos que el cuento puede llegar a ser un gran recurso para trabajar el sentido socioafectivo puesto que conecta las matemáticas con las emociones. Los estudiantes conectan con los protagonistas del cuento y por tanto, sienten como propias las emociones que viven los protagonistas. Además, se pueden trabajar a través de cuentos, las vidas y logros de mujeres matemáticas.

3. El sentido algebraico en las primeras edades

La incorporación del álgebra como bloque de contenido desde los primeros años de escolarización responde a una propuesta de innovación curricular conocida como *Early Algebra.* De acuerdo con Blanton y Kaput (2005) el *Early Algebra* busca desarrollar en las aulas de clase hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de tareas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, donde los estudiantes exploren, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas.

Por tanto, introducir el sentido algebraico desde la educación infantil permite que "los profesores puedan ayudar a los alumnos a construir una sólida base de comprensión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria" (NCTM, 2000, p.39).

Diversas investigaciones informan que los estudiantes pueden desarrollar conocimientos vinculados con el sentido algebraico desde las primeras edades, adquiriendo nociones algebraicas elementales, tales como, las clasificaciones de objetos, el reconocimiento de patrones repetitivos, la descripción de situaciones de igualdad y desigualdad, entre otras.

Pincheira y Alsina (2021) caracterizan los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de tareas que promueven el desarrollo del sentido algebraico en educación infantil: a) establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.) a partir del reconocimiento de atributos, realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos. Mientras que, en educación primaria abordar el sentido algebraico implica atender a una amplia concepción del álgebra que comprende diversos elementos, como la generalización de la aritmética, el estudio de las relaciones numéricas y estructuras matemáticas comunes abstraídas de cálculos, la generalización de patrones y el estudio de las relaciones funcionales (Kaput, 2000; Carraher et al., 2000).

4. Cuentos para trabajar el sentido algebraico en educación infantil

A continuación, se muestran tres cuentos con los que se puede trabajar el sentido algebraico en educación infantil. Para cada cuento se indica el contenido algebraico y actividades que se pueden desarrollar a partir del cuento.

4.1 Vamos a la fiesta

Libro de descubrimiento en los que a través de preguntas se pretende desarrollar la agudeza visual del lector en la búsqueda de animales que presentan ligeras diferencias en posición, diseño o que llevan algún elemento llamativo.

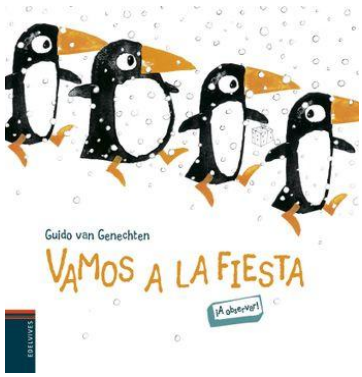


Imagen 1. Guido Van Genechten. *Vamos a la fiesta*

Contenido algebraico: clasificaciones, noción de igualdad y desigualdad.

Actividades: Este cuento permite clasificar elementos a partir de un criterio establecido, trabajar con etiquetas negativas, buscar los elementos que son diferentes en una colección de objetos y justificar porqué o en qué son diferentes potenciando el razonamiento lógico y la competencia comunicativa. Se puede proponer al alumnado que cree páginas nuevas.

4.2 Ser quinto

Libro álbum con texto e ilustraciones que muestran una sala de espera con cinco juguetes averiados sentados en sillas, en una fila. A medida que van marchando los

juguetes, el protagonista pasa de ser quinto, a cuarto, tercero,… hasta que le toca entrar a él.

Imagen 2. Enst Jandl, Norman Junge. *Ser quinto*

Contenido algebraico: patrones de repetición, correspondencia numérica, concepto de cambio cualitativo.

Actividades: Este cuento es ideal para trabajar los números ordinales, el conteo descendiente de 5 a 0, pero también para abordar los patrones de repetición y el concepto de cambio cualitativo. Se aconseja reproducir los personajes del cuento de manera que los protagonistas sean los propios alumnos. Se les puede hacer preguntas como: ¿Notas una acción que siempre se repite en el cuento?, ¿Qué acción?, ¿Qué debería pasar para que el que está tercero sea el segundo? ¿Quién debería irse? ¿Hay más de una manera que eso pase? Si marcha el que está segundo ¿Quién cambiará de posición? Si todos se dan la vuelta, ¿Quién pasa a ser el primero? ¿Y el último? ¿Hay alguien que se quedará en la misma posición?, ¿Cómo se encuentra cada personaje en la sala de espera? ¿Cómo se encuentran luego de la visita con el doctor?, ¿Qué notas?

4.3. Un Libro

Al abrir este libro, sólo se ve un círculo amarillo sobre la página en blanco. Entonces, se invita al lector a pulsar ese círculo con el dedo y averiguar qué ocurre. ¿Qué niño curioso podría resistirse a semejante desafío? Para saber la respuesta simplemente hay que dar la vuelta a la página ¡Y así empieza la magia! Círculos rojos, amarillos y azules se desdoblan, cambian de sitio, se colocan en fila, crecen e incluso están a

punto de caerse por la orilla del libro o volar hasta desaparecer. Todo depende de lo que el niño haga, si los aprieta, los frota, sopla sobre ellos o los agita.

Imagen 3. Hervé Tullet. *Un libro*

Contenido algebraico: cambios cualitativos y cuantitativos

Actividades: Este cuento es idóneo para trabajar página a página con pequeño grupo. Es interesante hacer partícipes a los niños haciendo predicciones de lo que creen que va a pasar haciendo las acciones que nos indica cada página. Una vez que se ve lo ocurrido, hacer preguntas como: ¿Qué le ha ocurrido al círculo? ¿qué pasaría si el punto que hemos tocado en vez de color amarillo fuera de color rojo? De esta forma podemos empezar a trabajar conocimientos del sentido algebraico como la descripción de cambios.

5. Cuentos para trabajar el sentido algebraico en educación primaria

A continuación, se muestran tres cuentos con los que se puede trabajar el sentido algebraico en educación primaria. Para cada cuento se indica el contenido algebraico y actividades que se pueden desarrollar a partir del cuento.

5.1 Las semillas mágicas

Juan, el joven protagonista de la historia, recibe de un hechicero dos semillas y dos consejos: que horneara una de las semillas hasta que se torne roja y luego que se la comiera, así no tendría hambre por un año; y que siembre la otra semilla y la cuide, pues para el otoño le daría dos semillas mágicas. Juan hizo exactamente lo que el hechicero le indicó. Fueron pasando las estaciones, los años, conoce a Alicia, tienen un niño. Su fortuna crece de uno en uno, de dos en dos… La cosecha avanza hasta que un día una tormenta puede que cambie el destino de todos.

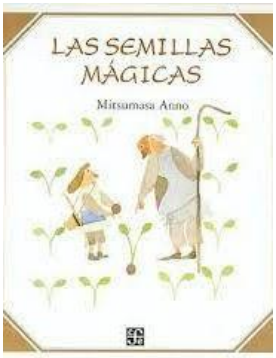


Imagen 4. Mitsumasa Anno. *Las semillas mágicas*

Contenido algebraico: Patrones: Identificación, descripción verbal, representación y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes. Modelo matemático: Proceso de modelización a partir de problemas de la vida cotidiana, usando representaciones matemáticas.

Actividades: En este cuento es interesante no contarlo todo de principio a fin y hacer paradas para que los estudiantes puedan hacer hipótesis y cálculos para anticipar lo que pasará en las siguientes páginas. En la segunda parte del cuento, en cada página podemos encontrar una pregunta que plantea el narrador y que puede sernos de ayuda para el trabajo con los alumnos. Por ejemplo, si el protagonista procede de igual forma, ¿Cuántas semillas crecerán el año siguiente? o también nos encontramos con la pregunta contraria, es decir, si sabemos las semillas que crecieron, ¿Cuántas semillas sembraron?.

5.2 Equal Shmequal

Al ratón, al oso y a otros animales les gustaría jugar al tira y afloja. Intentan formar equipos iguales para jugar un partido limpio. El ratón analiza varias soluciones, no está seguro de lo que significa ser igual. Prueban diferentes criterios, como comedores de plantas frente a comedores de carne y pieles frente a escamas. Nada funciona hasta que el ratón comienza a pensar matemáticamente. Finalmente descubren que a igual peso e igual esfuerzo, los dos equipos son comparables.

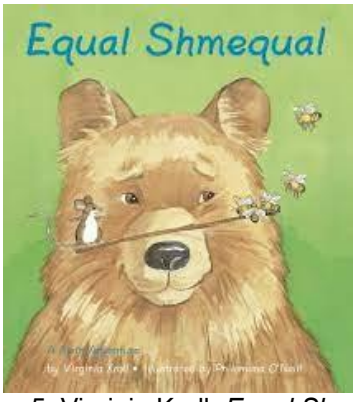


Imagen 5. Virginia Kroll. *Equal Shmequal*

Contenido algebraico: Relaciones y funciones: Relaciones de igualdad y desigualdad, y uso de los signos = y ≠ entre expresiones que incluyan operaciones y sus propiedades. La igualdad como expresión de una relación de equivalencia entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos. Representación de la relación «mayor que» y «menor que», y uso de los signos < y >.

Actividades: A partir del cuento, se pueden hacer preguntas que comparen distintos atributos de animales como, por ejemplo: ¿Qué pesa más, un gato o un elefante? ¿Qué es más alto, un león o una jirafa? Con la ayuda de la balanza se pueden hacer comparaciones del peso de distintos objetos de la clase, añadir o quitar objetos para igualar la balanza, o trabajar con la balanza numérica para introducir ecuaciones sencillas.

5.3 Trucos con sombreros

Diviértete junto a Juan y María contestando las perspicaces preguntas del sombrero. En este ingenioso libro los acertijos muestran cómo los científicos buscan todas las posibles respuestas a un problema y comparan una respuesta con la información que ya tienen, cómo eliminan lo que no encaja en una situación planteada y, así, llegan a la respuesta correcta.

Imagen 6. Nozaki, A. y Anno, M. *Trucos con sombreros*

Contenido matemático: Pensamiento computacional: Estrategias para la interpretación, modificación y creación de algoritmos sencillos (secuencias de pasos ordenados, esquemas, simulaciones, patrones repetitivos, bucles, instrucciones anidadas y condicionales, representaciones computacionales. Lógica binaria.

Actividades: En este cuento hay que buscar posibles respuestas a un problema utilizando la información que se posee y eliminando la que no se ajusta al enunciado planteado, y siguiendo la lógica binaria. La dificultad de estos retos va aumentando progresivamente, y en todos los casos se dan pistas que ayudan al lector a deducir la respuesta correcta. Una manera de reproducir con los alumnos el cuento, es utilizando gomets de color blanco y rojo y colocarlos en la frente de los alumnos (sin que estos vean el color que se les coloca a ellos) para simular los sombreros del cuento.

6. Conclusiones

Una buena historia puede ser un buen recurso como punto de partida para introducir un tema o concepto matemático. Además, nos permite conectar con los alumnos que a veces se muestran desmotivados o perdidos, facilita la conexión de las matemáticas con la realidad, fomenta la comprensión lectora, facilita la resolución de problemas, genera buenos diálogos matemáticos y genera un clima único.

Hay miles de cuentos, algunas veces las conexiones con las matemáticas son obvias, otras necesitaremos de las gafas matemáticas para poder establecer estas conexiones. Muchos de los cuentos consultados, inciden en temas relacionados con el sentido numérico en las primeras edades. En este trabajo, hemos hecho una selección de cuentos que trabajan uno de los sentidos más difíciles de establecer conexiones fuera de las matemáticas y del contexto académico, el sentido algebraico. Creemos que, realizar conexiones entre los saberes del sentido algebraico con estas pequeñas historias ayudará a nuestros alumnos a consolidar o entender conceptos matemáticos curriculares que a menudo cuestan de comprender.

Referencias

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. http://10.30612/tangram.v3i2.12018

Bettelheim, B. (1999). *Psicoanálisis de los cuentos de hadas*. Crítica.

Blanton, M., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, Arizona.*

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Lemonidis, C. y Kaiafa, I. (2019). The Effect of Using Storytelling Strategy on Students' Performance in Fractions. *Journal of Education and Learning*, *8*(2), 165-175.

López-Serentill, P. (2024). Había una vez... un cuento como recurso para secundaria. *SUMA 106.*

López-Serentill, P., Alsina, A. (2023). Evaluando El Desarrollo de La Competencia Matemática a Través de Cuentos. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (101), 30-38.

Marín, M. (2007). El valor matemático de un cuento. *SIGMA, 31,* 11-26.

Marín, M. (2013). *Cuentos para aprender a enseñar matemáticas en Educación Infantil.* Narcea.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP, 2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.*

https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/02/pdfs/BOE-A-2022-3296.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Saá, Mª. D. (Ed.). (2023). *Una mirada matemática a los relatos.* Editum.

Una propuesta divulgativa y formativa desde las Matemáticas y la Filosofía

Álvaro Sánchez González
asanchez35@educa.madrid.org
IES Gerardo Diego (Pozuelo de Alarcón, Madrid)

Vicente Caballero de la Torre
vicente.caballero@educa.madrid.org
IES Gerardo Diego (Pozuelo de Alarcón, Madrid)

Núcleo temático: Comunicación y divulgación

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Filosofía y Matemáticas no son sino dos disciplinas que procuran dar una explicación del mundo que nos rodea, cada cual desde sus categorías y estructuras conceptuales que le son propias. En no pocas ocasiones se han difuminado las fronteras entre ambas, sin saber muy bien cuándo se hace una y cuándo la otra disciplina. En general, no puede comprenderse plenamente el calado de los avances científico–matemáticos sin conocer el contexto histórico en que se originaron. Recíprocamente, las teorías filosóficas surgidas de ciertos dilemas responden, al menos en parte, a los planteamientos científicos que flotaban en el saber de cada tiempo.

Los autores de esta comunicación han pretendido, mediante sesiones de introducción con alumnado, cursos de formación de profesorado especialista y conferencias divulgativas a público general, trasladar parte de esos momentos de la Historia en los que Matemáticas y Filosofía han entrecruzado sus caminos.

Palabras clave: infinito, filosofía, divulgación científica, interdisciplinariedad.

La presente comunicación es una sinopsis de las ideas principales que exponen los autores, desde sus especialidades respectivas de Matemáticas y Filosofía, para mostrar la influencia mutua de ambas disciplinas y la importancia de la contextualización de los conocimientos y avances de cada época.

Los autores de esta comunicación realizaron un ciclo de conferencias para alumnado de Excelencia del IES Los Rosales (Móstoles) en el curso 2017/2018 que a su vez fue el germen de una propuesta de Formación de Profesorado que fue aceptada en 2020 por el Centro Territorial de Innovación y Formación de Madrid Capital. En el curso académico 2021/2022 se impartió una formación de 18 horas titulada "Matemáticas y Filosofía: Encuentros y desencuentros a lo largo de la Historia" y que, dada su buena acogida, se reeditó en el curso 2022/2023. De aquellas charlas derivó una sesión para público general organizada en el Ateneo de Madrid en junio de 2022, y en el presente curso 2023/2024 se ha vuelto a realizar una versión adaptada para alumnado de Bachillerato en el IES Gerardo Diego (Pozuelo de Alarcón). En el futuro se prevé seguir realizando acciones formativas como las anteriores, con una línea discursiva similar.

1. Objetivos:

Con esta formación/divulgación perseguimos, según el formato:

- Mostrar hitos matemáticos en el contexto histórico en que se originaron.

  En el aula, durante una clase formal, suele ser complicado dar una adecuada contextualización de los procesos matemáticos que se estudian. Esto puede suplirse con algunas sesiones extraordinarias *ad hoc* y, si hubiera la oportunidad, puede ser fructífero hacerlo también en colaboración

(interdisciplinar) con las materias de Historia y/o Filosofía, entre otras.

- Poner de manifiesto la vinculación entre ambas disciplinas.

  Más allá del tronco común del que surgen Filosofía y Matemáticas, se pueden rastrear varios ejemplos en los que los dilemas filosóficos tratan de

argumentarse con razonamientos matemáticos y, viceversa, algunos resultados de la matemática que trascienden a la propia disciplina y dan lugar a corrientes filosóficas.

- En particular, utilizar el concepto de *infinito* como hilo conductor histórico.

  Parafraseando a Hilbert, el infinito posiblemente haya sido la idea que más pasiones ha levantado en la Humanidad, y la prueba está en la multitud de controversias, dilemas y paradojas que ha generado... pero también en que ha sido el motor de avance en una y otra disciplina. Desde la Antigua Grecia y hasta la actualidad se pueden encontrar ejemplos ilustradores de lo complicado que ha sido dominar con rigor este concepto (si es que, acaso, se haya conseguido plenamente...).

2. Estructura:

Es evidente que la estructura de las sesiones viene determinada por dos factores clave que son la duración de la actividad y el público al que se dirige. Se han realizado esencialmente tres formatos diferentes:

- Sesiones con alumnado: no más de 6 horas repartidas en tres o cuatro sesiones, centradas en los grandes períodos de la Historia (Edad Antigua, Medieval, Moderna y Contemporánea). Principalmente se pretende mostrar cómo se influyen mutuamente los contextos históricos, los dilemas filosóficos y los avances científicos en general y matemáticos en particular. Cuando los conocimientos del alumnado lo permiten, se puede profundizar en algún concepto concreto. Se ha complementado con pequeños trabajos, preguntas de reflexión o debates de los propios alumnos.

- Sesiones con profesorado: curso de formación de 18 horas con un programa estructurado en 6 sesiones en las que se realiza un recorrido filosófico–matemático en orden cronológico (con algunas licencias temporales). Al profesorado de Filosofía se le brinda la oportunidad de conocer aspectos científicos que surgen y deben tratar en sus temarios, mientras que al

profesorado de Matemáticas se le ofrece la posibilidad de contextualizar en origen los procedimientos que se desarrollan en las clases. Es de remarcar que también hubo asistentes interesados en los temas tratados pero ajenos a estas dos disciplinas. Puntualmente se sugirieron debates o ideas para la implementación de actividades interdisciplinares.

- Sesiones con público general: una única sesión de duración máxima de 2 h. Al ser de carácter divulgativo, la profundidad con la que se trata cada cuestión es mínima aunque se hace hincapié en cuestiones más cualitativas que permiten al oyente percibir las ideas relevantes.

3. Ideas principales:

Durante las sesiones, ya sean de uno u otro tipo y por tanto en mayor o menor profundidad, se abordan las cuestiones siguientes:

- Surgimiento común y fronteras difusas: por un lado el consabido paso del mito al logos y el surgimiento de las ciudades–estado (singularmente con la aparición de la *moneda* como forma de transacción económica) y por otro las nociones de protogeometría mesopotámica y la toma de conciencia sobre la inexactitud y falta de sistematicidad de los métodos existentes, hicieron que Filosofía y Matemáticas *nacieran* de la mano de Thales y Pitágoras.

- La Filosofía, en cierto modo, busca una explicación discursiva al mundo que nos rodea mientras que las Matemáticas lo hacen a través de una suerte de razonamiento objetivo. Sería Aristóteles quien estableciera la lógica como herramienta clave, con la idea de *demostración* como máximo exponente del silogismo aristotélico. En cualquier momento histórico pueden apreciarse una búsqueda de rigor (entendido según los cánones de cada momento) así como el concepto de infinito como un constante generador de controversias pero también de oportunidades para solventarlas.

- Para cada período, ilustrar el entrelazamiento de disciplinas aportando multitud de ejemplos de personajes históricos y algunas de sus contribuciones más relevantes.

  En la Edad Antigua, centrada singularmente en Grecia, los pitagóricos y el descubrimiento de los inconmensurables, Zenón y sus paradojas, Eudoxo y el volumen del cono, Euclides y la infinitud de los números primos, Arquímedes y el principio de exhaución.

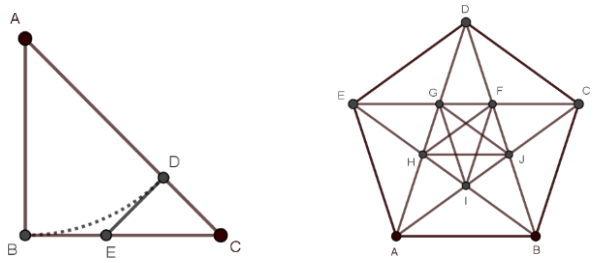


Imagen 1. Inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado y de un pentágono con respecto a su lado.

En la Edad Medieval se cita la figura de Nicolás de Oresme y la Regla de Merton como representativas de las tribulaciones de los Escolásticos acerca de la idea de movimiento de Aristóteles.

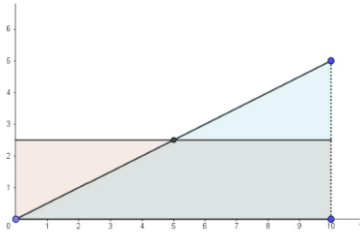


Imagen 2. Ilustración de la Regla de Merton

En la Edad Moderna se recuperan razonamientos infinitesimales como se ilustra con Stevin y el cálculo del punto de equilibrio de un triángulo, Pascal y su *apuesta* sobre la existencia de Dios, y por supuesto Fermat y Barrow entre otros hasta llegar a la culminación que Newton y Leibniz llevaron a cabo en cuanto al surgimiento del cálculo infinitesimal, pero que tendría que esperar

casi otros dos siglos para ser formalizada a partir de D'Alembert y la definición de límite.

	Si Dios existe	**Si Dios no existe**
Apostar por la existencia	Salvación $+\infty \cdot p$	*Statu quo* $a \cdot (1 - p)$
No apostar	Condenación $-\infty \cdot p$	*Statu quo* $b \cdot (1 - p)$

Imagen 3. Tabla ilustrativa de la apuesta de Pascal, adaptada de Atiba, J. (2004).

Finalmente, en la Edad Contemporánea nos centramos en la fundamentación de las Matemáticas: se cita a Cantor y la teoría de cardinales, Russell y su paradoja, Hilbert y la crisis de fundamentos que dio lugar al enfrentamiento entre el formalismo logicista y el constructivismo finitista, concluyendo la exposición con Turing y el Problema de la parada, asociado al surgimiento de los algoritmos y la computación moderna.

4. Conclusiones:

Esperamos que la propuesta presentada alcance el doble objetivo por el que se diseñó y por el que se seguirá llevando a cabo. Por un lado, desde el prisma de la divulgación, pretende hacer una aproximación extracurricular a algunos tópicos cruciales de la Historia de las Matemáticas, singularmente la idea de infinito, contextualizada históricamente. En segundo lugar, con la debida formación y reflexión del profesorado, algunas de estas ideas pueden ser utilizadas en el aula de Matemáticas, pero también en colaboración con otras disciplinas para ofrecer algunas actividades pluridisciplinares que enriquezcan la formación del alumnado.

En definitiva, con la comunicación de esta acción formativa *únicamente* pretendemos mostrar nuestra contribución para brindar al alumnado en particular, y la Sociedad en general, un acercamiento a (una parte de) las Matemáticas y su contexto que, esperamos, sea también de interés de la comunidad docente.

Referencias

Atiba, J. (2004). La apuesta de Pascal, una idea fecunda pero en absoluto indiscutible. *Nexo. Revista de Filosofía,* 2, 45–78.

Bernal, J. (1968). *Historia social de la Ciencia.* Península, Barcelona.

Bombal, F. (2010). *Rigor y demostración en matemáticas. Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat.* vol 104, 1.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la Matemática* (trad. M. Martínez). Alianza, Madrid.

Dunham, W. (2004). *Viaje a través de los genios.* Pirámide, Madrid.

Farrington, B. (1972). *Ciencia y Filosofía.* Ariel, Barcelona.

Hawking, S. (2004). *Dios creó los números.* Crítica, Barcelona.

Riera, J. A. (2004). El estudio de la variación en la Edad Media y su relación con el concepto de límite. *Misc. Mat.* 39.

Tarrés, J. (2017). Matemáticas y movimiento en el s. XIV. *Pensamiento matemático,* vol VII, 2.

Turing, A. M. (1936). On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. *J. of Math.* 58, 5.

Resolviendo problemas ¿Cueces o enriqueces?

Autora: Elena Gajate Paniagua
Eegp16@educastillalamancha.es
Elena.Gajate@uclm.es
IES Maestro Juan de Ávila (Ciudad Real), UCLM

Núcleo temático: Conexiones. Procesos. Experiencias de aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Decía G. Pólya que es mejor resolver un problema de cinco formas diferentes que resolver cinco problemas diferentes de la misma forma. Una actividad que de entrada es sencilla puede dar mucho juego si hacemos las preguntas adecuadas y, sobre todo, si conseguimos que sean nuestros alumnos los que se hagan esas preguntas. Vamos a presentar un problema de Dan Meyer que, dependiendo del nivel en que lo utilicemos, nos permitirá trabajar conceptos como fracciones, proporcionalidad, decrecimiento exponencial, funciones cuadráticas, etc.

Palabras clave: modelización, conexiones internas, resolución de problemas

1. Introducción

A menudo se llaman problemas a los ejercicios que vienen al final de un tema en el que se han explicado unas u otras técnicas que ahora hay que aplicar. Suele haber una lista más o menos larga para que los conceptos queden bien “cocidos”. Sin embargo, podemos proceder al revés: utilizar los problemas como método de aprendizaje para introducir nuevos conceptos y, sobre todo, para potenciar el razonamiento y la creatividad de nuestros estudiantes.

Así, un problema puede convertirse en una situación de aprendizaje en la que, además de introducir conceptos y saberes básicos, trabajemos la **competencia específica número 3**: *"Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento"* y **la 5**: *"Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado".* Pero para ello no podemos conformarnos con encontrar la solución, sino enriquecerlo e ir más allá para sacarle el mayor partido posible.

1. El problema

El problema que vamos a presentar lo plantea Dan Meyer en uno de sus vídeos de

"Matemáticas en tres actos" y nos puede dar mucho juego en distintos cursos tanto de ESO como de Bachillerato.

Si superponemos dos lentes que dejan pasar un 50% de luz cada una, ¿Cuánta luz llegará en total a los ojos?

Después de discutir por qué no es el 0% (como los más irreflexivos se lanzan a contestar) y resolver la situación relacionando proporciones, fracciones y porcentajes, deberían surgir de forma espontánea algunas cuestiones.

2. Las preguntas

La primera y más obvia pregunta es:

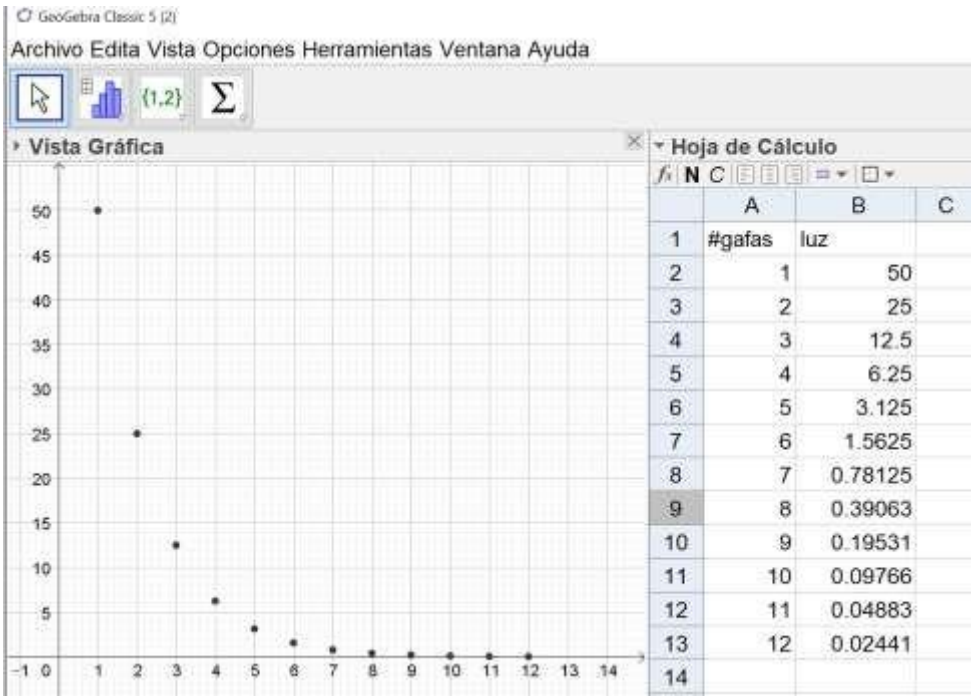
¿Qué sucede si superponemos tres, cuatro ó más lentes?

Fracción de una fracción de una fracción… es más fácil expresarlo con potencias, que así pueden introducirse de forma natural en los cursos más bajos.

Y, a partir de ahí:

¿Podemos generalizar a un número n de lentes?

Aquí aparece el sentido algebraico; podemos conformarnos con expresar la cantidad de luz en función de n pero también elaborar de una tabla con la hoja de cálculo usando, bien la fórmula de recurrencia, bien la general; si además hacemos una gráfica, esto nos puede llevar a hablar de la función exponencial



	A	B	C
1	#gafas	luz	
2	1	50	
3	2	25	
4	3	12.5	
5	4	6.25	
6	5	3.125	
7	6	1.5625	
8	7	0.78125	
9	8	0.39063	
10	9	0.19531	
11	10	0.09766	
12	11	0.04883	
13	12	0.02441	
14			

¿Cuántas lentes debemos superponer para que pase menos de (por ejemplo) un 10%?

Se nos plantea una inecuación exponencial que en 4º ESO o en bachillerato nos da pie a hablar de logaritmos, y en cursos más bajos a encontrar una forma eficiente de resolverla con la calculadora o la hoja de cálculo.

¿Puede suceder que en algún momento no pase nada de luz? ¿Qué entendemos por "nada"? ¿Es lo mismo una "nada" matemática ideal que una "nada" real?

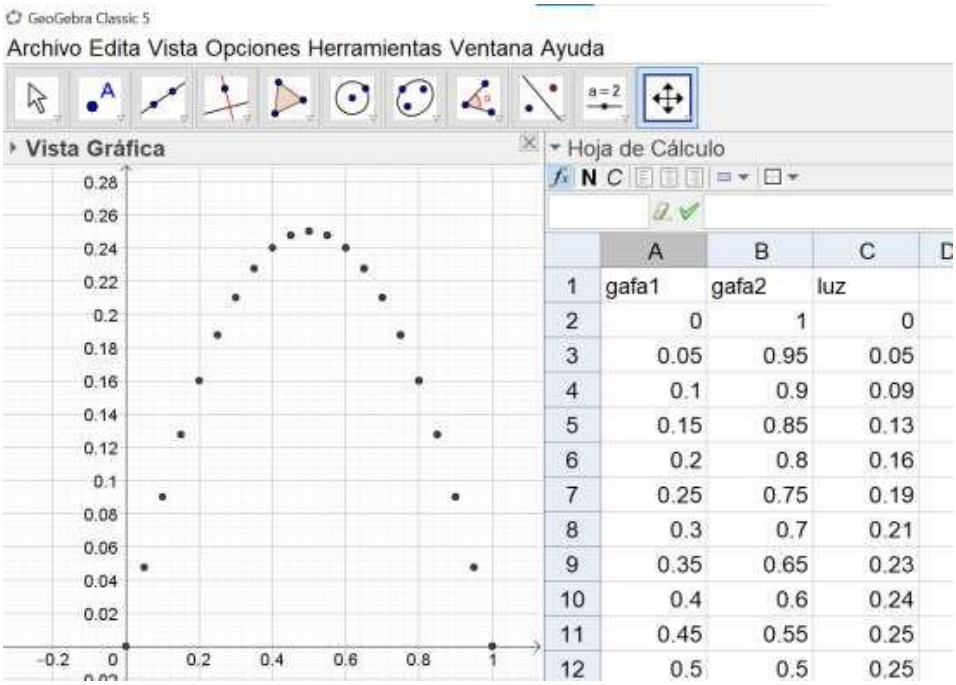
Aquí podemos hablar de aproximaciones, pero también de límites, de asíntotas… de manera intuitiva en la ESO o más formal en bachillerato.

¿Se filtrará la misma cantidad de luz si en lugar de dos lentes del 50% usamos una del 40% y otra del 60%? ¿Importa el orden en que se coloquen?

Se puede comprobar que el orden no importa, pero pasa menos luz: Aunque los filtros de las dos lentes sumen el 100%, no es lo mismo 40%+60% (pasa el 24%) que 50%+50% (pasa el 25%) ó 10%+90% (pasa el 9%)

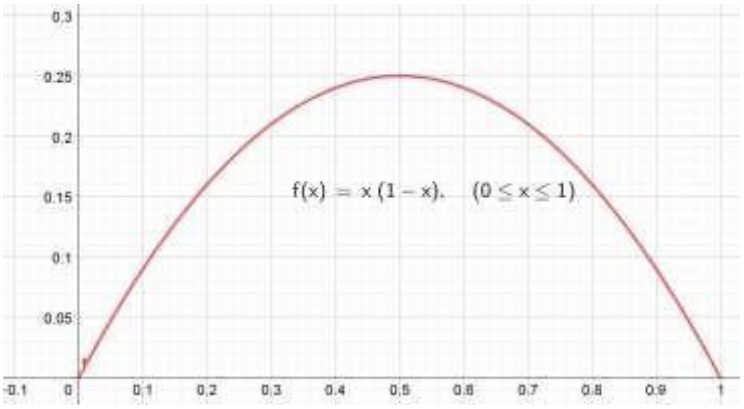
¿Cómo se conseguirá filtrar más o menos luz con dos lentes cuyos filtros sumen un 100%?

Según el curso en el que estemos, pode mos hacer una aproximación con una tabla:



	A	B	C
1	gafa1	gafa2	luz
2	0	1	0
3	0.05	0.95	0.05
4	0.1	0.9	0.09
5	0.15	0.85	0.13
6	0.2	0.8	0.16
7	0.25	0.75	0.19
8	0.3	0.7	0.21
9	0.35	0.65	0.23
10	0.4	0.6	0.24
11	0.45	0.55	0.25
12	0.5	0.5	0.25

O generalizar con una función cuadrática: si una lente filtra una proporción x (y por tanto, la otra $1-x$), la luz que pasa al final viene dada por la expresión cuadrática $x(1-x)$, cuya gráfica es una parábola que alcanza su máximo para $x = 0.5$.



Además, podemos razonar usando la simetría de la situación, buscar los casos extremos… algo intrínseco a la actividad matemática.

3. Los problemas "hijos"

Una vez que le hemos sacado a un problema todo el jugo es muy enriquecedor pedirles a los alumnos que propongan variantes, lo que nos permite evaluar hasta qué punto han comprendido lo trabajado y si son capaces de abstraer de él los elementos esenciales:

¿Se te ocurren situaciones (más o menos realistas) en las que nos encontremos unos conceptos matemáticos parecidos a las que hemos usado en este problema?

Pueden surgir ejemplos obvios (cortinas, cremas solares), no tanto (descuentos encadenados, pérdida de valor de un bien, desintegración atómica…) o aparentemente alejados, como el ejemplo de las disoluciones (las dosis homeopáticas o el clásico problema del bebedor clandestino que se echa cada día un trago de una botella de ginebra ajena y la rellena con agua para que no se note la merma producida; podemos hacer una versión con leche para que no se nos acuse de fomentar el alcoholismo entre la juventud).

4. Algunas reflexiones

¿Por qué es interesante extraer muchas actividades de un problema? Citando a la profesora australiana Michaela Epstein:

- Acostumbramos a nuestros alumnos a analizar los conceptos desde distintos ángulos.
- Les ayudamos a establecer conexiones entre conceptos.
- Ahorramos tiempo.

Pero para conseguir que todos o gran parte de los alumnos se motiven y participen es importante que en la clase haya un ambiente de diálogo y participación, donde no se desprecie ni ridiculice ninguna aportación (por tonta o absurda que pueda parecernos) y se insista en que las matemáticas son un saber que no está acabado y donde la creatividad es tan importante como el rigor.

Referencias

Epstein, M *https://x.com/MathsCirclesOz/status/1692265296667550008?s=20*

Meyer, D. (2012). *Three-Act Math*. *https://threeacts.mrmeyer.com/doublesunglasses/*

La modelización del oloide para la mejora de la visualización tridimensional

Lucía Rotger García
lucia.rotger@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Ángeles Ruiz González
a.ruiz.gonzalez.matematicas@gmail.com
IES Torcuato Fernández-Miranda (Arroyomolinos, Madrid)

Juan Miguel Ribera Puchades
j.ribera@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Núcleo temático: Conexiones

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

Este estudio explora la implementación de modelos de oloides impresos en 3D dentro de un contexto educativo STEAM para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. A través de la modelización matemática, los modelos manipulables de oloides se utilizan para desarrollar habilidades de resolución de problemas y pensamiento espacial en el alumnado. Utilizando un taller de visualización matemática, se facilita al alumnado la interacción directa con las formas geométricas, permitiéndoles explorar sus propiedades de manera táctil y visual. Los hallazgos indican que los modelos impresos en 3D promueven un aprendizaje más interactivo. El uso de estos modelos no solo mejora la comprensión matemática y la motivación sino también fomenta un enfoque interdisciplinario en la educación, vinculando las

matemáticas con la tecnología y las artes. Estos resultados subrayan el potencial de la impresión 3D como herramienta educativa.

Palabras clave: Educación STEAM, Impresión 3D, Modelización matemática, Oloide, Visualización.

Las matemáticas ocupan un lugar central en los contextos STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas), actuando como el eslabón que une estas disciplinas diversas para fomentar un enfoque interdisciplinario en la educación. Este enfoque no solo prepara a los estudiantes para enfrentarse a un entorno global y tecnológicamente avanzado, sino que también promueve la aplicación de conocimiento en formas creativas y prácticas, fundamentales para una educación integral y significativa (Moreno-Verdejo, 2023). A través de las matemáticas, los estudiantes desarrollan habilidades esenciales y aprenden a manejar y resolver problemas, facilitando así su desarrollo en diversas áreas del conocimiento y práctica profesional.

La modelización matemática, tal como la proponen Blum y Leiß (2007), ofrece una estrategia para aplicar matemáticas en contextos reales, promoviendo un aprendizaje significativo a través de la solución de problemas auténticos. Al integrar la modelización matemática en el currículo, los estudiantes no solo desarrollan habilidades para formular y resolver problemas matemáticos, sino que también aprenden a interpretar y validar sus resultados en diversos contextos, una habilidad esencial en todas las disciplinas STEAM (Moreno-Verdejo, 2023).

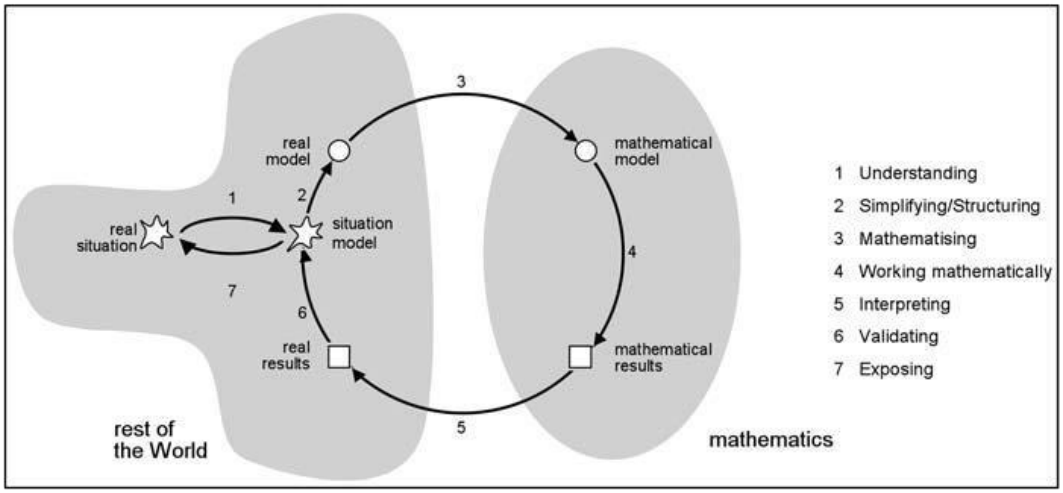


Imagen 1. Ciclo de modelización matemática. Fuente: Blum y Leiß (2007)

En este contexto, la modelización tridimensional, especialmente a través de la impresión 3D, se destaca como un recurso educativo para la enseñanza y aprendizaje de la geometría y otras áreas matemáticas. Al convertir conceptos abstractos en objetos manipulables, la impresión 3D permite a los estudiantes explorar a través de la vista y el tacto las propiedades geométricas y espaciales de figuras complejas, facilitando así un entendimiento más profundo y concreto (Bua, 2020). La modelización tridimensional se aprovecha para mejorar la comprensión espacial, ofreciendo una experiencia educativa que es tanto intuitiva como interactiva. La creación de modelos físicos no solo mejora el aprendizaje matemático, sino que también integra la belleza y la funcionalidad de las matemáticas en un formato accesible y estimulante (Ribera y Rotger, 2023). Además, la impresión 3D facilita esta integración al proporcionar una herramienta tangible para explorar, resolver y evaluar problemas de modelización matemática. Los objetos impresos en 3D actúan como representaciones físicas de conceptos abstractos, lo que permite a los estudiantes manipular, examinar y entender mejor las estructuras matemáticas complejas (Lee *y otros*, 2015).

El uso de estos materiales manipulativos impresos en 3D en la enseñanza de las matemáticas ofrece una alternativa más interactiva y exploratoria comparada con los métodos tradicionales de enseñanza que se limitan a la representación geométrica en libros de texto y pizarras. Estas representaciones clásicas, aunque útiles para introducir los conceptos teóricos, a menudo no capturan completamente la esencia

de los objetos geométricos ni facilitan un entendimiento profundo de sus propiedades, lo que puede llevar a que los estudiantes simplemente memoricen la información sin comprenderla realmente (Flores-Martínez y Rico, 2015). Al contrario, los manipulativos físicos, permiten a los estudiantes interactuar directamente con las formas, explorando y descubriendo propiedades por sí mismos, lo que no solo enriquece el aprendizaje, sino que también promueve un mayor compromiso y curiosidad hacia la materia (Alsina, Burgués y Fortuny, 2011).

De esta forma, el objetivo principal de este estudio es explorar y evaluar el impacto del uso de materiales manipulativos impresos en 3D en el pensamiento espacial y la visualización geométrica a través de una experiencia educativa de modelización 3D diseñada con una perspectiva STEAM.

1. Metodología

Este estudio se llevó a cabo en el curso académico 2021-22 en el contexto de un taller de visualización matemática integrado dentro del currículo de la materia de matemáticas en un grupo de 25 estudiantes del curso 1ºESO en el centro educativo IES El Burgo-Ignacio Echeverría, Las Rozas, de la Comunidad de Madrid.

1.1 Diseño de la experiencia

El taller fue diseñado específicamente para explorar el uso de materiales impresos en 3D para enseñar propiedades geométricas a través de la manipulación directa y la exploración visual. El diseño de este se basó en la guía generada bajo el paraguas del proyecto “Marzo, mes de las matemáticas” denominada “Materiales 3D: El oloide” (Cuadrado-Sáez *y otros*, 2021).

El oloide es una estructura geométrica, creada por el matemático y artista Paul Schatz (1969), que se caracteriza por su habilidad única para rodar suavemente a lo largo de una trayectoria continua. Esta figura se forma mediante la intersección ortogonal de dos círculos idénticos, donde la distancia entre los centros es igual al radio de los círculos. El movimiento constante y fluido del oloide, donde cada punto de su

superficie toca el plano de apoyo, lo convierte en un objeto de estudio ideal para investigar conceptos geométricos y propiedades de las superficies regladas

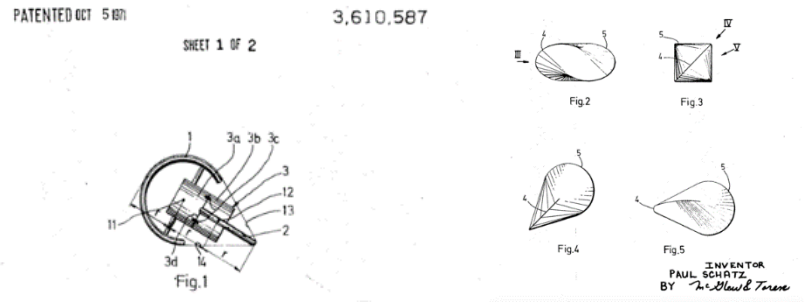


Imagen 2. Patente original del Oloide. Fuente: Schatz (1969).

En los siguientes apartados se presenta una secuencia educativa diseñada para el estudio del oloide a través de diferentes modelos 3D mediante la exploración física y la experimentación.

1.1.1 Modelo de cartulina de los círculos generadores del oloide

Se puede construir un modelo simple de oloide utilizando materiales de fácil acceso: cartulina o cartón de cierta rigidez, un compás para trazar los círculos, y tijeras para el corte. El proceso comienza con el trazado de dos círculos de igual radio sobre la cartulina, asegurando marcar claramente el punto central de cada uno, que posteriormente son recortados. Para poder ensamblar el modelo, se deben preparar estos círculos generados mediante un corte rectilíneo que se extiende desde el borde externo hasta la mitad del radio; la anchura del corte debe coincidir exactamente con el grosor del material seleccionado. Finalmente, los dos círculos se insertan uno dentro del otro en los cortes previamente realizados perpendicularmente. En la animación realizada por José Luis Muñoz en Geogebra (*https://www.geogebra.org/m/mfddmhd5*) se puede visualizar la construcción del modelo del oloide (Imagen 3) a partir de la disposición perpendicular de los dos círculos.

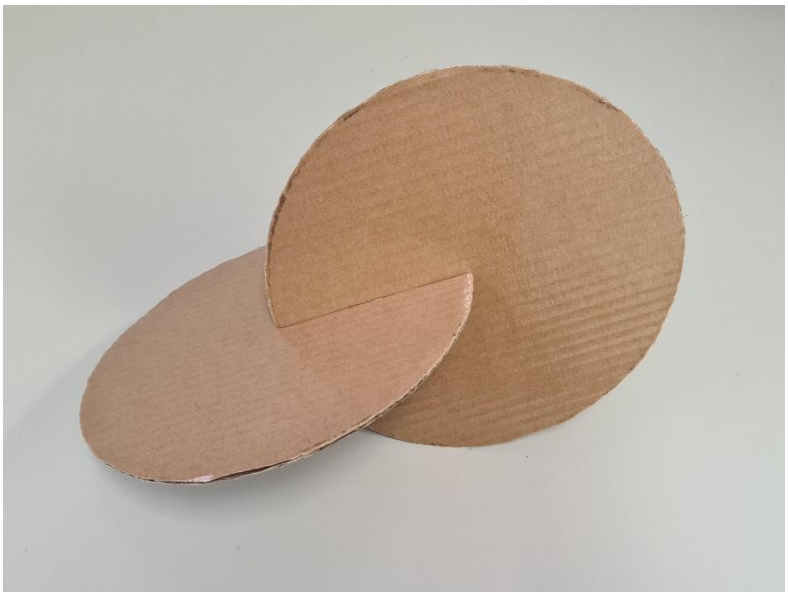


Imagen 3. Modelo de cartón de los círculos genereadores del oloide. Fuente: Elaboración propia.

La rigidez del material seleccionado es crucial para la estabilidad estructural del modelo. Materiales más rígidos garantizan una mejor estabilidad, manteniendo la perpendicularidad esencial para el correcto giro del oloide. De hecho, el primer modelo trabajado fue con una hoja de papel y se podía observar que, aunque colocados perpendicularmente no se mantenía rígido.

1.1.2 Modelo de los círculos generadores del oloide impreso en 3D

Para fabricar un modelo tridimensional de los círculos generadores del oloide utilizando impresión 3D, se requiere diseñar, mediante herramientas CAD, dos discos idénticos, cada uno representando un círculo generador. Estos discos deben ser configurados con un grosor mínimo, por ejemplo 2mm, para facilitar su capacidad de rotación y garantizar la estabilidad estructural una vez impresos en 3D.

Inicialmente, se modelan los discos con el mismo radio y se realizan cortes que llegan hasta la mitad del radio, con una anchura equivalente al grosor del disco, más la holgura necesaria para encajarlos, que puede variar según la precisión de la impresora 3D utilizada. Esta configuración permite un ensamblaje perpendicular, asegurando que los discos compartan un radio común. Una vez completado el diseño, los discos se imprimen por separado en 3D; de esta forma, se facilita la impresión, se

economiza material y se hace posible la visualización de la construcción del modelo (ver Figura 4). Los archivos para su impresión están disponibles en la página web del proyecto "Marzo, mes de las matemáticas" (*https://marzomates.webs.ull.es/material-3d/*).

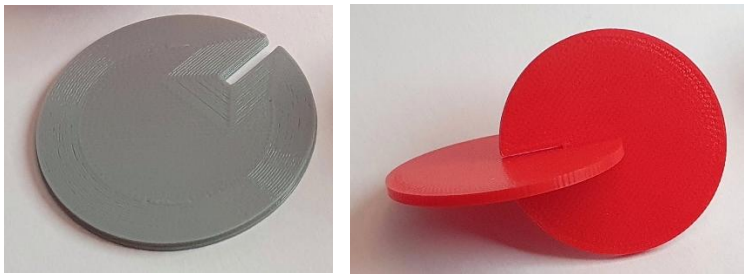


Imagen 4. Modelo de los círculos generadores del oloide impreso en 3D. Fuente: Cuadrado-Sáez *y otros* (2021).

Aunque este modelo cumple con la definición matemática de los círculos generadores del oloide, puede presentar problemas de estabilidad en la conexión de ambos discos. Un modelo alternativo que asegura mejor la unión y la perpendicularidad de los discos está disponible en la plataforma Thingiverse (*https://www.thingiverse.com/thing:4610386/files*) .

Imagen 5. Modelo mejorado de los círculos generadores del oloide impreso en 3D. Fuente: Elaboración propia.

Estas modificaciones permiten a los estudiantes experimentar y evaluar el proceso de mejora del prototipo mediante estas tres versiones de los círculos generadores del oloide.

1.1.3 Modelo del oloide impreso en 3D

El modelo completo del oloide se fabrica a partir de la envoltura convexa de dos discos que se intersecan perpendicularmente, cada uno posicionado para compartir un radio

común. Como se puede visualizar en la parte izquierda de la Imagen 6, este modelo se puede elaborar a partir de los discos de cartulina conectando los puntos de un círculo con los puntos del otro utilizando segmentos rectos, mediante hilos. De esta forma, se puede replicar la envoltura convexa de los discos.

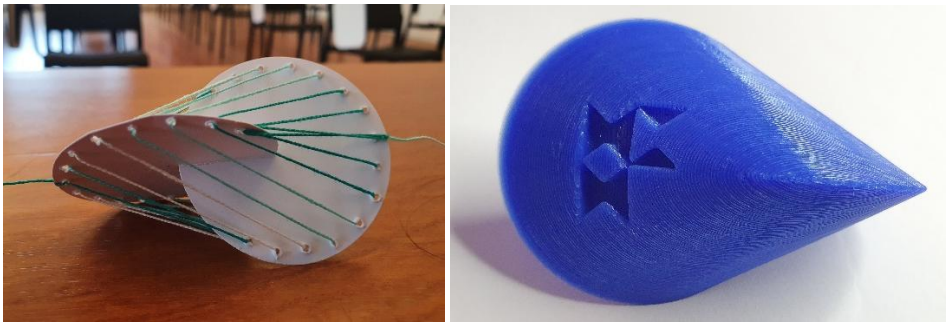


Imagen 6. Modelo mejorado de los círculos generadores del oloide impreso en 3D. Fuente: Elaboración propia.

Para una fabricación más precisa, el oloide también se puede modelar utilizando herramientas CAD, preparando el diseño para ser exportado y adecuado para impresión 3D. Este proceso puede incluir la división del modelo en dos mitades, lo que facilita la impresión sin necesidad de soportes. Cada mitad es impresa con su superficie plana de corte alineada con la base de la impresora para minimizar las imperfecciones y asegurar la calidad de la impresión. Estos archivos también se pueden encontrar en la web del proyecto mencionado. Por último, las dos mitades del oloide se unen. Esto se realiza generalmente con adhesivos específicos para los materiales de impresión, cuidando que la alineación sea precisa para mantener la funcionalidad del modelo. Este método de impresión segmentada optimiza el uso del material y reduce el tiempo de impresión.

1.1.4 La experiencia a través de la resolución de problemas

La implementación secuencial de los modelos descritos previamente facilita la exploración detallada de las propiedades geométricas inherentes a los círculos generadores del oloide, así como del propio oloide.

En la fase inicial, se aborda la capacidad de rotación de ciertos objetos tridimensionales, permitiendo así que el alumnado recuerde y examine las características específicas de rotación exhibidas por objetos cotidianos como pelotas,

ruedas o rollos de papel. Estos elementos se matematizan con las formas geométricas de la esfera y el cilindro, asociando dichas figuras con la capacidad de girar.

A continuación, se introduce el oloide a través de los círculos que lo generan. Los modelos realizados en cartulina o cartón de estos círculos facilitan la experimentación con la rotación; no obstante, la falta de firmeza de los prototipos sugiere la necesidad de materiales más sólidos. Por este motivo, se recomienda el uso de modelos impresos en 3D para profundizar en esta exploración. Durante esta etapa, se plantean problemas de matemáticas vinculados a la estructura geométrica, tales como:

- *¿De qué manera gira el oloide y cómo llega a detenerse?*
- *¿Cuántos planos de simetría posee?*

Estas cuestiones iniciales promueven una familiarización con el concepto del modelo. Seguidamente, se introduce el modelo completo del oloide impreso en 3D, permitiendo comparaciones con los prototipos previos de los círculos que lo generan. Esta comparativa da paso a preguntas más específicas sobre el modelo completo del oloide, como:

- *¿Cómo se podría seccionar el oloide en dos partes idénticas con un único corte?*
- *¿Qué trayectoria describe el oloide al rodar?*

Estas preguntas finales estimulan el debate y la comparativa tanto con los prototipos anteriores como con otras estructuras geométricas tridimensionales, fomentando así un análisis más profundo y una comprensión más rica del oloide y sus propiedades.

2. Resultados y discusión de la experiencia

La implementación del taller de visualización matemática utilizando modelos de oloides impresos en 3D ha permitido una exploración profunda y práctica de las propiedades geométricas avanzadas, tanto de los círculos generadores como del oloide completo. Los resultados obtenidos de esta experiencia educativa han revelado

la utilidad y el impacto de utilizar manipulativos impresos en 3D en la enseñanza de la matemática y la integración interdisciplinaria dentro del contexto STEAM.

La comparación entre los modelos de cartulina y los impresos en 3D mostró una clara preferencia y mejores resultados con el uso de la impresión 3D. Los modelos de cartulina, aunque útiles como introducción, presentaron limitaciones en términos de durabilidad y precisión. En contraste, los modelos impresos en 3D no solo ofrecieron una mayor precisión y estabilidad, sino que también permitieron a los estudiantes explorar más a fondo y con mayor exactitud las propiedades del oloide. Esto se evidencia a través de frases expresadas por algún participante como: “Lo que más me ha gustado es que hemos tenido la figura en físico y podíamos experimentar con ello y lo que menos me ha gustado ha sido que algunas figuras de papel no funcionaban”.

En general, el alumnado que participó en los talleres mostró una mejora significativa en su comprensión de las propiedades geométricas tridimensionales y de la capacidad de rotación del oloide. Así mismo, durante la puesta en marcha del taller se encontraron numerosas confusiones entre el vocabulario matemático geométrico bidimensional y tridimensional. Algunos conceptos, como los discos (3D), fueron confundidos por círculos o circunferencias (2D).

Además, el taller permitió presentar conceptos geométricos complejos como la envoltura convexa y las propiedades de simetría en tres dimensiones. La manipulación física de los modelos permitió a los estudiantes explorar estas propiedades de manera concreta a través de la resolución de los problemas propuestos. Los problemas como determinar la trayectoria de rotación del oloide o los puntos de parada, promovieron un pensamiento analítico y crítico, esencial en los contextos STEAM (Moreno-Verdejo, 2023).

Por último, la introducción de la impresión 3D atrajo un mayor interés por parte de los estudiantes hacia las matemáticas. Se observó que la capacidad de interactuar con los modelos y de visualizar sus resultados inmediatos incrementó la motivación y el

compromiso de los estudiantes con los problemas propuestos como mencionan Alsina, Burgués y Fortuny (2011).

3. Conclusiones

El estudio sobre la implementación de modelos oloides impresos en 3D en un contexto educativo STEAM ha promovido la aplicación creativa y práctica del conocimiento matemático. A través de la modelización matemática, los estudiantes desarrollan habilidades esenciales y aprenden a manejar y resolver problemas, facilitando así su desarrollo en diversas áreas del conocimiento y práctica profesional.

Imagen 7. Aula en la que se impartió el taller. Fuente: Elaboración propia.

La adopción de la impresión 3D para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y otras áreas matemáticas, como se propone en la modelización matemática de Blum y Leiß (2007), ha permitido aplicar matemáticas en contextos reales y promover un aprendizaje significativo. Al convertir conceptos abstractos en objetos manipulables, esta tecnología permite a los estudiantes explorar visual y táctilmente las propiedades geométricas y espaciales de figuras compleja. Este método también integra la belleza y la funcionalidad de las matemáticas en un formato accesible y estimulante para el alumnado.

Los resultados del estudio indican que el uso de materiales manipulativos impresos en 3D permiten a los estudiantes interactuar directamente con las formas, explorando y descubriendo propiedades por sí mismos, lo que enriquece el aprendizaje y promueve un mayor compromiso y curiosidad hacia la materia. Si bien podría ser interesante evaluar el impacto a largo plazo o la comprensión profunda de los conceptos matemáticos presentados en el taller.

Futuros estudios podrían explorar las configuraciones óptimas para la impresión 3D de modelos matemáticos de los discos que generan el oloide y del oloide, evaluando aspectos como la precisión geométrica, la minimización del uso de material, y la estabilidad estructural de los modelos impresos. El desarrollo de prototipos mejorados podría optimizar la experimentación y el aprendizaje en el aula. Además, dentro del contexto STEAM, puede ser de interés establecer proyectos colaborativos entre departamentos de matemáticas, arte, y tecnología para diseñar y fabricar modelos geométricos que también incorporen elementos artísticos y de diseño. Esto ayudaría a los estudiantes a ver la conexión entre las matemáticas y otras disciplinas creativas y aplicadas.

En conclusión, la integración de herramientas como la impresión 3D en los currículos escolares se presenta como una posible mejora tecnológica en el desarrollo del pensamiento espacial, la visualización geométrica y en la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de innovación concedido por el IRIE (Universitat de les Illes Balears) n.º PID232519 titulado “Estrategias sostenibles para el desarrollo de la visualización de los objetos tridimensionales en matemáticas (Mat3D_UIB)” y con la colaboración del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica (UIB).

Referencias

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis

Bua, J. B. (2020). Implementación de actividades de modelización, STEM y Maker en Enseñanza Secundaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 104*, 83-102.

Blum, W., y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Cuadrado-Sáez, L., Giraldo-Sastre, T., Maestre-Blanco, N. A., Muñoz-Casado, J. L., Ramírez-Uclés, R., Ribera-Puchades, J. M., y Rotger-García, L. (2021). *Materiales 3D: El oloide*. http://marzomates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2021/03/3D.pdf

Flores-Martínez, P., y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (Psicología. Sección Pedagogía). Madrid. Pirámide.

Lee, S.-G., Lee, J.-Y., Park, K.-E., Lee, J. H., & Ahn, S. (2015). Mathematics, Art and 3D-Printing in STEAM Education. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series E: Communications of Mathematical Education*, 29(1), 35-53. https://doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.1.35

Moreno-Verdejo, A. (2023). Nuevo currículo, ¿nuevas metodologías?. En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 43-55). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3

Ribera-Puchades, J. M. y Rotger-García, L. (2023). Una experiencia con BlocksCAD para el desarrollo del pensamiento computacional en alumnado con talento matemático. En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 569-580). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3

Schatz, P. (1969). *Tumbling Apparatus* (3 610 587). United States Patent Office. https://bit.ly/OloidPatent

Matemáticas jugando con el móvil

Víctor Monterreal Blázquez
vmonterreal@gmail.com
IES "Satafi"- Getafe (Madrid)

Núcleos temáticos: recursos para el aula. Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Magisterio, Ingenierías, Arquitectura, Matemáticas y Físicas).

RESUMEN

Hoy en día es indudable la presencia de teléfonos móviles y tabletas en la vida de nuestro alumnos, en muchos casos desde bien pequeños. Esta situación se puede aprovechar para fomentar su gusto por las Matemáticas con la gran variedad de juegos disponibles. Un buen uso de esta tecnología ayuda a desarrollar una de las competencias clave de la LOMLOE, que tienen adquirir a lo largo de la Educación Primaria y Secundaria: la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería.

De la gran variedad de juegos disponibles, tanto en Android como en IOS, he seleccionado para esta comunicación 10 con los que podremos trabajar geometría, cálculo, grafos y, en general, estrategias de resolución de problemas.

Palabras clave: juego, app, cálculo, geometría, problemas.

Día a día nuestros estudiantes tratan con móviles y tablets y se puede aprovechar ese uso para el desarrollo de su competencia matemática y de su gusto por las Matemáticas.

Vamos a revisar 10 juegos (apps) con Matemáticas en su interior y a esbozar algunas de las aplicaciones en el aula que pueden tener. También los podemos instalar en los nuevos paneles Android que llegan en sustitución de nuestras pizarras.

Con ellos se puede trabajar cálculo (mental), geometría, grafos y, en general, estrategias de resolución de problemas.

Y también podemos, como no, disfrutar nosotros jugando a ellos pero ¡cuidado que enganchan!

Echemos un vistazo:

1. Equilibrians

Imagen 1. Logo

Equilibrians es un juego que nos presenta a unos simpáticos personajes, los equilibrians, que no son más que números enteros positivos o negativos.

Imagen 2. Equilibrians

También aparecen fracciones (incluso negativas) que, como no llegan a 1, son aún huevos y una especie de máquinas para dividirlos y, en niveles altos, elevarlos al cuadrado o al cubo, hacerles la raíz cuadrada o cúbica o usarlos como exponente de una potencia de base 2.

Imagen 3. Fracciones y máquinas

El otro el elemento del juego es el balancín en el que hemos de colocar los personajes y que ha de quedar en equilibrio. A veces aparece con posiciones que multiplican su valor o con asientos electrificados que no se pueden usar.

Imagen 4. El balancín

Tiene muchos niveles de dificultad que pueden abarcar desde los últimos cursos de Primaria a Bachillerato o incluso a la Universidad, para mantener o mejorar el cálculo mental.

Puedes encontrar más información en mi artículo de la revista Suma 105 (Monterreal. 2023).

2. Number Sums

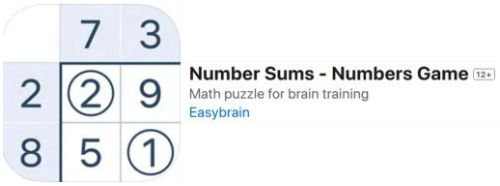


Imagen 5. Logo

Este es sencillo de explicar: en un cuadrado nos aparecen unas cantidades en la cabecera de filas y columnas y debemos conseguir que sean las que suman sus elementos a base de señalar los que son y borrar los que no nos sirven.

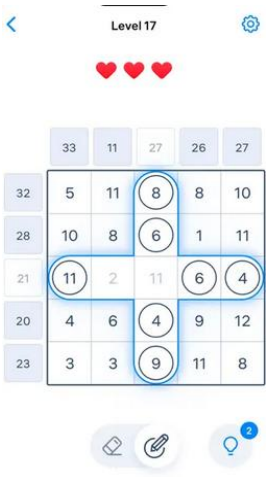


Imagen 6. Number Sums

Este juego de nuevo es eficaz para mantener o mejorar el cálculo mental. En este caso haremos caso al desarrollador y lo recomendaremos para alumnos a partir de Secundaria.

3. Pythagorea

Imagen 7. Logo

Pythagorea tiene más de 300 puzles en 28 categorías por lo que, si lo quieres utilizar sólo para disfrutar de las Matemáticas, tienes para un tiempo.

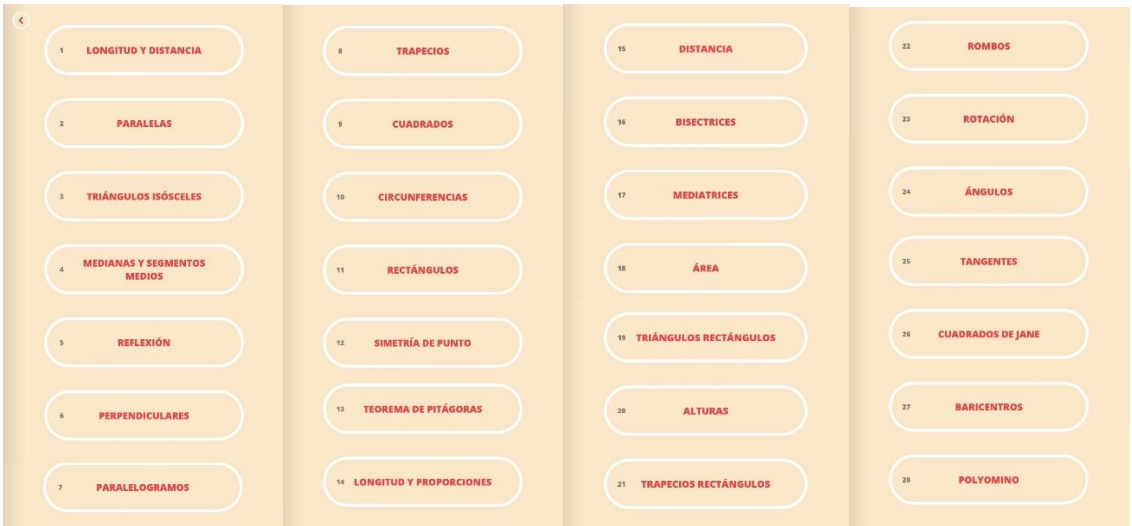


Imagen 8. Las 28 categorías

En cada nivel aparece una cuadricula de modo que sólo puedes marcar puntos en las intersecciones (nodos) y crear rectas o segmentos uniendo un par de nodos. También puedes crear nuevos nodos en las intersecciones de las rectas y, a partir de ellos, nuevas rectas o segmentos a fin de conseguir lo que se pide en cada nivel.

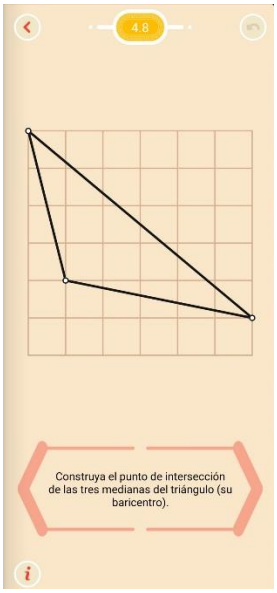


Imagen 9. Pantalla del nivel 4.8

Si aún te quedan ganas de más al acabar todos los niveles tienes Pythagorea 60º, que está formada por triángulos equiláteros, lo cual hace mucho más difícil cualquiera de los niveles.

Pythagorea 60°
HORIS INTERNATIONAL LIMITED

Imagen 10. Logo de Pythagorea 60º

Puedes encontrar más información y ejemplos para utilizar en clase en los distintos niveles de ESO en mi artículo de la revista Suma 101 (Monterreal. 2022).

4. Hocus

hocus.
gamebra.in Puzles
E Para todos

Imagen 11. Logo

Hocus es un juego sorprendente en el que hemos de meter el cubo rojo en el agujero moviéndolo por una figura de geometría imposible, que recuerda a los dibujos de Escher.

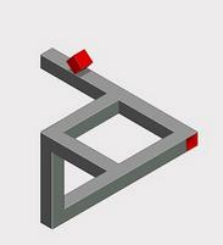


Imagen 12. Un nivel de juego

Con este juego se puede simplemente disfrutar o ayudar a trabajar el sentido geométrico a través de desplazarnos por estas figuras imposibles, para encontrar el camino. Yo lo recomendaría para los primeros niveles de ESO, aunque los más mayores disfrutarán también, especialmente cuando suba la dificultad.

Si te acabas todos los niveles puedes disfrutar con las novedades de Hocus 2 que lo hacen aún más complicado y por tanto interesante.

5. Square it- Square Paint

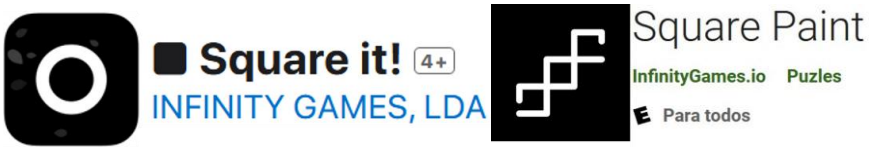


Imagen 13. Logo en IOS y en Android

Este juego de lo que trata es de moverse por la cuadrícula pintando la zona a la que nos desplazamos de modo que pintemos toda la figura, pero no podemos pasar por casillas ya pintadas. En los niveles superiores añade un segundo punto de partida y un teletransportador. El problema de cuando hay dos es que se mueven a la vez.

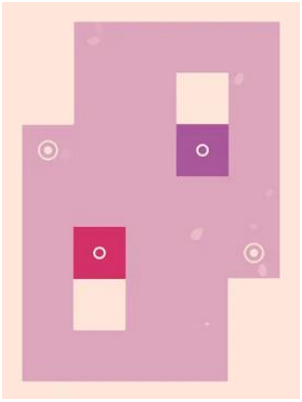


Imagen 14. Un nivel de juego

Este juego también trabaja el sentido geométrico y según el nivel podría valer desde los últimos cursos de Primaria hasta la Universidad.

6. 1 line

Imagen 15. Logo

Llegamos al clásico juego de pasar por todas las aristas de una figura sin repetir, salvo que el nivel lo indique, y en el sentido que queramos, salvo que nos indiquen un sentido de paso.

Es ideal para trabajar al introducir grafos en Bachillerato y tras dejar un período de prueba, preguntar cómo ha de ser el vértice de inicio, el del final y los demás en la solución.

7. Dot knot

Imagen 16. Logo

En este juego hemos de unir todos los pares de puntos del mismo color, pero usando todas las cuadrículas del tablero, lo cual lo hace a veces bastante más difícil. En niveles superiores hay puntos a los que deben llegar varios colores o puentes para que se puedan cruzar los recorridos.

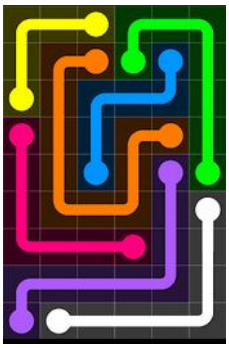


Imagen 17. Solución de un nivel

Se puede usar también con los grafos aunque creo que también sirve para trabajar el sentido geométrico en niveles más bajos, especialmente en ESO.

8. 0h n0

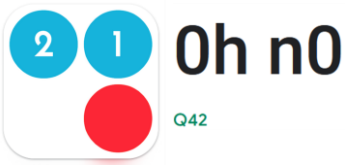


Imagen 18. Logo

Este juego, que me recuerda un poco al clásico Buscaminas, consiste en colocar círculos rojos y azules de modo que los que hay en el tablero tengan en su fila o columna el número de círculos azules que indica su número, teniendo en cuenta que los rojos sirven para parar la cuenta en esa dirección/sentido.

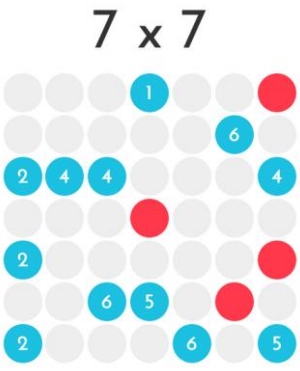


Imagen 19. Ejemplo de un nivel 7x7

Es un juego interesante para trabajar las estrategias de resolución de problemas, como el ensayo y error por ejemplo (esto por cierto se puede trabajar en la mayoría de estas app). De nuevo sería adecuado, en función de su dificultad (que aumenta con el tamaño), desde niveles bajos de Secundaria hasta incluso Bachillerato.

9. 0h h1

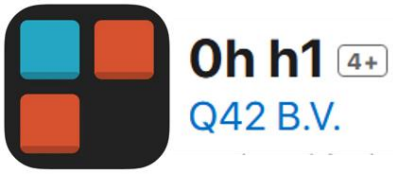


Imagen 20. Logo

En este juego hemos de rellenar una cuadrícula, parcialmente rellena, con cuadrados de dos colores de modo que no haya nunca tres seguidos del mismo color, que todas las filas y columnas sean diferentes y tengan la misma cantidad de cuadrados de cada color.

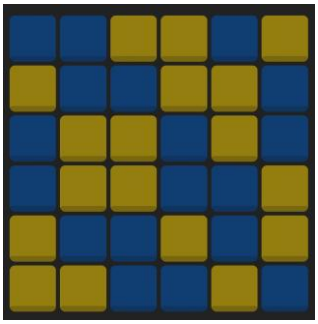


Imagen 21. Solución de un nivel 6x6

Esta propuesta es de los mismos autores que la anterior y le veo aplicaciones similares.

10. Math games – Matemáticas, cálculo mental

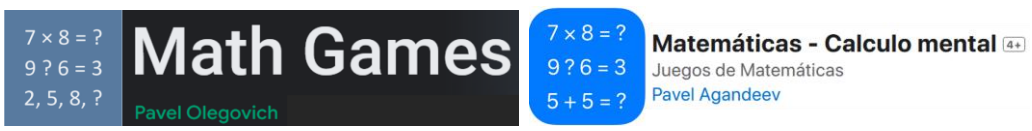


Imagen 22. Logo en Android y en IOS

Los 30 juegos diferentes que contiene esta app dan para una comunicación ella sola. Incluye, por citar algunos, juegos de cálculo (incluso se puede echar una batalla entre dos jugadores), sudokus, puzles, juegos de simetría, de memoria, …

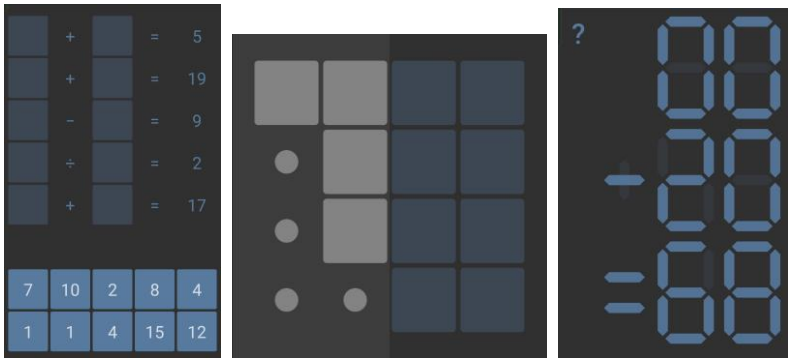


Imagen 23. Diferentes juegos

Su uso en el aula depende de a qué juego/nivel nos refiramos, pues con tanta variedad se puede usar en diferentes niveles y partes del temario.

Pues nada ¡todos a jugar!

Referencias

Monterreal, V. (2022). *Matemáticas jugando con el móvil*: *Pythagorea*. Revista Suma 101.

Monterreal, V. (2023). *Matemáticas jugando con el móvil (2)*: *Equilibrians*. Revista Suma 105.

Anamorfismos en un aula de ESO

Alba Blasco Estrada
mblasc55@xtec.cat
Institut Quercus, Sant Joan de Vilatorrada

Josep Costa Riu
Jcosta20@xtec.cat
Institut Quercus, Sant Joan de Vilatorrada

Núcleo temático: Conexiones.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

La propuesta didáctica de esta comunicación nace en la XIX JAEM, en la comunicación “anamorfosis, arte y geometría”. Donde surgió la idea de hacer un “Treball de recerca” en bachillerato sobre anamorfismos.

Se presenta un proyecto STEAM que conecta las matemáticas con la tecnología y con el arte por medio de los anamorfismos. Dicho proyecto se ha desarrollado principalmente con alumnos de 1ero de la ESO pero seria aplicable a todos los cursos.

También se comentará brevemente una propuesta de investigación desarrollada en 1ero de Bachillerato.

Palabras clave: Anamorfismos, recursos didácticos, transversal e investigación.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Alba Blasco es profesora de matemáticas, miembro de la asociación catalana de Geogebra y trabaja en el Instituto Quercus. Josep Costa es profesor de matemáticas del mismo instituto.

En esta comunicación se presentará un trabajo didáctico STEAM llevado a nuestras aulas de educación secundaria durante el curso 2022-2023. La propuesta está pensada para realizarse en varias sesiones. No se marcará el inicio y el final de cada sesión para permitir que las mismas se adapten al alumnado.

1. Introducción

En A Coruña el 6 de julio de 2019 a las 11.30 de la mañana, asistimos a la comunicación “Anamorfosis, Arte y geometría” de Cristina Montero, Covadonga Rodríguez-Moldes, Job Sánchez y Maria Covadonga Barreiro. En esa comunicación surge la idea de proponer un “Treball de recerca” (trabajo de investigación) STEAM para alumnos de bachillerato, pues estábamos desarrollando el proyecto STEAM en nuestro centro.

A la vuelta del congreso empezamos a dar forma a la idea junto con compañeros de otras áreas, pero desafortunadamente la pandemia hizo aplazar nuestros planes. No fue hasta octubre de 2021 que empezamos a desarrollar paralelamente el proyecto para Bachillerato y para la ESO.

2. Treball de recerca

El “Treball de recerca” es una asignatura del Bachillerato en Cataluña. Consta de 20 créditos y consiste en realizar una investigación sobre temas no curriculares. Se puede realizar de manera individual o en grupos y se desarrolla entre 1ero y 2º curso. Las fechas y las temáticas varian dependiendo del centro. En nuestro caso cada departamento didáctico hace propuestas de trabajos y los alumnos deben elegir entre ellos.

En octubre de 2021, trabajando en el Instituto Jaume Callís, los departamentos de matemática y visual y plástica, propusimos un trabajo sobre “Anamorfismos” que la alumna Renata Cavilli (actual estudiante del grado en Matemáticas) aceptó y desarrollo bajo el título “*Anamorfismes, l'anàlisi matemàtica d'una il·lusió* “

A lo largo de este trabajo Renata estudio las matemáticas ocultas detrás de los anamorfismos, centrándose en los ópticos planos horizontales y los catóptricos cilíndricos.

Sin entrar en profundidad en el contenido del trabajo, pues seria objeto de otra comunicación, se realizaron dos anamorfismos en la entrada del instituto que fueron el punto de partida de la propuesta didáctica que se presenta a continuación.

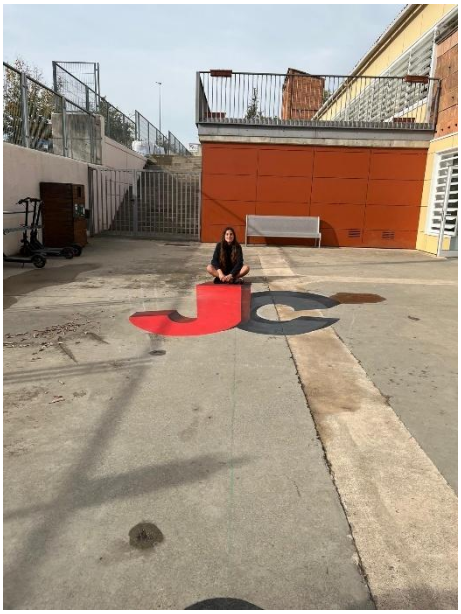


Imagen 1. Anamorfismo con las siglas del centro y su autora.

Image 2. Anamorfismo con el nombre de la revista del centro y los profesores de matemáticas y lengua

3. Propuesta didáctica ESO

Los anamorfismos son expresiones artísticas presentes en nuestro entorno, por este motivo consideramos que podían ser el eje vertebrador de este proyecto STEAM que pretende acercar el alumnado a las matemáticas, la tecnología y el arte.

En la entrada de nuestro centro educativo tenemos dos anamorfismos, fruto del "Treball de recerca" de Bachillerato realizado el curso 22-23 por Renata Cavilli. A partir de la observación de estas figuras se presentará al alumnado los diferentes tipos de anamorfismos, despertando así la curiosidad por su creación.

El reto planteado en este proyecto es la creación de anamorfismos catóptricos. En primer lugar, se crearán de manera guiada para posteriormente permitir al alumnado expresarse libremente. Dicho reto no podrá resolverse sin los conocimientos matemáticos, tecnológicos y artísticos ocultos detrás del arte.

Si hablamos de currículum, en matemáticas se trabajarán el sentido de la medida y el sentido espacial. En visual y plástica se trabajará la creación artística, así como las manifestaciones artísticas contemporáneas y del patrimonio cultural y en tecnología los productos y materiales y la fabricación.

3.1. Primera parte

En está primera parte se hablará de coordenadas. Trabajaremos con distintas coordenadas y aprenderemos a trasladar formar sencillas de unas a otras.

En tecnología estarán trabajando la creación de figuras en 3D y el perfil, alzado y planta de las mismas, mientras en visual trabajarán la teoría del color. (Si se dispone de horario para proyectos puede combinarse todas estas partes)

3.2. Segunda parte

A lo largo de la segunda parte, y con la inspiración de los anamorfismos presentes en la entrada del instituto, cada alumno dibujará sus iniciales en unas coordenadas cartesianas para luego transportarlo a una anamórficas y ver el resultado a través del cilindro reflectante.

Aquí entrará en juego la simetría, la visión en 3D y el uso del color para dar profundidad a las figuras.

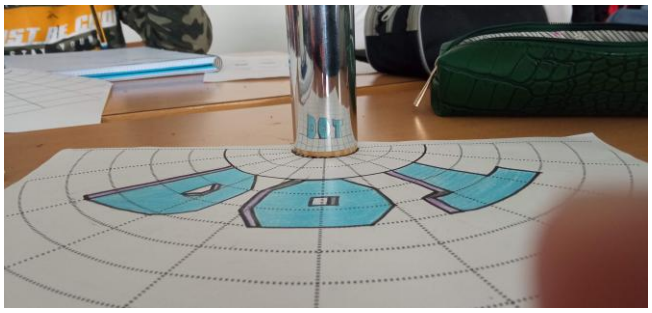


Image 3. Anamorfismo con las iniciales de un alumno

3.3. Tercera parte

En esta tercera parte, dispondremos de las figuras 3D creadas en tecnología, a partir de ellas se habrá hecho una representación plana en unas coordenadas cartesianas y se transformarán para poder observar a la figura original y la anamórfica. En primero de la ESO, no se ha trabajado la simetría en este punto, pues la complejidad del ejercicio no hubiese permitido al alumnado disfrutar de la creación.

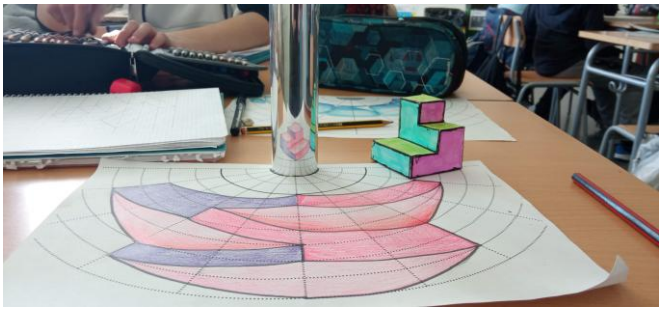


Image 4. Anamorfismo con figura 3D

3.4. Cuarta parte

En esta cuarta parte se permitirá al alumnado realizar creaciones libres, también se dispondrá de propuestas para aquellos que lo prefieran.

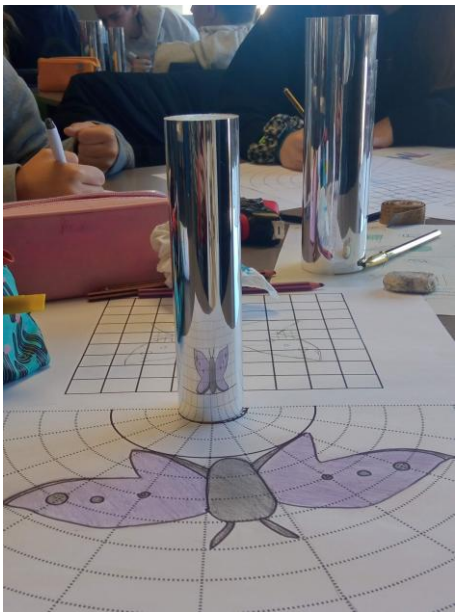


Image 5. Anamorfismo libre

Estructurar las actividades en distintas partes, empezando por las más marcadas y terminando por las más libres, nos permite adaptarnos a la diversidad presente en el aula. Al tratarse de una actividad que combina matemáticas y arte, surgen resultados sorprendentes y el alumnado disfruta de sus creaciones.

A la largo de las distintas sesiones, se hará notar al alumnado que es muy importante desde donde se observe el anamorfismo y que no todos los puntos permites una visión optima del resultado. Se presentarán algunas de las conclusiones del “treball de recerca” de Bachillerato.

Referencias

Actas JAEM “Un Atlántico que suma” 19 (2019), Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Cavilli, Renata (2023), *Anamorfismes, l'anàlisi matemàtica d'una il·lusió*. Trabajo no editado.

Puertas abiertas a la mirada matemática: De la fotografía de puertas, al microrrelato matemático

María del Pilar Menoyo Díaz
mpmenoyodiaz@gmail.com
Miembro de la Red Iberoamericana de Docentes (RID) Formación IB

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

En las 20JAEM[1] compartí la comunicación: *Educar la mirada matemática, enseñar a mirar: La potencialidad didáctica de los microrrelatos matemáticos a partir de fotografías* en la que presenté metodología y resultados, ahora presento una ejemplificación de cómo la fotografía de "*Puertas*" para redactar un Microrrelato Matemático, es una oportunidad para hablar y escribir matemáticas para aprender matemáticas.

El objetivo general es educar la mirada matemática de todo el alumnado de cualquier nivel utilizando la fotografía de *Puertas* para describirlas con conceptos matemáticos en formato de microrrelato de un máximo 280 caracteres.

[1] Menoyo-Díaz, M. del P. (2023) Educar la mirada matemática, enseñar a mirar: La potencialidad didáctica de los microrrelatos matemáticos a partir de fotografías. *Actas JAEM20,* Editor: FESPM pp 456-484 ISBN: 978-84-122154-0-3 https://20.jaem.es/20jaem/Comunicaciones/Connexiones/CoC002.pdf

Objetivos específicos:

- Relacionar fechas de construcción con hechos relevantes de la historia de las matemáticas.
- Conocer tradiciones e historia de lugares fotografiados.
- Describir la geométrica de su diseño.
- Mostrar características de los números.
- Utilizar diferentes conceptos matemáticos dando coherencia al texto.
- Modelizar con Geogebra.
- Consultar y referenciar bibliografía.

Palabras clave: *Mirada matemática, Fotografía de puertas, Microrrelato Matemático, Secundaria*

1. Introducción

Desde simples estructuras de madera hasta complejas obras de arte arquitectónico, las puertas han evolucionado a lo largo de la historia reflejando las cambiantes necesidades y gustos de la sociedad.

Una puerta también refleja la continua interacción entre la carpintería y la tecnología y las bases matemáticas que conllevan. Desde las ingeniosas puertas automáticas creadas por Herón de Alejandría[2] hasta las modernas puertas inteligentes, esta evolución destaca la importancia de la adaptabilidad y la innovación. Los avances tecnológicos conllevan que cada era traiga consigo nuevas oportunidades para reinventar y reimaginar cómo interactuamos con los espacios que habitamos.

Una puerta limita lo público de lo privado por lo que nos han dotado de intimidad y resguardo, a la vez que invitación a entrar y compartir, nos cuentan y nos hacen

[2] https://educaixa.org/microsites/ilusionismo/mecanismo_heron/Contenidos/recursos_aux/index.htm l

imaginar mil historias, y también pueden ser fuente de inspiración para una mirada matemática con la que describirlas y contar esas historias a través de un microrrelato matemático que nos sugiere una fotografía.

La fotografía nos permite: Fomentar y desarrollar la observación de lo que nos rodea, en este caso, focalizando la mirada en las puertas, potenciar la creatividad y la inclusión ya que permite la conexión entre su entorno y el bagaje matemático del alumnado y mostrar la belleza de las matemáticas, elemento motivador nada despreciable.

Una puerta, la podemos encontrar como elemento exterior en una fachada y podemos focalizar la mirada en el número del edificio, en el año de su construcción, en las formas del dintel, del diseño de la puerta o en la fachada donde la encontremos.

También la podemos encontrar como elemento interior en un edificio singular o no, pero que nos llame la atención por un recuerdo personal, por su historia o por el diseño de sus formas.

Sea como sea, siempre será motivo de ampliar conocimientos de ellas y su entorno, a través de la consulta bibliográfica y su posterior referenciación si pedimos al alumnado que escriba un microrrelato matemático sobre la focalización de los aspectos que hemos ido enumerando y lo tenga que acompañar con explicaciones que amplien dicho contenido.

Por otra parte, el diseño de una puerta o la fachada donde se encuentren pueden ser motivo de inspiración para realizar modelizaciones con GeoGebra.

Imagen 1. Elementos de focalización para elaborar un microrrelato matemático. Puertas de interior y exterior

2. Antecedentes de la propuesta

La propuesta que presento tiene su origen en la necesidad de elaborar un texto para describir el instante de un lugar, en nuestro caso, un paseo por la playa plasmado en una fotografía, ya que ponerle un título como fotografía matemática permitía unicamente focalizar la mirada en un único aspecto relacionado con conceptos matemáticos, cuando en el fondo podían existir y de hecho existían más de un concepto reflejado en una instantánea, así es como empecé a elaborar textos con diferentes conceptos matemáticos que describían una fotografía y desde el primer momento me dí cuenta del potencial didáctico de la utilización de la fotografía matemática para elaborar microrrelatos matemáticos que iba compartiendo en la red social X (Twitter) a través de mi perfil @zafrainvestiga y a medida que iba acumulando microrrelatos matemáticos, los iba agrupando y compartiéndolos en mi blog[3] recercaasecundaria.wordpress.com.

[3] https://recercaasecundaria.wordpress.com /

Escribí mi primer artículo con el objetivo de ayudar al alumnado a focalizar la mirada matemática en diferentes aspectos de su entorno para elaborar un hilo conductor que permitiera la utilización de palabras que correspondían a conceptos matemáticos (Menoyo, 2021)[4] mostrando que lo que pretendía era:

- Presentar las matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
- Cuidar que la expresión del alumno fuera traducción fiel de su pensamiento siendo capaz de analizar lo que veía y sintetizar lo que conocía y sentía al verlo, mostrando competencia comunicativa y competencia matemática.
- Fomentar la creatividad del alumnado y el gusto por la belleza que les rodea desde una mirada matemática de la realidad.
- Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento, al ser una propuesta de las llamadas de suelo bajo y techo alto y por lo tanto es un actividad de tipo inclusivo donde todo el alumnado está preparado para una situación exitosa.
- Fomentar la evaluación de responsabilidad compartida siendo capaces de autoevaluarse y evaluar las diferentes producciones en base a unos criterios de evaluación consensuados.

[4] *Menoyo-Díaz (2021).* Microrrelatos matemáticos en un tuit: Una propuesta didáctica para educar la mirada matemática en *Revista Formación IB* del 5 de abril de 2021 http://formacionib.org/noticias/?Microrrelatosmatematicos-en-un-tuit-Una-propuesta-didactica-para-educar-la

Imagen 2. Cómo enseñar al alumnado a focalizar la Mirada Matemática y elaborar un Microrrelato Matemático[5]

Esta propuesta, la compartí con Marisa Domínguez, antigua compañera de trabajo en el instituto Caterina Albert de Barcelona y la puso en práctica con alumnado de 1º de ESO; la experiencia la compartimos en el III Congreso CTM de la Comunitat

Valenciana (Menoyo y Tasías, 2021)[6]. Posteriormente, dicha propuesta la fui perfilando y la compartí en el II Congreso Iberoamericano de Docentes [7] dando importancia al papel de la evaluación.

Los criterios de evaluación son siempre más enriquecedores cuando se diseñan según consenso entre profesorado y alumnado pero como guía debemos tener presente: la valoración de la historia, la valoración del contenido matemático, la

[5] *Menoyo-Díaz (2021).* Microrrelatos matemáticos en un tuit: Una propuesta didáctica para educar la mirada matemática en *Revista Formación IB* del 5 de abril de 2021
http://formacionib.org/noticias/?Microrrelatosmatematicos-en-un-tuit-Una-propuesta-didactica-para-educar-la

[6] Menoyo Díaz, M. del P. y Domínguez Tasias, M. (2021). *Educar la mirada matemàtica a partir de fotografies per elaborar un microrelat matemàtic: Una experiència amb alumnat de 1r d'ESO de l'Institut Caterina Albert de Barcelona.* LLibre d'actes del III Congrés CTEM de la comunitat Valenciana Edita: Generalitat Valenciana.

valoración de la fotografía y el desempeño de la normativa de presentación, así pueden ser motivo de evaluación:

En cuanto a la historia que cuenta:

- Identifica o hace referencia a algún elemento matemático, haciendo únicamente una enumeración en su descripción, sin tener un hilo narrativo.
- Identifica correctamente elementos relacionados con conceptos matemáticos, utilizando un hilo conductor que cuenta una historia con sentido.
- El texto no tiene faltas ortográficas, tiene gracia e incluye una argumentación implícita con un juego de palabras, conexión insólita o juega con la percepción visual.
- Escribe una historia coherente, rica en detalles y con un léxico lingüístico y matemático muy bien utilizado.

Por lo que respecta al contenido matemático:

- Señala alguna característica o propiedad de elementos matemáticos con incorrecciones.
- Utiliza conceptos matemáticos con corrección de forma enumerativa.

En cuanto a las normas de presentación:

En cuanto a número de caracteres:

- Se pasa de caracteres.
- Utiliza el número de caracteres adecuados

Conselleria d'Educació, Cultura i Esport. ISBN: 978-84-482-6724-7. pp 120-126 https://portal.edu.gva.es/cefireambitctm/wp-content/uploads/sites/

[7]Menoyo Díaz, M. del P. (2021). *Importancia de la comunicación en una educación híbrida: Una experiencia en*

Secundaria en el aula de Matemáticas Libro de Actas II Congreso Iberoamericano de Docentes Editores:

Macías, Ó., Quiñónez, S. y Yucra, J. ISBN: 978-84-948417 2-9 pp 365-379
http://formacionib.org/programa/actasiiconIB.pdf

En cuanto a los pasos a seguir hasta elaborar el microrrelato matemático:

- No explicita todos los pasos seguidos al focalizar la mirada de la fotografía.
- Sigue todos los pasos que le han permitido elaborar el texto

Para la evaluación se utilizaron Dianas de Evaluación y T.A.G de evaluación. Las Dianas de Evaluación permiten la reflexión y el pensamiento crítico, son muy visuales y de gestión inmediata para tener una "foto finish" de la situación y las podemos obtener a partir de las hojas de cálculo del Google Drive así el alumnado puede marcar su valoración en cada uno de los ítems o criterios de evaluación que habrán sido consensuados entre todos los integrantes del grupo, dichos criterios pueden ser:

- Pertinente: Obtiene ideas matemáticas a partir de la observación de la imagen.
- Completa: El nivel de conocimiento es adecuado a su nivel.
- Precisión: Utiliza vocabulario propio de las matemáticas.
- Iniciativa: Añade elementos visuales (emoticonos), utiliza un idioma diferente alque normalmente utiliza.
- Organización del texto: Se ajusta al máximo de caracteres (280)
- Expresión y comprensión: texto claro, coherente y bien escrito

Evidentemente necesitan la comunicación e intercambio de significados entre todos los miembros del grupo, de manera sincrónica, al alumnado le tiene que quedar claro, qué se le pide y qué se le valorará.

Por otra parte la utilización de las T.A.G, siglas de Tell, Ask y Give permiten al alumnado hacer una crítica de las producciones de sus compañeros y compañeras al tener que escribir:

- T (Tell) Una cosa que les guste del trabajo de sus compañeros y compañeras.
- A (Ask) Hacerles una pregunta sobre su producción
- G (Give) Plantearles una sugerencia de mejora

Estos escritos pueden realizarse físicamente utilizando pósits o virtualmente, a través de un foro, en un escrito y hacer una fotografía para colgarlo en moodle o en una pizarra colaborativa, como MIRO.

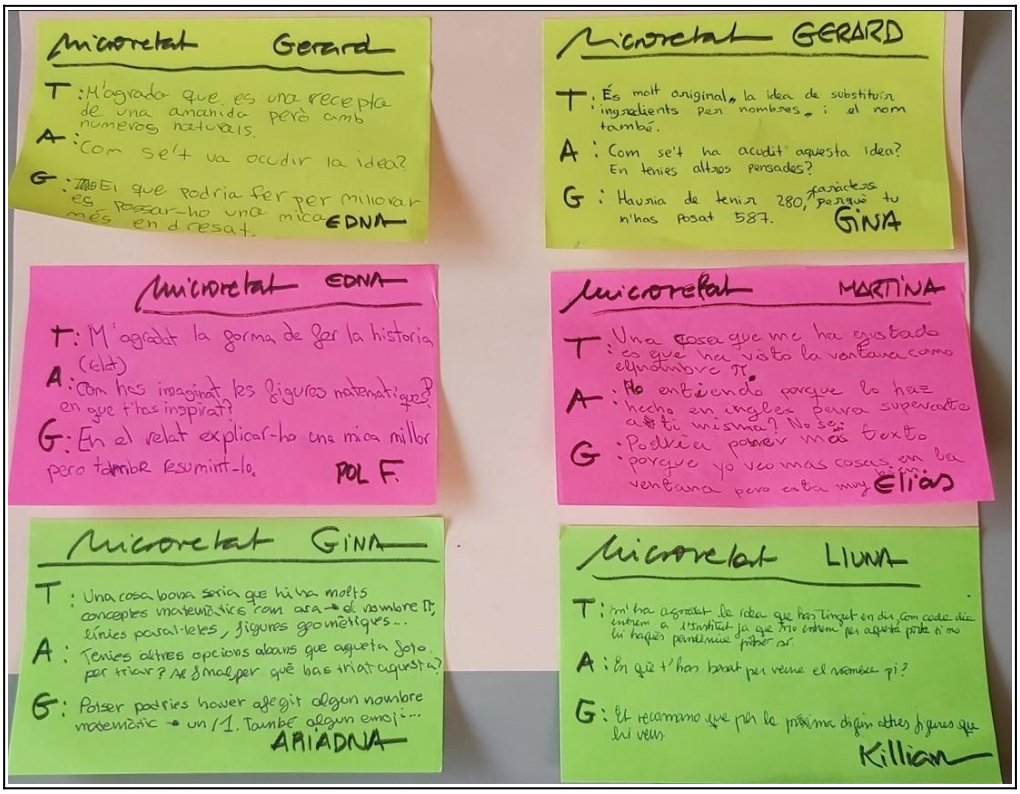


Imagen 3. Valoraciones de alumnado de 1º de ESO del institut Caterina Albert de Barcelona : Evaluación Mutua utilizando pòsits con criterio T.A.G.

A medida que la propuesta sobre realizar una fotografía y elaborar a partir de ella un microrrelato matemático la daba a conocer, profesorado de diferentes lugares del

territorio español y de diferentes niveles educativos la fue adoptando y adaptando a las características de su alumnado. Esta experiencia y sus posibilidades de implementación la compartí en las 20JAEM[7], y en ese mismo marco de las 20JAEM Lluís Mora Cañellas[8], hizo en su ponencia una mención a ella, tal como se recoge en el libro de Actas.

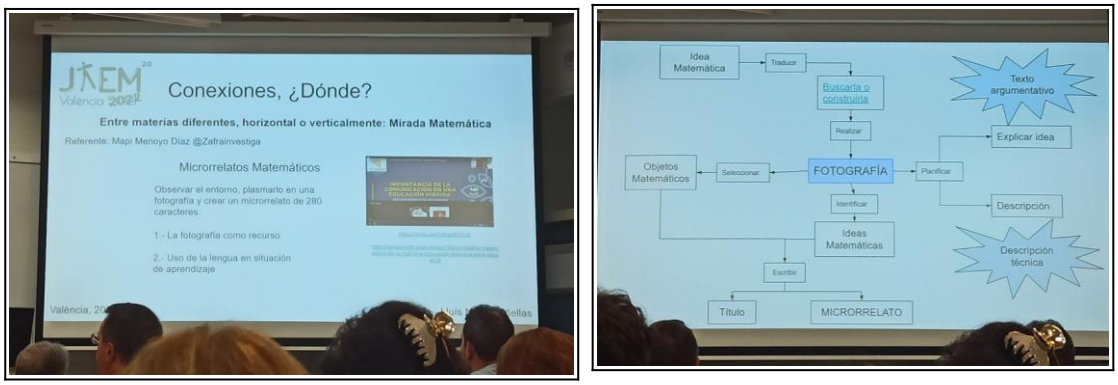


Imagen 4. Fotografías de la ponencia de Llluis Mora Cañellas en el marco de las 20JAEM refiriéndose a mi propuesta sobre la elaboración de un Microrrelato Matemático a partir de Fotografías

Últimamente, en la revista UNION[9] he compartido las posibilidades didácticas que plantea la fotografía con mirada matemática de una obra arquitectónica, como es la Sagrada Familia de Barcelona.

A partir de las fotografías con mirada matemática de la Sagrada Familia el alumnado puede conocer:

- La simbología de los números que guarda su diseño.

[7] Menoyo Díaz, M del P. (2022). *Educar la mirada matemática, enseñar a mirar: La potencialidad didáctica de los microrrelatos matemáticos a partir de fotografías* Libro de Actas de las 20JAEM Editor: FESPM ISBN: 978-84122154-0-3 pp 456-484 *https://20.jaem.es/libro-de-actas/*

[8] Mora Cañellas, LL. (2022). En busca de la conexión perdida. Libro de Actas de las 20JAEM Editor: FESPM ISBN: 978-84-122154-0-3 pp 78-101 *https://20.jaem.es/libro-de-actas/*

[9] Menoyo Díaz, M. del P. (2023). Mirada Matemática de la Sagrada Familia de Antoni Gaudí. De la fotografía al microrrelato matemático. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* núm 69 ISSN: 1815-0640 pp 1-21 https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1563

- Los polígonos y poliedros que ponemos identificar.
- Las superficies regladas responsables de su belleza.

Sagrada Familia de Barcelona

- La posibilidad de modelizar con GeoGebra diferentes elementos.

En la #SagradaFamilia luz, naturaleza y **matemáticas** confieren un ambiente único que permite muchas miradas, una de ellas, la #MiradaMatemática en una puerta de la fachada de la Pasión

Sobre texto de Juan19,42 un

"cuadrado mágico" con la edad de Xto, una simetría, monedas y más cosas para localizar

Imagen 5. Microrrelato Matemático de una de las puertas de la

Y ahora, en esta línea, pretendo compartir en las 21JAEM, cómo la mirada matemática de *Puertas* pueden ser fuente de aprendizaje en cuanto a permitir:

- Relacionar fechas de construcción con hechos relevantes de la historia de las matemáticas o de personas matemáticas.
- Conocer tradiciones e historia de lugares fotografiados.
- Describir la geométrica de su diseño.
- Mostrar características de los números.

- Utilizar diferentes conceptos matemáticos dando coherencia al texto.
- Proponer situaciones de resolución de problemas y modelizar con Geogebra.

3. Fotografía de Puertas para elaborar un Microrrelato Matemático

A continuación diferenciamos en qué focalizar la mirada matemática para recabar información y poder elaborar un microrrelato matemático conforme al bagaje personal del alumnado o con aquel que va recabando a medida que realiza consultas bibliográficas.

3.1. Dinteles y cornisas: Años de construcción

Focalizar la mirada matemática en dinteles y cornisas que muestran fechas de finalización de la obra arquitectónica nos permite conectar el año con hechos de la historia de las matemáticas y para ello el alumnado deberá consultar fuentes de consulta que les permitirán conocer hechos más allá del currículum, en palabras de Rodríguez-Taboada (2023:9)[10] "Es una oportunidad para proponer al alumnado actividades más allá de los contenidos.

Ejemplo: Focalicemos la mirada matemática en el año 1904

Imagen 6. Casa finalizada en 1904

[10] Rodríguez-Taboada, J (2023). Por calles y plazas: Matemáticas en tu entorno. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* núm 68 ISSN: 1815-0640

Después necesitamos realizar una búsqueda bibliográfica que nos conecte esta fecha con un aspecto relacionado con la historia de las matemáticas, para ello podemos indicar en el buscador de google: *1904 hechos de la historia de las matemáticas* y obtendremos diferentes informaciones entre las que destacamos:

Con estas informaciones podemos elaborar un texto que relacione la fotografía de estas casas con estos personajes, sus vidas, sus hallazgos.

Imagen 7. Capturas de pantalla: 1904 hechos de la historia de las matemáticas

Ahora el alumnado deberá decidir qué información utiliza para relatar una historia, elaborando un texto con conceptos relacionados con las matemáticas, utilizando o no, emoticonos para completar sin pasarse los 280 caracteres que permite X. Ejemplo: Una puerta **semiabierta** dejando que un **ángulo** de luz penetre en esta casa de **1904**, fecha en la que **Henri Poincaré** estableció su **conjetura**, declarada **uno de los siete problemas del milenio** sin resolver, hasta que **100 años** más tarde, **Grigori Perelman** la demostró y rechazó un millón de dólares por ello. Mirada Matemática.

En el Microrrelato Matemático se utilizan los conceptos relacionados con las matemáticas indicados en negrita y el profesorado podrá pedir o no al alumnado las explicaciones correspondientes a estos conceptos.

Imagen 8. Ejemplo de Microrrelato Matemático

#MiradaMatemática de una casa del **1921** en el Cabanyal (Valencia) pintada de azul y blanco

En ese año nació **#MavisLilianBatey** **criptoanalista** y trabajó como **descifradora de códigos** en #BletchleyPark en la #SegundaGuerraMundial Su trabajo fue una de las claves del éxito del día D si es que se puede hablar de éxito en una guerra

Imagen 9. Microrrelato matemático con historia

Me **situé centrada** delante de la puerta

Ante mí el **37** y el **1859**, números con historia. #MiradaMatemática **#BernahardRiemann** en 1859 formula la **#conjetura** que lleva su nombre y es uno de los **problemas abiertos** más importantes en la **matemática contemporánea**

Características del número 37

37*3=111

37*6=222

37*9=333

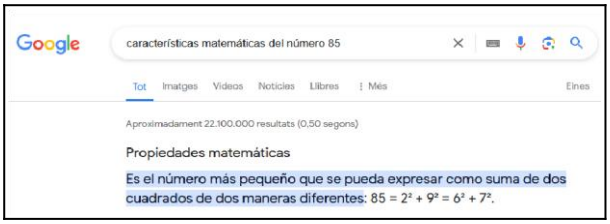
…

37*27=999

Imagen 10. Microrrelato matemático con historia

3.2. Numeración de la puerta

Si se focaliza la mirada matemática en la numeración de la puerta, el alumnado podrá relacionar ese número con sus propiedades y características, ya sea porque las conoce o ya sea por el resultado de una búsqueda. Ejemplos:

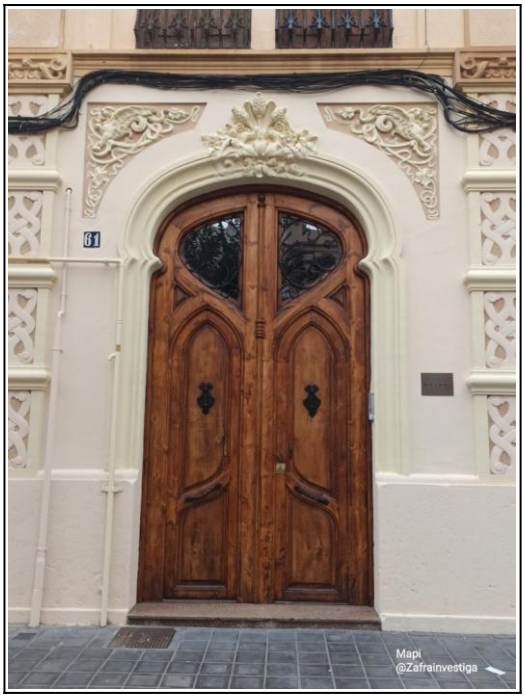


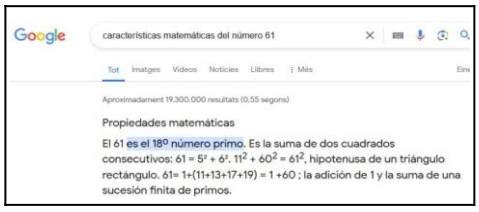
Mirada Matemática de una casa del Cabanyal con sus **mosaicos de cuadrados** distribuidos de manera **alterna**, sus mensajes **positivos** que te hacen sonreír, y esa Virgen junto al **85,** el número más pequeño que se puede expresar como **suma de dos cuadrados de dos maneras diferentes**

$85 = 2^2 + 9^2$

$85 = 6^2 + 7^2$

Imagen 11. Microrrelato Matemático de la casa n.º 85





Mirada Matemática de una casa del Cabanyal de una puerta muy cuidada que luce hermosa bajo un **arco** árabe, es la n. **61**, un **primo** especial: Es **pitagórico**. **Suma de dos cuadrados consecutivos** $61 = 5^2 + 6^2$ Y además lo podemos expresar como la **suma de 1 más finitos primos** 61= 1+(11+13+17+19) . Belleza

Imagen 12. Microrrelato Matemático de la casa n.º 61

No es excluyente focalizar la mirada matemática en diferentes aspectos de la puerta situada en en determinado edificio, así:

Mirada Matemática de una casa **esgrafiada** del **1904**, año en que **Emmy Noether** decidió dedicarse a las matemáticas.
Es la número **39**, repetido tres veces, un guiño al ser **el más pequeño** que tiene **tres particiones** en **tres partes** que dan el **mismo producto** cuando se multiplican
25+8+6 = 39 25*8*6 = 1200
24+10+5=39 24*10*5=1200
20+15+4=39 20*15*4=1200

Imagen 13. Microrrelato Matemático de la casa n.º 39 del año 1904

La comprobación de las características matemáticas por parte de Isabel Font utilizando GeoGebra, le da un plus a la propuesta.

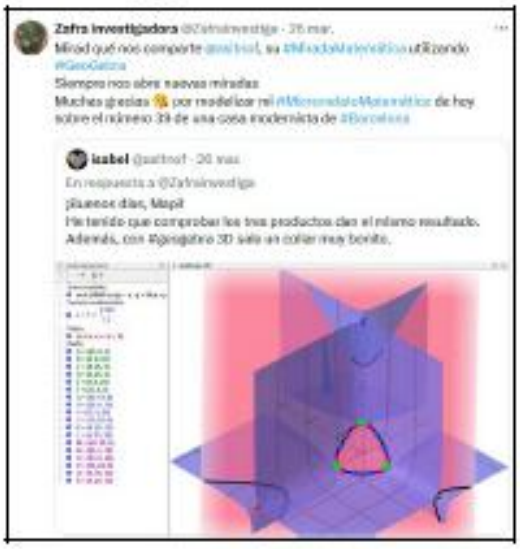


Imagen 14. Modelización con GeoGebra de relaciones numéricas

Una puerta de **geometría** bella, sobre ella 1 **año** en el que no se distingue una **cifra**. Es la casa de "Les Joies" de #Moià de la que se tiene documentación desde **1614,** año en el que se publicó por 1ª vez la idea de los **logaritmos neperianos,** hasta **2015**, año en el que murió **#JohnNash** #MiradaMatemática

Imagen 15. Microrrelato matemático con historia

3.3. Diseño de la puerta y fachada

Si focalizamos la mirada matemática en el diseño de la puerta o en la fachada donde se encuentra, podemos realizar una descripción geométrica y además podemos modelizarla o invitar a modelizarla utilizando geogebra, o como nos propone Soler (2023)[11], utilizando GeoGebra con Python. Ejemplos:

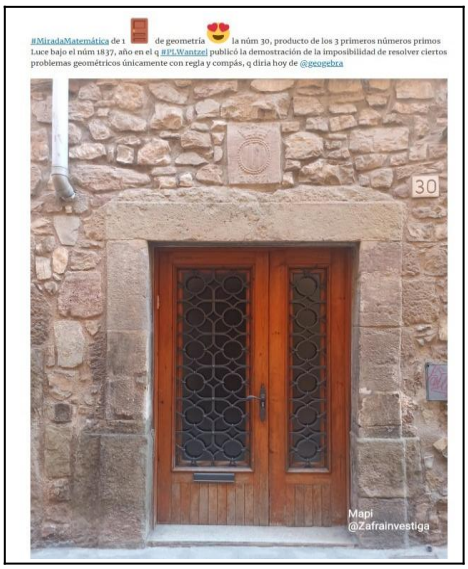
Imagen 16. Propuestas de modelizado de una casa del Cabanyal en Valencia de Isabel Font y Ramón Nolla

Imagen 17. Propuesta de modelizado de una casa del Cabanyal en Valencia de Alejandro Gallardo

[11] Soler, M. (2023) GeoGebra con Python. Revista UNION, 69 ISSN: 1815-0640
https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1569

Imagen 18. Propuesta de modelizado de dos puertas con historia, Ayuntamiento de Alicante y Lonja de la Seda de Valencia por parte de Alejandro Gallardo

Imagen 19. Microrrelato matemático con diferentes focalizaciones



Ya hemos indicado anteriormente que no es excluyente focalizar la mirada matemática en diferentes aspectos de la puerta, así podemos indicar:

Mirada Matemática de una puerta de **geometría** bella, la **número 30**, **producto de los 3 primeros números primos**. Luce bajo el **número 1837**, año en el que **P.L. Wantzel** publicó la **demostración de la imposibilidad de resolver ciertos problemas geométricos únicamente con regla y compás,** ¿qué diría hoy de GeoGebra?

3.4. Puertas que evocan sentimientos

Un microrrelato matemático puede ser el resultado de una situación emocional ligada a la experiencia personal o ante la situación que nos afecta, como puede ser la guerra, la enfermedad, un recuerdo, una tradición,...

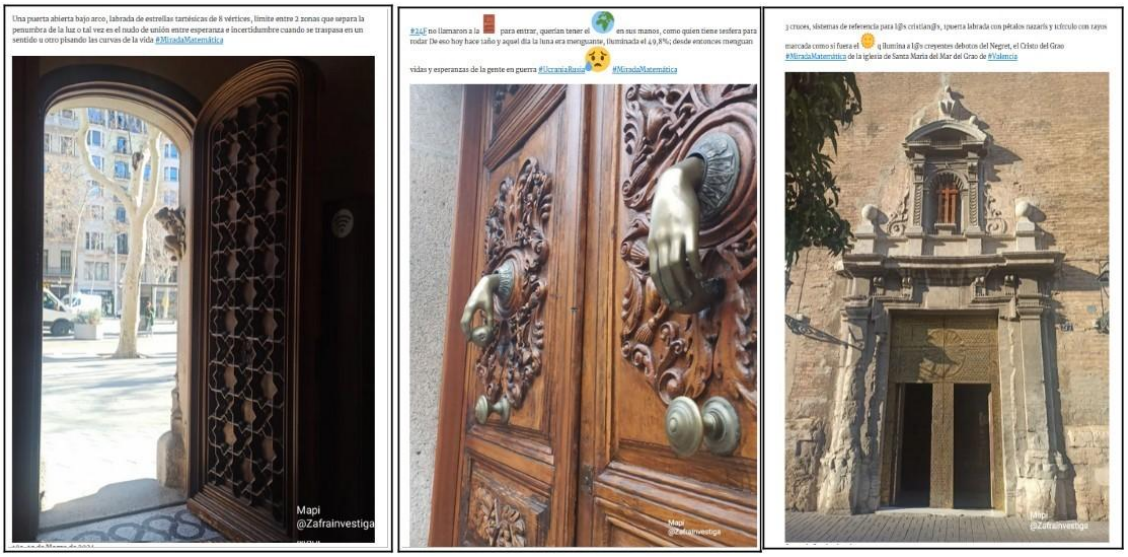


Imagen 20. Microrrelatos sobre incertidumbre personal, situación de guerra y tradiciones

- Una puerta **abierta** bajo **arco**, labrada de **estrellas tartésicas** de **8 vértices, límite** entre **2 zonas** que separa la penumbra de la luz o tal vez es el **nudo** de **unión** entre **esperanza** e **incertidumbre** cuando se traspasa en un **sentido** u otro pisando las **curvas** de la vida *#MiradaMatemática*

- **24 Febrero de 2023**, no llamaron a la puerta para entrar, querían tener el mundo en sus **manos**, como quien tiene una **esfera** para **rodar** De eso **hoy** hace un **año** y aquel día la luna era menguante, iluminada el **49,8%**; desde entonces menguan vidas y **esperanzas** de la gente en guerra *#UcraniaRusia* tristeza *#MiradaMatemática*

- **3** cruces, **sistemas de referencia** para l@s cristian@s, una puerta labrada con **pétalos nazarís** y un **círculo** con **rayos** marcada como si fuera el sol que ilumina a l@s creyentes devotos del Negret, el Cristo del Grao *#MiradaMatemática* de la iglesia de Santa Maria del Mar del Grao de *#Valencia*

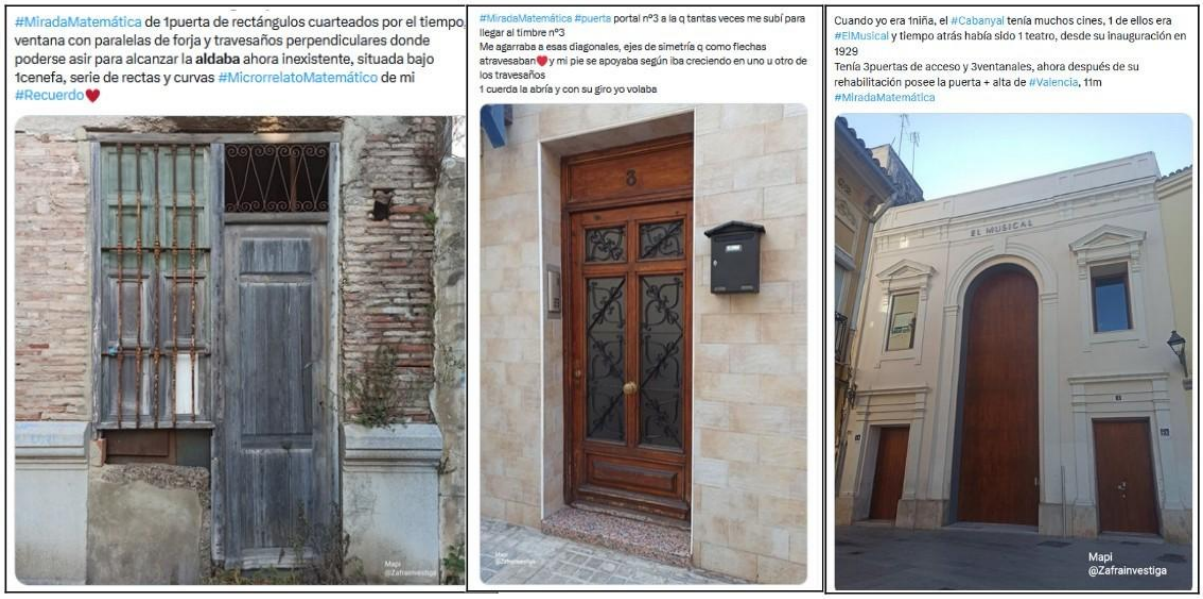


Imagen 21 Microrrelatos , recuerdos de mi niñez

- *#MiradaMatemática* de una puerta de **rectángulos** cuarteados por el **tiempo**, ventana con **paralelas** de forja y travesaños **perpendiculares** donde poderse asir para alcanzar la aldaba ahora inexistente, situada bajo una cenefa, **serie** de **rectas** y **curvas** *#MicrorrelatoMatemático* de mi *#Recuerdo* con corazón.

- *#MiradaMatemática* *#puerta* portal **nº3** a la q tantas veces me subí para llegar al timbre **nº3** Me agarraba a esas **diagonales**, **ejes de simetría** que como flechas atravesaban corazones y mi pie se apoyaba según iba creciendo en uno u otro de los travesaños una **cuerda** la abría y con su **giro** yo volaba.

- Cuando yo era una niña, el *#Cabanyal* tenía muchos cines, uno de ellos era

  #ElMusical y **tiempo** atrás había sido un teatro, desde su inauguración en **1929** Tenía 3 puertas de acceso y 3 ventanales, ahora después de su rehabilitación posee la puerta **+ alta** de *#Valencia*, **11m** *#MiradaMatemática*

3.5. Puertas que nos sugieren proponer una cuestión problemática

#MiradaMatemática de #puerta de cuarterones, **pirámides de base cuadrada,** situadas **simétricamente** respecto un **eje central** q permite abrirla
En el suelo el **número 729** que nos indica la #**altitud** a la que se encuentra y está en el **vértice** del **triángulo** que **marca** el **desnivel**
#Resoluciónde Problemas
¿Qué pregunta formularías y cómo lo resolverías?

Imagen 22: Propuesta: Resolución de problenas

Mirada Matemática de una puerta que nos hace pensar en proponer **diferentes preguntas y construcciones con GeoGebra Conjeturas**..

Si **inscribo** 1 **circunferencia** en 1 **cuadrado** y dentro de esta **circunferencia** otro **cuadrado** y así sucesivamente ¿Cuál es el **factor de proporcionalidad** entre los **perímetros** de los cuadrados y de su **superficie**?Resolución de Problemas

Imagen 23: Propuesta: Resolución de problemas

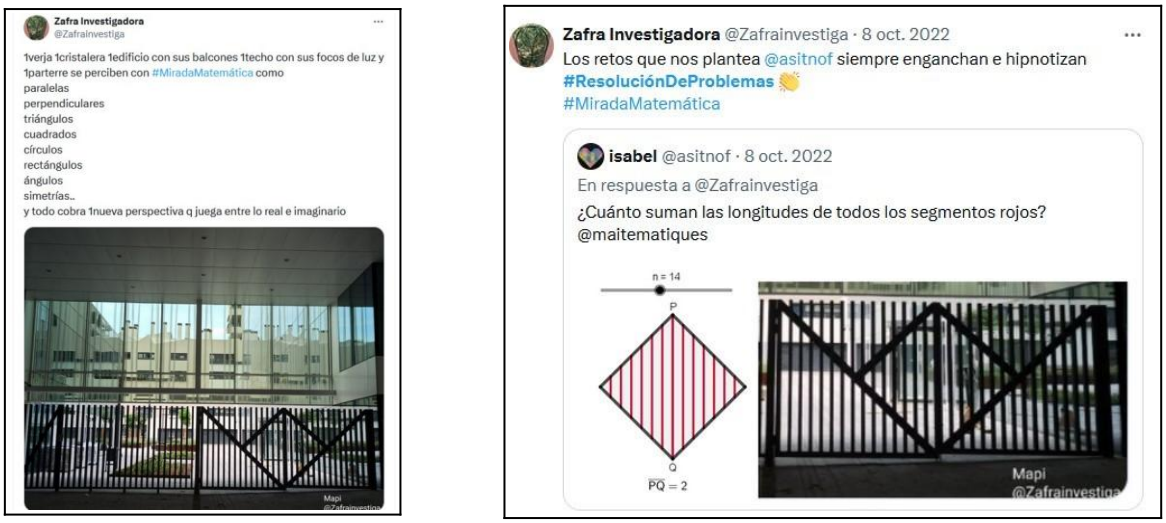


Imagen 24: Propuesta por parte de Isabel Font: Resolución de problemas

Una imagen puede ser motivo de inspiración para otras personas, en este caso para Isabel Font.

3.5. Puertas abiertas que nos muestran el interior

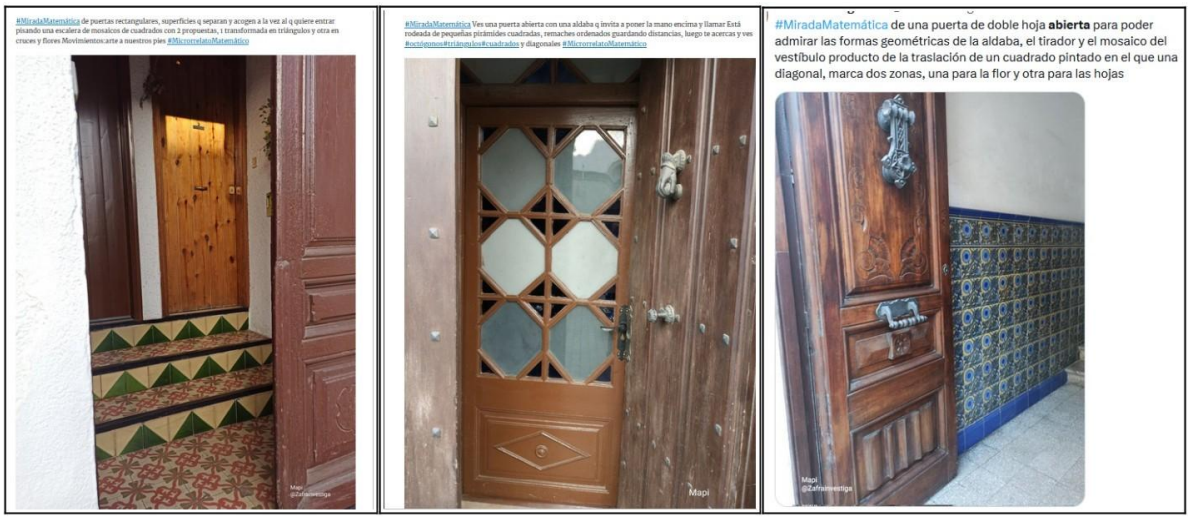


Imagen 25: Microrrelatos matemáticos de puertas abiertas que nos muestran su interior

- *#MiradaMatemática* de puertas **rectangulares**, **superficies** que separan y acogen a la vez al que quiere entrar pisando una escalera de **mosaicos** de **cuadrados** con 2 propuestas, 1 **transformada** en **triángulo**s y otra en **cruce**s y flores **Movimientos**:arte a nuestros **pies** *#MicrorrelatoMatemático*.

- #MiradaMatemática Ves una puerta **abierta** con una aldaba que invita a poner la **mano** encima y llamar. Está rodeada de pequeñas **pirámides cuadrada**s, remaches **ordenados** guardando **distancias**, luego te acercas y ves **octógonos, triángulos, cuadrados** y **diagonales** #MicrorrelatoMatemático
- #MiradaMatemática de una puerta de **doble hoja abierta** para poder admirar las **formas geométricas** de la aldaba, el tirador y el **mosaico** del vestíbulo **producto** de la **traslación** de un **cuadrado** pintado en el que una **diagonal**, marca **dos zonas**, una para la flor y otra para las hojas

Imagen 26: Microrrelatos matemáticos de puertas abiertas que nos muestran su interior

- Una puerta, es la **núm 56**, **par**, **suma** de **6 núms primos consecutivos**, está **semiabierta**, la parte **cerrada** con una **simetría** de **formas curvas**, la parte **abierta** deja ver una **escalera con gran pendiente**, y unas **baldosas Truchet** que invitan a subir con #MiradaMatemática de admiración

- Caminas, un **paso** tras otro **paso**, una puerta de **doble hoja** está **abierta** formando **ángulos, uno levógiro y otro dextrógiro**, te paras y admiras ese **mosaico** que guía tu mirada con una **perspectiva** de #MiradaMatemática hacia una puerta **cerrada, abierta** al **imaginario** de lo que habrá detrás.

- Modernismo de la #CasaLesPuntxes en la **Diagonal** de #Barcelona cuya belleza es una explosión de color en sus vidrieras de flores **hexagonales**

inscritas en circunferencias, belleza en la **simetría** de la disposición de faroles y **mosaicos** y bajo un techo con sensación **3D** *#MiradaMatemática*

4.Consideraciones finales

Ver, es una percepción, mientras que mirar necesita de una intencionalidad, una acción y una respuesta, por ello para mirar con mirada matemática el alumnado debe encontrase en situaciones donde desarrollar la mirada matemática y para ello se necesita un aprendizaje. No sabemos mirar, si no nos enseñan a hacerlo, mirando lo que nos rodea más allá de lo que nuestros ojos ven.

Para aprender se requiere una manera particular de mirar y aprender, es prestar atención a lo que nos rodea y educar la mirada requiere la acción de hacer consciente los aprendizajes por lo que para aprender matemáticas es necesario mirar lo que nos rodea con mirada matemática.

Para enseñar a mirar con mirada matemática, el alumnado necesitará una guía y modelos para aprender, por eso es importante que sean capaces de dar respuesta a preguntas:

- ¿Qué veo?
- ¿Qué puedo relacionar con conceptos matemáticos?
- ¿Qué historia quiero contar?
- ¿Qué tengo que tener en cuenta..?

Después de mirar un lugar con mirada matemática y fotografiarlo se trata de escribir matemáticas, para aprender matemáticas, analizando y sintetizando la realidad que nos rodea, utilizando microrrelatos con un máximo de 280 caracteres, y en el caso que proponemos, la mirada matemática de puertas, tanto de interior, como de exterior.

Por lo tanto se trata de contar historias con un hilo conductor a partir de fotografías realizadas por nosotras o por otras personas, utilizando en el texto, palabras que correspondan a conceptos con significado matemático. También podemos utilizar citas de autores.

Se puede implantar de manera puntual, en las jornadas del 11 de Febrero, 14 de Marzo, 12 de Mayo, Semana de la Ciencia, concursos literarios del 23 de Abril, ruta matemática de puertas, o formando parte del contenido curricular como propuesta de investigación.

Sea como sea, la evaluación será pilar del aprendizaje ya que debe ser utilizada como guía del proceso, permitiendo al alumnado saber las reglas de juego de lo que queremos, así sabrá autoevaluarse y evaluar el producto de compañeras y compañeros, porque deben saber que todo es válido, pero no todo vale cuando les pedimos la realización de un microrrelato matemático en el que pueden usar abreviaturas y emoticonos para poder ajustarse a los 280 caracteres como los que utiliza la red social X (antes twitter) a partir de la fotografía de puertas.

Es fuente de riqueza si se hace y evalúa en cooperación y utilizando diferentes herramientas didácticas que permitan la evaluación de sus producciones y las de los demás, ya sea, utilizando dianas de evaluación o criterios T.A.G a los que nos hemos referido anteriormente.

Es una propuesta adecuada para todos los niveles y alumnado de ESO/Bachillerato porque verán y mirarán en función del bagaje cultural y del contenido matemático que posea, además lo podrá completar y ampliar desarrollando una competencia informacional al tener que consultar fuentes bibliográficas sobre historia del lugar y su relación con las matemáticas.

De esta manera pueden dar a conocer el patrimonio de un lugar, base para diseñar rutas y también pueden hacerse preguntas en un contexto de resolución de problemas, utilizando o no, GeoGebra.

Por último citamos dos frases, una atribuida a Leonardo Da Vinci: "*No se puede amar lo que no se conoce, ni defender lo que no se ama*", así a través de la fotografía de puertas y su descripción con mirada matemática, se puede llegar a amar un lugar, y las matemáticas que "esconde", la otra relacionada con el hecho de que la belleza está en los ojos del que mira, de Claudi Alsina "*La matemática hermosa se enseña con el corazón*".

Referencias

Alsina, Cl. (2006). La matemática hermosa enseña con el corazón. *Sigma: Revista de matemáticas.* n.º 29, pp 143-150. ISSN 1131-7787

https://www.euskadi.eus/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_29/13_matem_hermosa.pdf

Menoyo-Díaz, M. del P. (2021). Microrrelatos matemáticos en un tuit: Una propuesta didáctica para educar la mirada matemática en *Revista Formación IB del 5 de abril de 2021* *http://formacionib.org/noticias/?Microrrelatos-matematicos-en-un-tuit-Unapropuesta-didactica-para-educar-la*

Menoyo-Díaz, M. del P. y Domínguez Tasias, M. (2021). *Educar la mirada matemàtica a partir de fotografies per elaborar un microrelat matemàtic: Una experiència amb alumnat de 1r d'ESO de l'Institut Caterina Albert de Barcelona.* LLibre d'actes del III Congrés CTEM de la comunitat Valenciana Edita: Generalitat

Valenciana. Conselleria d'Educació, Cultura i Esport ISBN: 978-84-482-6724-7. pp

120-126

https://portal.edu.gva.es/cefireambitctm/wp-content/uploads/sites/207/2022/07/ACTAS-COMPLETAS-III-CONGRESO-CTEM-BUENAS_compressed.pdf

Menoyo-Díaz, M. del P. (2021). *Importancia de la comunicación en una educación híbrida: Una experiencia en Secundaria en el aula de Matemáticas* Libro de Actas II Congreso Iberoamericano de Docentes Editores: Macías, Ó., Quiñónez, S. y Yucra,

J. ISBN: 978-84-948417 2-9 pp 365-379
http://formacionib.org/programa/actasiiconIB.pdf

Menoyo-Díaz, M del P. (2022). *Educar la mirada matemática, enseñar a mirar: La potencialidad didáctica de los microrrelatos matemáticos a partir de fotografías* Libro de Actas de las 20JAEM Editor: FESPM ISBN: 978-84-122154-0-3 pp 456-484 https://20.jaem.es/libro-de-actas/

Menoyo-Díaz, M. del P. (2023). Mirada Matemática de la Sagrada Familia de Antoni Gaudí. De la fotografía al microrrelato matemático. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* núm 69 ISSN: 1815-0640
https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1563

Mora Cañellas, LL. (2022). En busca de la conexión perdida. Libro de Actas de las

20JAEM Editor: FESPM ISBN: 978-84-122154-0-3 pp 78-101

https://20.jaem.es/libro-de-actas/

Soler, M. (2023) GeoGebra con Python. *Revista UNION*, núm. 69 ISSN: 1815-0640
https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1569

Rodríguez-Taboada, J (2023). Por calles y plazas: Matemáticas en tu entorno.

UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática núm 68 ISSN: 1815-

0640 https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1521

Geogebra: potente herramienta para el aprendizaje y la evaluación en matemáticas.

Juan Francisco Hernández Rodríguez
Colegio Hispano Inglés
juanfisicahzrz@gmail.com

Núcleo temático: Evaluación

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Geogebra se ha convertido en una de las *mejores herramientas para el Aprendizaje Basado en Proyectos* (y para la evaluación) en el área de matemáticas ya que, por un lado, agiliza que los alumnos lleven a cabo un proceso de investigación y, por otro, fomenta la creación de productos de enorme calidad. Esto ha permitido también *"dar la vuelta" al proceso de evaluación* dando más peso a las actividades que realizan en clase que a los exámenes. De hecho, l**a mejor manera de mostrarlo es con ejemplos reales de lo que hacemos en clase**.

Objetivos del taller:

a. Mostrar cómo el alumnado usa Geogebra y cómo es útil para el proceso de evaluación.

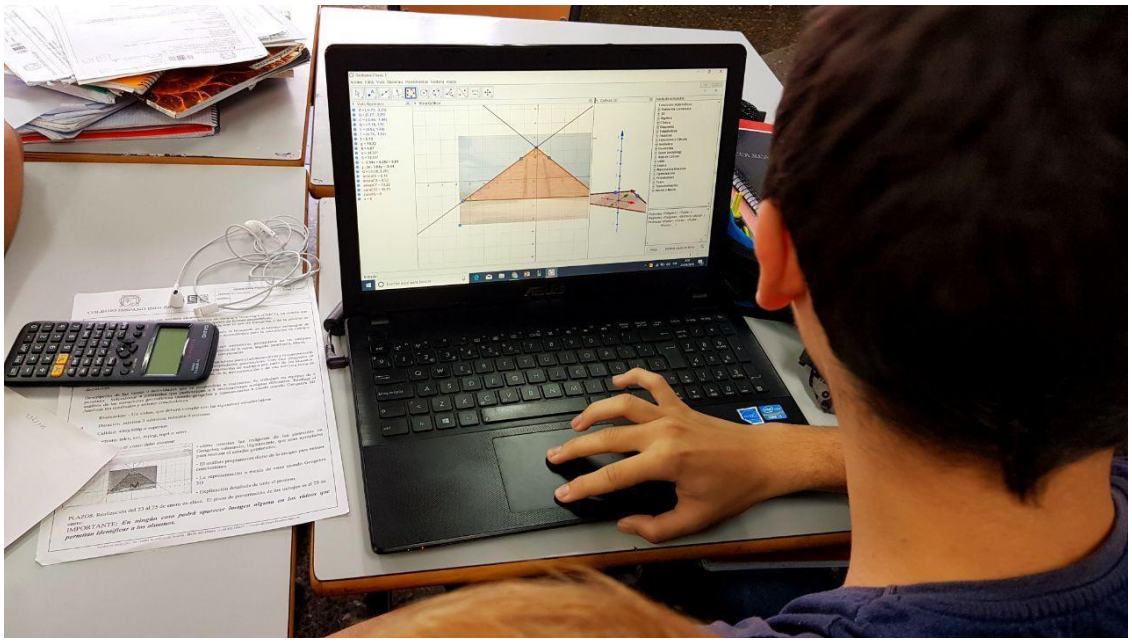
b. Entender cómo Geogebra propicia un cambio en la forma de evaluar.

c. Conocer el modelo de Aprendizaje Basado en Geogebra y cómo aplicarlo en nuestra práctica docente.

d. Conocer las ventajas que ofrece Geogebra dentro del aprendizaje de las matemáticas

e. Utilizar Geogebra como una herramienta fundamental del Storytelling.

f. Mostrar cómo planificar un proyecto haciendo uso de Geogebra.



Introducción / Marco teórico del taller

Desde hace ya unos años utilizo Geogebra para realizar demostraciones y/o comprobaciones matemáticas y constituye un recurso educativo muy útil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. No solo yo, también mis alumnos lo utilizan para realizar proyectos de matemáticas.

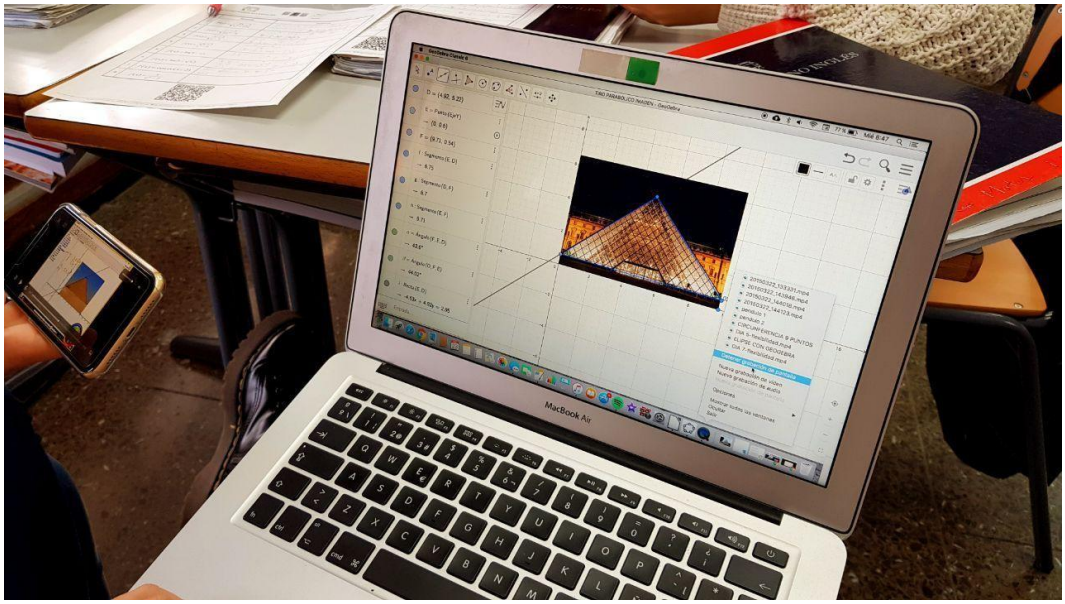
La posibilidad de modificar fácilmente, usando deslizadores, los parámetros de la simulación con el fin de observar y analizar las consecuencias que tienen estos cambios sobre el proceso en estudio es una de las herramientas más poderosas de Geogebra.

En el plano didáctico el uso de Geogebra tiene importancia por cuatro motivos:

Permite sustituir una secuencia didáctica habitual que me llevaría unas cuantas horas por una clase en la que usando Geogebra puedo mostrar varios problemas que, además, son interactivos y puedo ir modificando sobre la marcha. Por ejemplo, dibujar los problemas de representación gráfica u optimización en la pizarra me llevaría varias horas, pero con Geogebra puedo mostrar problemas de este tipo en solo una hora de clase. Esto permite que quede tiempo en el aula para que mis alumnos realicen sus proyectos con este software.

Ayuda a promocionar ciertas competencias que mis alumnos deben adquirir, como, por ejemplo, encontrar sentido a las relaciones entre las distintas variables matemáticas, debido a que en las mismas se utilizan gráficas, diagramas, tablas, curvas que son más fáciles de ver con Geogebra.

Ayuda a entender las ecuaciones y fórmulas que involucran distintas variables matemáticas y afianza modelos mentales de los procesos de razonamiento, lo que posibilita que sean más capaces a la hora de enfrentarse a nuevos problemas de matemáticas.



Es perfecta para la elaboración de productos finales por parte de mis alumnos, por ejemplo, para la preproducción de los videos, pues ayuda en la planificación y en la preparación del guion para la grabación del vídeo. En el

momento de la grabación, simplifica la explicación de los conceptos matemáticos y, de hecho, crea una mayor conexión emocional. Así, se puede afirmar que Geogebra es el "storytelling de las matemáticas". *Por tanto, las simulaciones con Geogebra posibilitan a mi alumnado entender mejor las relaciones entre las diversas variables matemáticas y ayuda en la comprensión de todos los temas de matemáticas*.

No solo eso, también les permite realizar trabajos de investigación. Algunos de los proyectos que les pido que realicen cada año es investigar los problemas de optimización en la vida real, el estudio de cónicas en la vida real, aplicaciones de los logaritmos, determinación de áreas de figuras extrañas, de gamificación (Amaro Pargo, Agustín de Betancourt,..),...

Método de aplicación (descripción sobre el taller):

El Aprendizaje basado en Geogebra es una estrategia metodológica que se lleva aplicando desde hace varios años en mi centro. Mis alumnos están acostumbrados a tareas basadas en la resolución de preguntas o problemas (retos), mediante un proceso de investigación o creación por su parte que conlleva un alto nivel en el uso de Geogebra.

Esta forma de aprendizaje demanda un requisito previo: es necesario cambiar el cuaderno de evaluación para dar más peso a las actividades que se realizan en el aula y menos a los exámenes. De no ser así, sería inviable pedir a los alumnos que

trabajen y aprendan con Geogebra. Carece de sentido pedirles que hagan proyectos y que después estos solo tengan un peso del 10 o del 20% sobre el cómputo total de su calificación. Cuando me preguntan a qué se debe el éxito en mi colegio con el uso de esta herramienta, siempre respondo lo mismo: “Se debe a que hemos cambiado el cuaderno de evaluación primando este tipo de actividades”

Actualmente, el peso de estos proyectos y de las dinámicas realizadas con Geogebra en el aula es del 50%.

Evidentemente, los alumnos en cada proyecto cuentan con una rúbrica (o guía de evaluación) que les permiten conocer cuáles son sus expectativas en el ámbito de la evaluación y también pueden autoevaluarse siguiendo dicha guía. Es un instrumento idóneo ya que permiten evaluar por competencias.

En general solemos evaluar:

- Los contenidos adquiridos y su aplicación.
- La expresión y explicación oral.
- La creatividad.
- La secuenciación de la información.
- El interés mostrado.
- Tiempo.
- Uso correcto de Geogebra.

Se ha convertido, como pueden apreciar, en una de las mejores herramientas para el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP / PBL) en el área de las Matemáticas (también de la Física) ya que, por un lado, *agiliza que los alumnos lleven a cabo un proceso de investigación* y, por otro, *fomenta la creación de productos de enorme calidad*

Los alumnos, al tener que explicar en video cómo construyen el Geogebra y los conceptos matemáticos utilizados, han mejorado en su capacidad de aplicar el razonamiento matemático, en el uso de herramientas para describir e interpretar, en el uso creativo de las tecnologías de la información, en la capacidad para expresarse mediante el lenguaje hablado, han ganado en iniciativa y son más proactivos,…

Referencias

[1] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2018). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.theflippedclassroom.es/ https://www.theflippedclassroom.es/geogebra-una-potentisima-herramienta-paraflipped-y-abp-en-matematicas-y-fisica/

[2] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.theflippedclassroom.es/ : https://www.theflippedclassroom.es/desde-lo-alto-de-estas-piramides-40-siglos-noscontemplan-bonaparte/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2018). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/10/28/proyecto-biomatematicas-anode-la-biologia-matematica/

[3] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/01/29/analysis-of-yramids-withgeogebra/

[4] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/05/31/proyecto-pendulo-trabajos-delos-alumnos/

[5] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2017/06/27/proyectos-finalesmatematicas-4o-e-s/

[6] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2017/05/23/ejemplos-proyectosmatematicas-edicion-carnamat84/

[7] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/05/08/proyecto-tiros-parabolicos-enla-vida-reali/

[8] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/05/10/proyecto-tiros-parabolicos-enla-vida-realii/

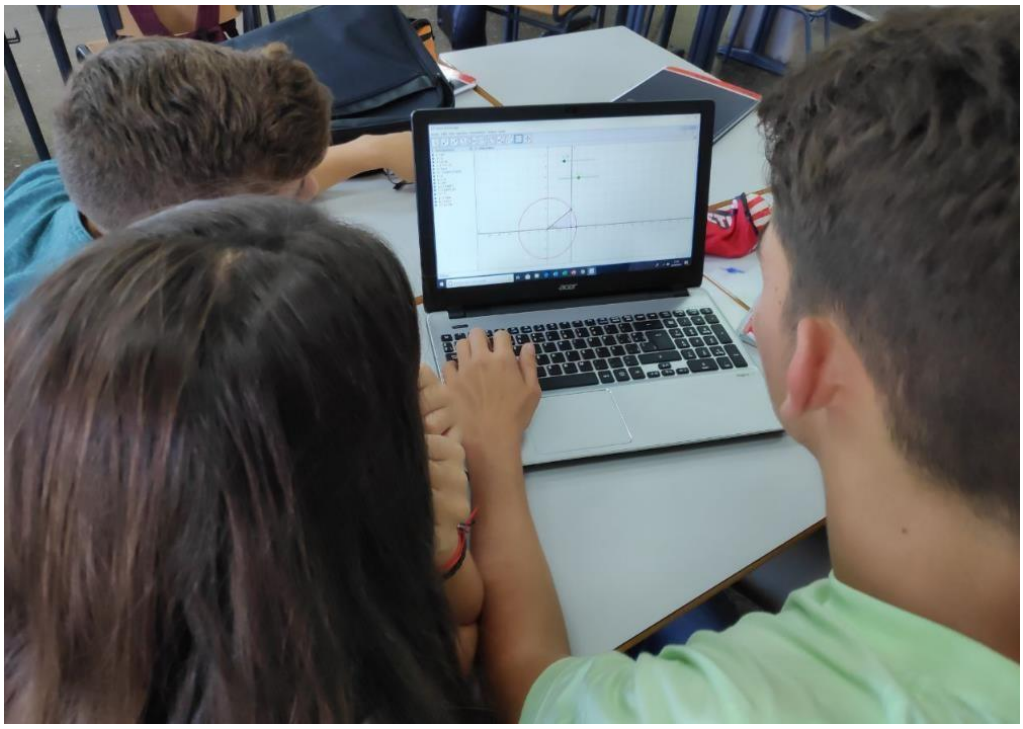
[9] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/09/26/proyecto-calculadorastrigonometricas/

[10] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/01/14/localizacion-de-puertoseco-con-geogebra/

[11] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/11/20/el-enigma-de-agustin-debetancourt/

[12] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/12/11/idolo-de-tara-congeogebra/

[13] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/11/15/el-tesoro-de-amaro-pargo/



Referencia en la web sobre mi blog y canal de YouTube:

https://www.estonoentraenelexamen.com/

Espero que esta comunicación les resulte útil y pueda aportar a las Jornadas de Santander. Lo aquí recogido es solo una muestra de lo que hacen los alumnos a los que imparto clase.

Un saludo afectuoso.

Juan Francisco Hernández Rodríguez

Resultados de una situación de aprendizaje sobre el concepto de función en 1º DE ESO

M.ª Esther Fernández Arellano
mferare912@g.educaand.es
IES Las Salinas (Fuengirola-Málaga)

Juan Pedro Martín Díaz
juan.martin@ddcc.uhu.es
Universidad de Huelva

Sergio Manuel Pérez Pozuelo
sergio.m.perez@uv.es
Universidad de Valencia

Susana Repiso Barba
srepbar827@g.educaand.es
CEIP Pilar Martínez Cruz (Huelva)

Núcleo temático: Procesos, Formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

El objetivo de esta comunicación es dar a conocer los resultados de la implementación de una situación de aprendizaje diseñada para introducir el concepto de función en 1º de ESO en el marco de un proyecto de investigación educativa de la Junta de Andalucía, formado por docentes de diferentes niveles educativos e investigadores en Educación Matemática. Una vez diseñada la situación de aprendizaje, las

actividades y las tareas a realizar, desde un planteamiento de alta demanda cognitiva, se implementó en el aula por una de las profesoras integrante del proyecto, se grabaron las sesiones y posteriormente se procedió a su análisis en el seno del grupo centrándonos en la gestión docente.

Palabras clave: situación de aprendizaje, función, gestión de la demanda cognitiva, aprendizaje significativo.

1. Introducción y bases teóricas

Las situaciones de aprendizaje suponen un nuevo reto para los maestros y profesores desde la perspectiva de su diseño e implementación. Estas situaciones se centran en la consecución de unos objetivos determinados basados en retos. Estos retos deben guiar al alumnado hacia la construcción de nuevos aprendizajes.

Las tareas de alta demanda cognitiva, por su parte, persiguen que los alumnos construyan conocimientos a partir de conexiones entre conceptos matemáticos mediante el razonamiento y la indagación. Según Stein et al. (1996), las tareas de alta demanda cognitiva permiten involucrar a los estudiantes en un aprendizaje profundo, que requiere interpretación, flexibilidad y construcción de significados. En ese sentido, la resolución de problemas matemáticos es considerada una tarea de alta demanda cognitiva, por cumplir con las características descritas con anterioridad.

Sin embargo, a pesar del potencial de las tareas de alta demanda cognitiva, su diseño e implementación no es sencillo, ya que, además de las dificultades que enfrenta el docente en su diseño se requiere, además, que este mantenga la demanda de la tarea durante su implementación en el aula (Henningsen y Stein, 1997; Stein et al., 2008). Para ello, el profesorado debe poner el foco en el razonamiento y el pensamiento matemático, modelizar actuaciones de alto nivel, hacer preguntas que conlleven la argumentación, favorecer el establecimiento de conexiones conceptuales y el control del tiempo. Esto implica, a su vez, que el docente guíe a los estudiantes sin proporcionar información sobre la resolución inmediata de la tarea.

Dado que, según entendemos, las situaciones de aprendizaje deben perseguir un aprendizaje significativo del alumnado, consideramos situaciones de aprendizaje que involucren tareas de alta demanda cognitiva.

En esta propuesta, además de la noción de tarea de alta demanda cognitiva, hemos de considerar el contenido involucrado en la tarea: las funciones. Este constructo matemático enlaza la matemática elemental con el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991).

En este trabajo nos ocupamos de una propuesta para introducir el concepto de función. Es necesario que, previamente, los estudiantes de primer curso de ESO conozcan algunos saberes básicos vinculados con la idea de función como: patrones, variables, relaciones de dependencia y modos de representación de estas relaciones. El dominio de estos conceptos matemáticos es necesario para poder construir una primera idea de función que, posteriormente, posibilite comprender conceptos matemáticos más avanzados como límite, derivabilidad, integración, etc. La falta de adquisición de los saberes básicos clave para la comprensión del concepto de función puede derivar en dificultades en el aprendizaje de estos conceptos avanzados (Codes, 2010; McDonald y otros, 2000).

Así, la intención de esta comunicación es mostrar cómo una maestra gestiona una tarea que introduce la noción de función manteniendo la demanda cognitiva de la tarea. Esta sesión se ha desarrollado en un proyecto de investigación colaborativa (por sus siglas, PIC y del que formamos parte los 4 autores de esta comunicación), el cual está compuesto por 12 miembros de diferentes perfiles de la comunidad educativa (maestros, profesores de distintos niveles y estudiantes del Grado de Educación primaria, máster y doctorado). Esta diversidad hace que el PIC goce de una gran riqueza de perspectivas, lo que supone que se generen reflexiones y discusiones ricas desde diferentes niveles educativos.

2. Implementación de una situación de aprendizaje para la introducción al concepto de función en 1º ESO

La situación de aprendizaje cuya implementación describimos se diseñó para una clase de 1º curso de ESO de un instituto público de Fuengirola (Málaga). El diseño se realizó en el PIC y se implementó por parte de una de las profesoras del grupo, con sus estudiantes. Esta profesora es licenciada en Matemáticas y ha realizado un máster de investigación en Educación Matemática; tiene 6 años de experiencia como profesora de matemáticas de Educación Secundaria y participa en el PIC desde hace 6 años.

El centro es de dos líneas y el alumnado puede cursar desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato. Para favorecer la adaptación de los alumnos de primero de ESO, el centro realiza desdobles en las materias de Matemáticas y de Lengua Castellana y Literatura; para ello los 66 alumnos de 1ª de ESO se reparten en tres grupos de 22 alumnos cada grupo. Es por lo que esta situación de aprendizaje se llevó a cabo solo con este número de alumnos.

Otra peculiaridad de este grupo de alumnos es que mayoritariamente provienen del mismo centro de primaria adscrito, donde también son dos líneas por curso y muchos de ellos llevan juntos desde los comienzos de su etapa escolar.

La situación de aprendizaje se plantea en torno a una carrera solidaria que se celebra anualmente en el centro (30 de enero, en el que se conmemora el Día de la Paz) con la finalidad de recaudar fondos para ayudar a familias necesitadas a través de una asociación local. Para ello, pusimos el foco en el producto final situado en la introducción al concepto de función, sus representaciones y en el desarrollo del pensamiento proporcional (para los estudiantes el producto final consiste en el estudio del dinero recaudado).

La implementación se realiza en tres sesiones de matemáticas, la primera el día previo a la carrera, la segunda el mismo día de la carrera (tras terminar la misma) y la tercera sesión al día siguiente de esta. Pasamos ahora a describir dichas sesiones.

2.1 Sesión 1: previsión del dinero recaudado en función del número de vueltas

El alumnado fue dividido en 5 grupos y cada componente del grupo debía aportar su carnet de corredor relleno con los patrocinadores y las cantidades que cada patrocinador le daría por las vueltas dadas al edificio el día de la carrera.

Figura 1: Reveso del carnet de corredor del alumnado.

Figura 2: Anverso del carnet de corredor del alumnado.

El alumnado aportó las cantidades de sus patrocinadores para registrar la previsión de lo recaudado por cada grupo en una plantilla (Figura 3). Se les indicó previamente que el dinero que recauda un grupo es el dinero total que recaudan entre todos los componentes multiplicado por la media del número de vueltas del grupo. Escribieron primero la cantidad de euros prevista por vuelta de cada componente del grupo, para así obtener el total de todos los componentes del grupo.

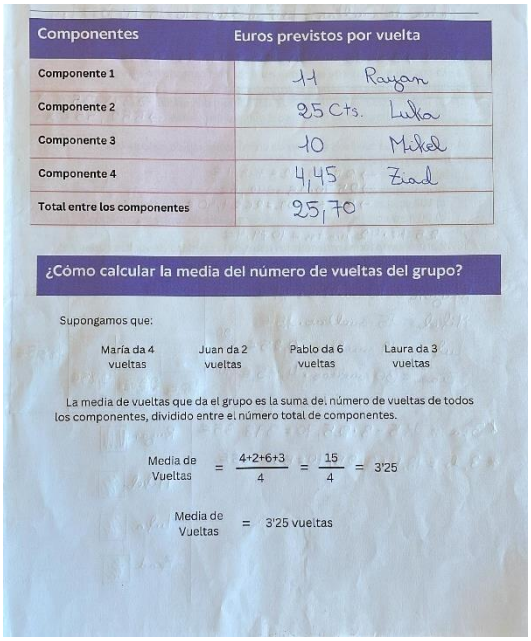


Figura 3: Plantilla de registro de lo recaudado por uno de grupos.

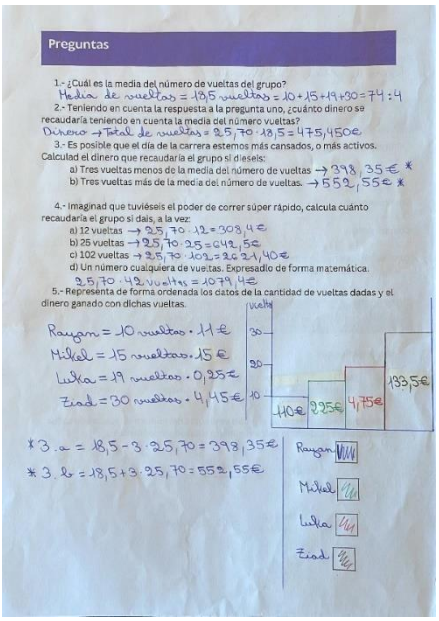


Figura 4: Registro de las preguntas a responder por uno de los los grupos, según su recaudación.

El tiempo de trabajo lo emplearon en responder de forma grupal a las preguntas de la plantilla de registro (Figura 4), donde hallaron la media del número de vueltas del grupo (las vueltas que creían que iban a poder dar el día de la carrera) y cuánto recaudarían teniendo en cuenta los datos anteriores. Además, había preguntas para estimar los euros que se recaudarían en situaciones hipotéticas, con la finalidad de que llegaran a formularlo matemáticamente para cualquier número de vueltas dadas. Por último, también se les pidió una representación ordenada de los datos que utilizaron en el registro.

Pasado el tiempo de trabajo, unos 35 minutos aproximadamente, se hizo una puesta en común de los resultados obtenidos haciendo especial énfasis en las preguntas 4 y 5 del registro, dejando escritas en la pizarra todos las ideas y reflexiones que fueron surgiendo (Figura 5).

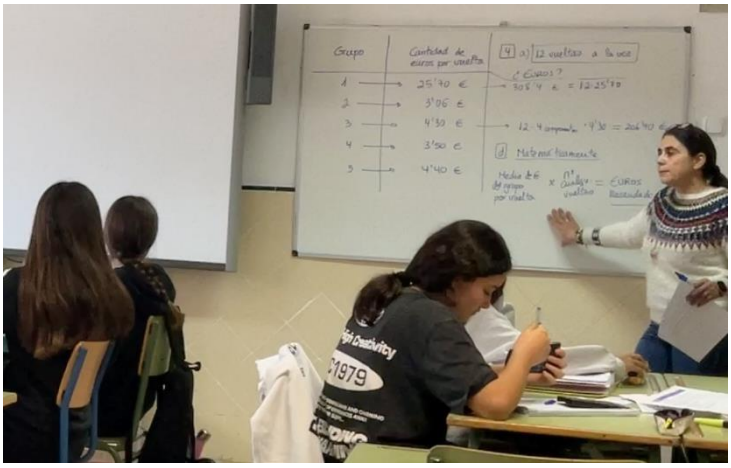


Figura 5: Imagen de la puesta en común de la actividad 1.

Durante dicha puesta en común los alumnos razonaron cómo habían calculado los euros recaudados en cada grupo (según el número de vueltas que habían estimado que darían en la carrera) y cuánto recaudarían si dieran 12 vueltas cada componente del grupo (pregunta 4 de la actividad). Posteriormente, se preguntó por una expresión matemática que sirviera para cualquier número de vueltas dadas y se dejó registrado en la pizarra.

2.2 Sesión 2: ¿quién recaudaría más?

Como en la sesión anterior no se llevó a la puesta en común la pregunta de la representación gráfica (pregunta 5 de la actividad), se les permitió un tiempo de trabajo extra para recordar la actividad completa del día anterior y poder realizar la puesta en común de sus representaciones gráficas.

Tras unos 15 minutos de trabajo se comenzó con la puesta en común para exponer las diferentes representaciones gráficas que los grupos habían realizado. Para ello, se mostró en la pizarra digital un eje de coordenadas y otro en la pizarra, con ello se pretendió que los alumnos expusiesen sus representaciones (Figura 6). La profesora preguntó a la clase cuál de las representaciones (diagrama de barras o coordenadas) era más coherente. Como los argumentos dados por los alumnos no eran acertados, la profesora siguió insistiendo en que había que relacionar vueltas con euros y si ese tipo de representación les recordaba algún gráfico que hubieran visto antes. En ese momento, un alumno habló de gráficas de economía en los periódicos y otro habló de coordenadas, por lo que la profesora proyectó ejemplos de esto en la pizarra digital.

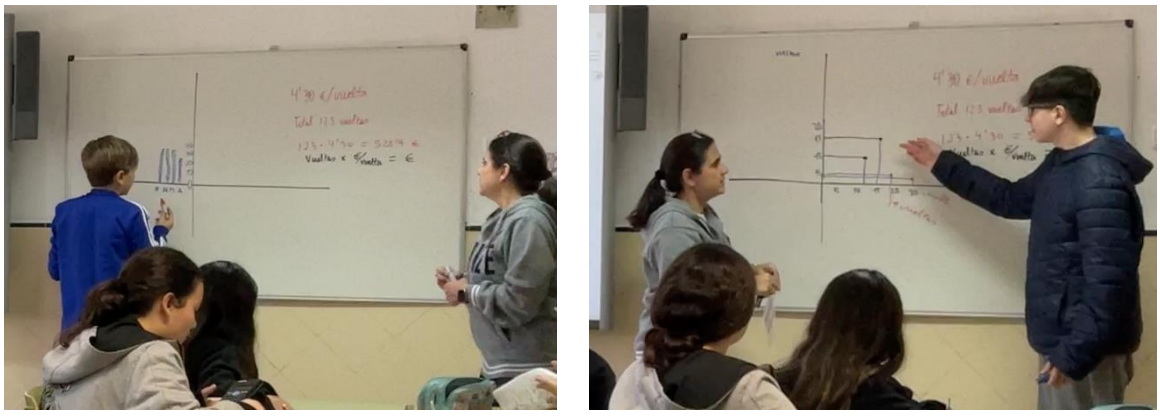


Figura 6: Imágenes de la puesta en común con algunas representaciones gráficas.

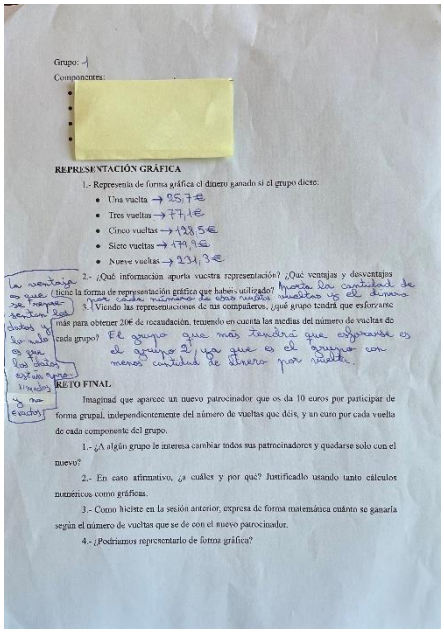
Posteriormente, en la pantalla digital, haciendo uso de GeoGebra, se proyectaron las representaciones gráficas de las relaciones entre número de vueltas dadas en la carrera y los euros recaudados por cada grupo. La profesora mostró las características de estas con la finalidad de que puedan razonar matemáticamente

“¿Quién recaudará más?", cerrando así la segunda sesión y la actividad 1 (Figura 7).

Figura 7: Proyección con GeoGebra de las representaciones gráficas.

2.3 Sesión 3: Análisis de las representaciones gráficas y reto final

Para la última sesión repartimos a cada grupo una ficha de registro para trabajar la representación gráfica, usando los datos de los euros recaudados (de la ficha anterior), y la información que les aportan dichas representaciones. Además, en la ficha de registro se planteaba un reto final en el que aparecía un nuevo patrocinador modificando las cantidades recaudadas. (Figura 8)



Grupo: 4

Componentes:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

1.- Representa de forma gráfica el dinero ganado si el grupo dicte:

- Una vuelta → 95,7€
- Tres vueltas → 77,1€
- Cinco vueltas → 128,5€
- Siete vueltas → 179,9€
- Nueve vueltas → 231,3€

2.- ¿Qué información aporta vuestra representación? ¿Qué ventajas y desventajas tiene la forma de representación gráfica que habéis utilizado? Aporta las cantidades de cada vuelta y el número de vueltas

3.- Viendo las representaciones de tus compañeros, ¿qué grupo tendrá que esforzarse más para obtener 20€ de recaudación, teniendo en cuenta las medias del número de vueltas de cada grupo? El grupo que más tendrá que esforzarse es el grupo 2 ya que es el grupo con menor cantidad de dinero por vuelta

RETO FINAL

Imaginad que aparece un nuevo patrocinador que os da 10 euros por participar de forma grupal, independientemente del número de vueltas que déis, y un euro por cada vuelta de cada componente del grupo.

1.- ¿A algún grupo le interesa cambiar todos sus patrocinadores y quedarse solo con el nuevo?

2.- En caso afirmativo, ¿a cuáles y por qué? Justificadlo usando tanto cálculos numéricos como gráficas.

3.- Como hicisteis en la sesión anterior, expresa de forma matemática cuánto se ganaría según el número de vueltas que se dé con el nuevo patrocinador.

4.- ¿Podríamos representarlo de forma gráfica?

Figura 8: Plantilla de la ficha de registro de uno de los grupos.

Para que los alumnos arrancaran con los datos importantes del día anterior, la profesora escribe en la pizarra una tabla relacionando cada grupo con los euros por vuelta calculados en las sesiones anteriores. Posteriormente, para retomar las representaciones con las que se terminó la sesión anterior, la profesora pidió a uno de los alumnos que dibujara en la pizarra la gráfica de su grupo. Mientras el resto de los grupos debían ir representando sus gráficas en folios de cuadros.

Tras unos 15 minutos de trabajo en forma grupal, algunos de los grupos sólo habían respondido a la pregunta de la representación gráfica y la profesora les pidió que dibujaran dichas representaciones en la pizarra sobre los mismos ejes de coordenadas, con la intención de compararlas y que pudieran responder al resto de las preguntas de la ficha (Figura 8) en gran grupo.

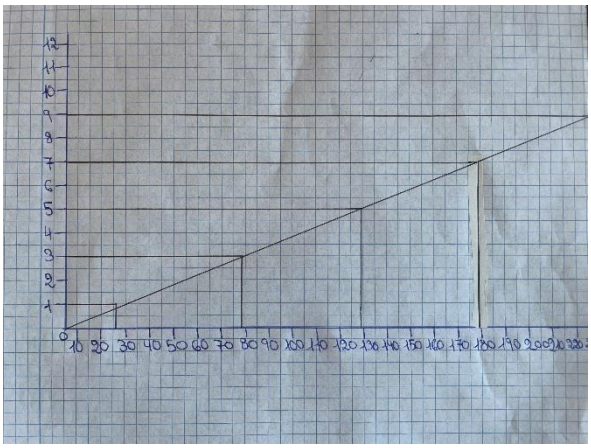


Figura 9: Representación gráfica de uno de los grupos.

Al igual que en la sesión anterior los alumnos representaron sus gráficas manteniendo los euros en el eje de abscisas y el número de vueltas en el eje de ordenadas. Realizaron la gráfica con los valores de 1, 3, 5, 7 y 9 vueltas. (Figura 9)

Al ver todas esas representaciones gráficas en el mismo eje de coordenadas, una de las alumnas reconoció lo representado con GeoGebra en la sesión anterior (Figura 10) y otros dos alumnos coincidieron en que se deberían haber marcado el número de vueltas en el eje X y los euros recaudados en el eje Y.

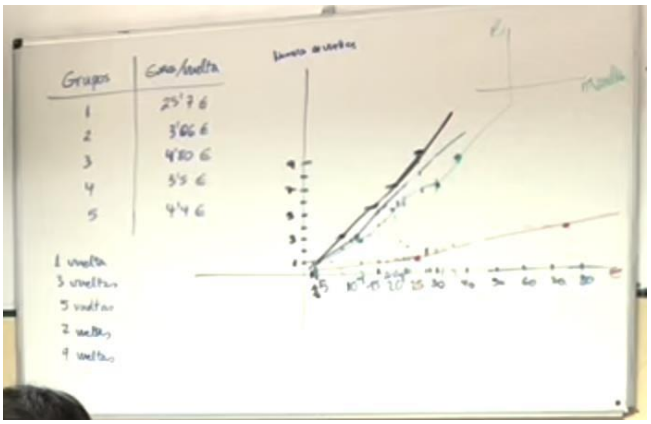


Figura 10: Representaciones gráficas en la pizarra de todos los grupos.

La profesora les pidió que explicaran al resto de la clase su razonamiento y uno de estos alumnos argumentó que "porque con el mismo tiempo, el que consigue más dinero debería estar más arriba en la gráfica". Fue en este momento cuando la profesora preguntó cuál era el objetivo de la carrera y comenzó a salir la dependencia de los euros en función de las vueltas dadas. La profesora representó las gráficas con el cambio de ejes y comentaron en gran grupo las diferencias de ambos gráficos (Figura 11).

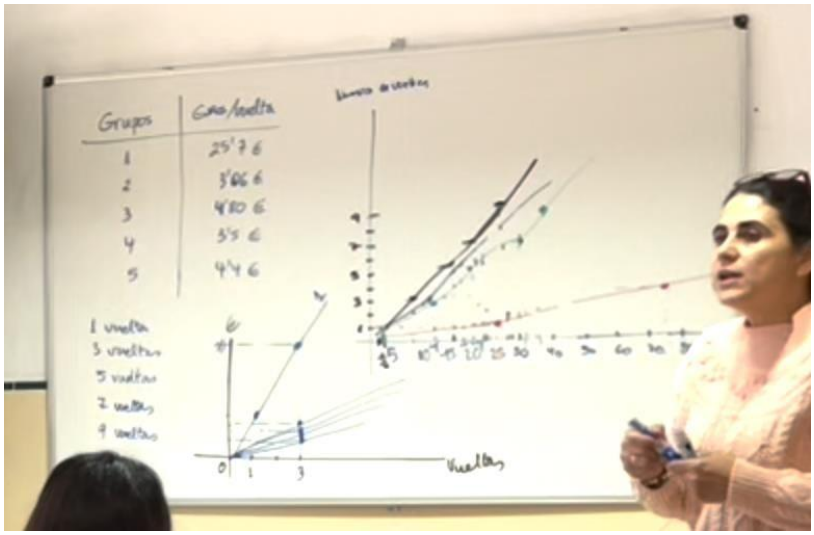


Figura 11: Comparación de representaciones gráficas en la pizarra.

Para finalizar, la profesora plantea el reto final con un nuevo patrocinador (segunda parte de la figura 8) y razonando en gran grupo se consiguió llegar a la fórmula para obtener los euros recaudados con este nuevo patrocinador.

3. Recogida de datos y análisis de la sesión

Para la recogida y análisis de los datos las tres sesiones implementadas sesiones se grabaron con videocámara donde quedaron recogidas las producciones de la pizarra blanca y la pizarra digital. También se utilizaron grabadoras de voz para recoger los comentarios del alumnado en los pequeños grupos. Se complementó la recogida de datos con las producciones escritas de cada grupo. En las sesiones llevadas a cabo en el PIC se han analizado las grabaciones de la videocámara, así como algunos fragmentos de las grabadoras de voz y de las producciones escritas, centrándonos en la gestión del docente.

Para el análisis de la gestión de la tarea hemos adaptado al análisis de situaciones de aprendizaje un instrumento previo del PIC para el análisis de la gestión del profesor en relación con la demanda cognitiva de la tarea (basado en Stein y Smith, 1998, y Stein et al., 1996) (Pérez-Guzmán, Martín-Díaz, Díez -Fernández y Climent, 2023). Algunas de sus categorías se refieren a si la profesora favorece que el alumnado comprenda las tareas, el tipo de ayudas que ofrece (si mantienen la alta demanda cognitiva), las intervenciones que lleva a cabo para conocer los conocimientos previos del alumnado, si propicia paradas de reflexión para que el alumnado tome conciencia de su progreso en la tarea, y si en la puesta en común favorece que se presenten resoluciones de distinto nivel y se avance hacia un nivel mayor de complejidad.

Por lo que respecta a la gestión del docente para favorecer el aprendizaje del alumnado, estudiamos el papel de la profesora para que los alumnos y las alumnas apliquen diferentes estrategias para resolver la tarea, argumenten los procesos de resolución y la justificación de los resultados, apliquen los conocimientos previos previstos necesarios, generalicen la situación que se presenta y se impliquen en la tarea, realicen matemáticas según las observaciones esperadas u otros signos, que no se pierda la alta demanda cognitiva y se observe una promoción del aprendizaje social.

En los dos apartados que siguen mostraremos el análisis de la gestión del docente de la situación de aprendizaje y las dificultades que ha tenido en su implementación.

4. Resultados de la implementación

4.1 Gestión de la situación de aprendizaje

En cuanto a la gestión de las sesiones por parte de la profesora, observamos que es coherente con las distintas fases en las que está dividida la tarea.

Sus intervenciones favorecen que el alumnado tenga claro el cometido de cada fase de la tarea, la contextualización y el desarrollo de esta; suele utilizar expresiones como: “Leerlas con tranquilidad. Si no entendéis algo, consultarlo con el grupo y, en última instancia, me lo preguntáis a mí, ¿vale?, pero primero consultarlo con el grupo”.

La profesora formula cuestiones que ayudan a mantener la alta demanda cognitiva de la tarea. Plantea preguntas del tipo: “¿y si en lugar de…? ¿tú qué opinas de…?

¿dónde dices tú que se ponen?” Para implicar al alumnado en la reflexión, a la vez que comenta respuestas que crean la necesidad de que el alumnado recurra a los conocimientos previos acerca del tema, así como también conducen al descubrimiento gradual de lo necesario para seguir avanzando.

La profesora es capaz de cambiar la forma de preguntar o comentar cuando se da cuenta de que el alumnado pierde un poco el interés y se distrae o no está entendiendo bien lo que se le demanda. Por ejemplo, les pide que vuelvan a leer la pregunta.

Emplea estrategias didácticas con las que implica al alumnado en el rol de docente y facilita la interacción entre iguales para rebatir o verificar razonamientos, y hacer los cambios adecuados en sus planteamientos para que estos se acerquen cada vez más a lo esperado. Utiliza y enfatiza sugerencias de los alumnos. Del mismo modo, también se muestra flexible en cuanto al uso y abandono de un recurso para sustituirlo por otro que se ajuste mejor a la necesidad del momento.

El alumnado está distribuido en grupos. Este agrupamiento potencia la ayuda entre iguales y hace posible la reflexión conjunta previa a la puesta en común, por lo que también se están poniendo en práctica aspectos emocionales y socioafectivos, que contribuyen al desarrollo de los valores propios de la democracia y positivos para la convivencia constructiva y pacífica.

Recordemos que la gestión de la sesión no es un elemento aislado, está influida por las circunstancias, las características del grupo, el tiempo estimado y el tiempo real que se invierte, el propio diseño de la tarea, etc. y que todo eso interviene en el proceso de enseñanza aprendizaje.

4.2 Dificultades en la implementación de la situación de aprendizaje (desde el punto de vista de la maestra)

Las dificultades encontradas en la implementación de la situación de aprendizaje se pueden enfocar desde tres puntos de vista: el diseño, la actitud del alumnado y el contexto o los imprevistos encontrados en la implementación.

Desde el punto de vista del diseño, se ha detectado que algunas preguntas eran largas y complejas para el nivel del grupo donde se implementó la situación de aprendizaje. En algunas de las actividades había muchas preguntas dentro del mismo apartado; esto ralentizó el trabajo en cada grupo. Por ello, nos planteamos que se deben revisar tanto la forma de formular las preguntas como si se han realizado preguntas redundantes que no aporten información. Por ejemplo, se debería revisar el enunciado de la pregunta 5 de la primera sesión para que lleve a una tabla antes de llegar a una representación gráfica. También se debe revisar si se incluyeron demasiados contenidos relacionados de forma secuencial (idea de variable, relación funcional, representación, pendiente…) teniendo en cuenta que en primero de ESO ven las funciones por primera vez.

Desde el punto de vista de la actitud del alumnado, se puede destacar que los grupos compuestos por 4 o 5 alumnos resultaron demasiado numerosos ya que perdían la atención y la motivación en la actividad con facilidad. Por otro lado, se observó falta de autonomía para razonar y exponer ideas en la mayoría de los alumnos (siempre

participaban activamente los mismos). Respecto a los contenidos, cabe destacar que desde el comienzo de la actividad los alumnos parecieron mostrar dificultades de concentración o falta de comprensión lectora; por ejemplo, con el cálculo de la media del número de vueltas de cada grupo.

Por último, si nos fijamos en el contexto y en los imprevistos surgidos durante la implantación de la situación de aprendizaje, debemos hablar de la temporalización de las sesiones. Al ser grupos que se desdoblaban para esta materia, se perdía demasiado tiempo en comenzar las sesiones y se cortaban demasiado pronto porque los alumnos de los otros desdobles volvían al aula. Otro de los aspectos que se podría mejorar sería que cuando se representan en la pizarra los datos de todos los grupos (euros/vuelta), conviene no usar previamente una tabla para organizar los datos (número del grupo/euros) para no confundir con la tabla de valores de las funciones que se representan.

5. Conclusiones

Como se ha podido observar a lo largo del análisis, la maestra ejerce un papel de gestora de la sesión, tratando de intervenir solo con preguntas o aportaciones que ayuden a su alumnado a continuar con la actividad. Las ayudas que utiliza permiten que la demanda de la actividad se mantenga y los alumnos construyan el concepto de función a través del desarrollo de la actividad y no como proceso memorístico.

Las paradas de reflexión que realiza la docente le permiten conocer en qué punto se encuentra cada alumno. Sus intervenciones se basan en preguntas para conocer los avances o dificultades que puedan estar teniendo en el trascurso de la actividad. Estas paradas también le sirven para que los alumnos expliquen el proceso a otros alumnos en voz alta y que emerjan resoluciones diferentes.

Este último aspecto se evidencia a través del análisis de la puesta en común. No solo permite que los alumnos expongan diferentes resoluciones a una misma tarea, sino también selecciona a aquellos que piensa que pueden tener una resolución con un nivel superior.

Esta gestión de la maestra parece clave para el desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes. En este sentido, a pesar de las dificultades detectadas, los alumnos formulan ideas propias sobre la noción de función, por ejemplo, al identificar las representaciones realizadas por ellos mismos en la última sesión con las vistas en la sesión anterior con el programa Geogebra o al reflexionar sobre el cambio de los ejes de coordenadas para una representación "más lógica" de la relación estudiada.

De manera general, se aprecia que los estudiantes se involucran de manera directa en la tarea, siendo capaces de llegar a argumentos y deducciones interesantes teniendo en cuenta su edad y sus escasos conocimientos previos de los contenidos trabajados. Sin embargo, los alumnos no alcanzan de manera autónoma el objetivo, sino que, se aprecia que la gestión de la maestra en relación con la demanda de la tarea resulta clave para que la dificultad de esta no se vea alterada, ya que guía al alumnado sin proporcionar información sobre la resolución inmediata de la misma.

Referencias

Codes, M. (2010). Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional. [Tesis doctoral. Universidad de Salamanca]. Repositorio Documental Gredos. http://hdl.handle.net/10366/76452

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. Journal for research in mathematics education, 28(5), 524-549.

McDonald, M. A., Mathews, D. M., y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J. Kaput (eds.). Research in Collegiate Mathematics Education. IV Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education, 8 (pp. 77-102). American Mathematical Society.

Pérez-Guzmán, R., Martín-Díaz, J. P., Díez –Fernández, A. y Climent, N. (2023). Una tarea de alta demanda cognitiva para introducir la paridad en 1º de primaria. *Comunicación presentada a las XX JAEM*.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, 10, 313-340

Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. American Educational Research Journal, 33(2), 455-488.

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275.

Implementación de la tutoría entre iguales en el aula de Matemáticas

Mireia Vinyoles Serra(1)
mvinyoles@aula-ee.com *(1)*
Aula Escola Europea (1)

Anna Auria(2)
aauria@aula-ee.com *(2)*
Aula Escola Europea (2)

Núcleo temático: Formación del profesorado

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

La actitud y motivación del alumnado en el aula es un tema crucial en el modelo de aprendizaje de hoy en día. Las creencias limitantes que tienen ciertos alumnos con baja autoestima matemática les dificultan el camino a la mejora. Como docentes, buscamos estrategias que ayuden al alumnado a ganar confianza y aumentar así su implicación. En este trabajo presentamos la tutoría entre iguales, y cómo la podemos aplicar en el aula para abordar estos dos objetivos. Implícitamente, esta metodología también es clave para mejorar la comprensión lectora y la comunicación matemática de nuestro alumnado. Después de llevar a cabo este estudio, estamos convencidas de que el método de la tutoría entre iguales, puede ser un buen recurso para conseguir los objetivos de aprendizaje comentados anteriormente.

Palabras clave: tutoría entre iguales, autoconcepto matemático, comunicación matemática, matemáticas aplicadas

Introducción

La actitud ante la asignatura de Matemáticas es algo que nos preocupa desde hace tiempo. También la profundidad del aprendizaje de nuestro alumnado, es decir, saber si asimilan los contenidos dados y son capaces de crear conexiones, o sencillamente memorizan fórmulas y las relacionan con enunciados-tipo para resolver problemas matemáticos. Muchos estudiantes se ponen la etiqueta del “yo no sirvo” para las matemáticas, arrastrándola toda su vida (Chestnut et al. 2018, Clements et al. 2018). A partir de este momento, aprender e intentar disfrutar aprendiendo matemáticas cuesta mucho. Como consecuencia, el nivel de implicación del alumnado disminuye.

Algunas de estas cuestiones hacen patente la necesidad de “diversificar” la enseñanza de las matemáticas, puesto que el alumnado que tenemos en el aula es heterogéneo en muchos sentidos como por ejemplo, la motivación por la asignatura, la velocidad de asimilación, sus creencias - más o menos limitantes -, etc.

A lo largo de la historia de la educación, se han probado diversas estrategias para mejorar la didáctica de las Matemáticas, como por ejemplo trabajar por itinerarios, hacer subgrupos o separar por niveles, con el objetivo de poder llegar mejor a todo el alumnado.

Según Johnson (1990), para que el aprendizaje de las matemáticas sea productivo, los estudiantes tienen que tener la oportunidad de comunicarse matemáticamente, razonar matemáticamente y también desarrollar la autoconfianza para resolver problemas matemáticos. Estos son, pues, los objetivos que perseguimos con el trabajo descrito en este artículo. Para conseguirlos, de entre las muchas intervenciones educativas (Education Endowment Foundation [EEF]) que se pueden llevar a cabo en el aula, decidimos implementar el aprendizaje entre iguales (EEF Peer Tutoring), por ser una de las que tiene más evidencias de buenos resultados con un bajo coste para la institución.

Tutoría entre iguales

La tutoría entre iguales es un método de aprendizaje cooperativo basado en la creación de parejas de alumnos/as (iguales), con una relación asimétrica (derivada de la adopción del rol de tutor/a y del rol de tutorando/a), con un objetivo común, conocido y compartido (como por ejemplo la adquisición de una competencia curricular), que se logra a través de un marco de relación planificado por el docente (GRAI, 2004).

Varias investigaciones sobre tutoría entre iguales (Flores y otros, 2017) muestran mejoras en el rendimiento académico por ambos miembros de la pareja, en el desarrollo de habilidades psicosociales y en la implicación en las tareas académicas. La autoestima y responsabilidad como estudiantes aumenta, así como, la satisfacción, con la ayuda pedagógica de los tutores. La tutoría entre iguales es utilizada en muchos países y recomendada por expertos en educación como una de las prácticas instructivas más efectivas, puesto que permite ver, desde la práctica, cómo podemos convertir las diferencias entre el alumnado en una fuente de aprendizaje (Flores y otros, 2017) (Topping, 2000) .

En la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), el Grupo de Investigación sobre Aprendizaje entre Iguales [GRAI]impulsa varios programas de tutoría entre iguales para mejorar diferentes competencias básicas como por ejemplo la lectura (Leemos en pareja) y las matemáticas (enRaonem[12] en pareja). Los objetivos principales del programa son afines a los nuestros. Mejorar la competencia matemática y, especialmente, la relacionada con la resolución de problemas matemáticos, fomentar la capacidad de cooperación entre el alumnado y desarrollar didácticas de orientación claramente inclusiva para la enseñanza de las matemáticas.

En éste trabajo, vamos a mostrar cómo llevar esta estratégia de aprendizaje entre iguales al aula siguiendo las pautas proporcionadas por el GRAI.

[12] Juego de palabras en catalán entre “enraonar” (hablar) y “raonar” (razonar)

Implementación en el aula de matemáticas

En el curso 2022-2023, las docentes que llevamos a cabo la investigación implementamos una prueba piloto de tutoría entre iguales a nivel de cuarto de ESO. Es uno de los cursos en el que la diversidad de niveles académicos en el aula se hace más evidente debido a ser el final de la etapa ESO y, por lo tanto, encontrábamos oportuno implementar esta intervención educativa.

A continuación mostramos una línea del tiempo que ilustra las diferentes fases de esta implementación y las describimos en detalle.

Figura 1: Línea del tiempo de las fases de la investigación.

Inicio y formación

Iniciamos el programa con un proceso de información y formación inicial del alumnado. Esta se llevó a cabo en diciembre, cuando ya conocíamos los grupos de clase. En esta formación inicial, dimos a conocer los objetivos, los cimientos conceptuales y las características del desarrollo del programa, y procedimos a hacer la presentación de los materiales.

Esta formación inicial es fundamental para que la estrategia sea efectiva. Nosotros destinamos tres sesiones de formación para qué el alumnado entendiera, que todos, sin tener en cuenta el rol asignado, salían ganando con el proyecto. Los objetivos planteados ante los estudiantes fueron básicamente fomentar la capacidad de cooperación, mejorar la actitud ante las matemáticas, mejorar la comunicación matemática, el rendimiento académico y atender la diversidad.

Procuramos involucrar al alumnado en esta formación inicial, consensuando con ellos las cualidades de un buen tutor/a y de un buen tutorando/a. Para ello, les presentamos unas propuestas y ellos escogieron las que mejor se adaptaban a sus necesidades. Algunas de las propuestas fueron por ejemplo:

Cree que puede iniciar cambios	Persevera ante las dificultades
Ayuda de forma desinteresada	Hace buenas preguntas
Aporta ideas	Assume la posibilidad de equivocarse

Tabla 1: cualidades de un buen tutor/a/tutorando extraídas de Pentabilities (2024).

Evaluación inicial

Con el objetivo de conseguir indicadores de evaluación del éxito del programa, tomamos datos iniciales en forma de un cuestionario sobre su autoconcepto matemático y de una prueba escrita.

AUTOCONCEPTO MATEMÁTICO

1. Me gustan las matemáticas
2. Me gusta resolver problemas matemáticos
3. Para mí es fácil resolver problemas matemáticos
4. Cuando leo un problema matemático entiendo lo que me pregunta
5. Cuando leo un problema matemático me es fácil identificar los datos necesarios para resolverlo
6. Cuando planifico los pasos a seguir para resolver un problema matemático las estrategias que planteo me sirven para resolverlo.
7. Cuando ya tengo la solución de un problema matemático comprendo los pasos seguidos para resolverlo
8. Cuando ya tengo la solución de un problema matemático puedo argumentar los pasos seguidos para resolverlo
9. En las sesiones del programa enRaonem mis conocimientos serán (han sido) útiles para resolver los problemas en pareja.
10. En las sesiones del programa enRaonem mi compañero/a podrá aprender gracias a mi ayuda
11. Cuando estoy fuera de la escuela y me encuentro un problema al que no sé dar respuesta rápidamente me gusta usar las matemáticas para buscar soluciones.

Imagen 2: Preguntas del cuestionario de Autoconcepto Matemático desarrollado por el GRAI. Se presentó cada pregunta como multirespuesta cerrada con 4 niveles:Nada, Poco, Bastante, Mucho.

Los estudiantes tuvieron que resolver un problema de manera individual antes de empezar las sesiones de tutoría en pareja. El problema ya tenía el formato adecuado donde su lectura y comprensión eran parte imprescindible para su resolución. Además, era suficientemente abierto como para permitir diferentes aproximaciones a su solución. Para nosotros, esta evaluación nos sirvió para poder ver en qué momento educativo estaban nuestros alumnos antes de empezar a trabajar la tutoría entre iguales. Para ellos, les sirvió de toma de contacto con este tipo de problemas. Evaluamos este problema siguiendo una rúbrica de evaluación para la resolución de problemas donde se valora la competencia del alumnado para identificar los datos, planificar la resolución, resolver el problema en sí y comunicar las respuestas del mismo.

Creación de parejas

Una buena pareja de trabajo es uno de los ingredientes clave de la tutoría en pareja. Ambos tienen que ser capaces de entender su rol y conversar de las matemáticas que hay involucradas en los problemas planteados, sin tener miedo de decir una sandez o mostrar su grado de desconocimiento sobre el tema. Tienen que formar un buen equipo de trabajo donde mutuamente se animen y se ayuden en las tareas encomendadas.

En las parejas, uno de los alumnos asume el rol de tutor/a y el otro el de tutorando/a. El tutor/a, se prepara previamente la actividad para ser capaz de acompañar a su tutorando a lo largo de la sesión de la resolución de problemas. La pareja puede ser simétrica o asimétrica y también se pueden mantener los roles fijos o recíprocos.

Para crear las parejas, nosotras usamos la evaluación inicial e información sobre el rendimiento académico del alumnado. Con esta información, se puede decidir hacer las parejas de niveles diferentes o parecidos y con roles fijos o variables. La dinámica del grupo, fue otro factor crucial para conseguir una buena relación entre la pareja. La imagen 3 pretende ilustrar este proceso.

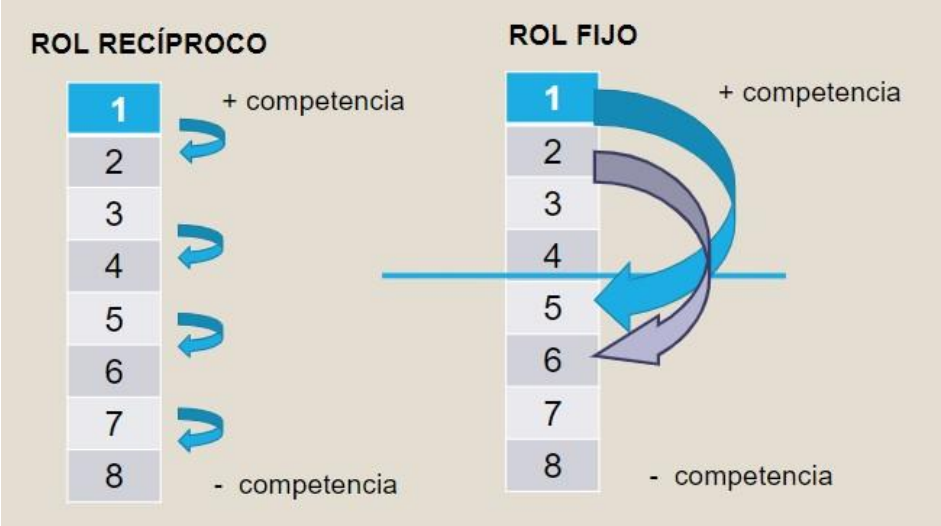


Imagen 3: Creación de las parejas de trabajo. Infografía que representa de una forma visual las dos estrategias que se pueden seguir para crear las parejas.

Teniendo en cuenta los grupos clase y la persona encargada de su tutoría, decidimos hacer parejas de niveles relativamente asimétricos y con roles fijos. El hecho de elegir un nivel relativamente diferente, ayudaba a ver claro el rol asignado al alumnado. El hecho de ser fijo, implicaba rutina y seguridad ante este tipo de actividad, puesto que, todo el mundo sabía qué tenía que hacer y como lo tenía que hacer.

Cabe destacar que, a priori, parece que la relación es desigual entre ellos, pero si asumen bien sus roles, ambos aprenden a resolver y explicar problemas matemáticos.

Sesiones de trabajo

Las sesiones se llevaron a cabo semanalmente (1 sesión / semana) a lo largo de 12 semanas. Su duración correspondía con una hora de clase. El lugar y la distribución del alumnado se hizo fuera del aula habitual, sentados por parejas en mesas diferentes. Cambiar el espacio permitió a cada pareja trabajar en un ambiente de trabajo menos denso que una clase y con más concentración.

Unos días antes de la sesión poníamos a disposición del tutor/a el enunciado del problema para que lo pudieran leer y a preparar con antelación. A lo largo de la sesión los alumnos se sentaban en parejas y trabajaban el problema. Al acabar, cada pareja nos entregaba el trabajo hecho para un posterior retorno.

El objetivo de la resolución de los problemas era entre otros, perder el miedo a enfrentarse a un enunciado largo (mejora de la comprensión lectora), hacer conexiones con los contenidos y saber comunicar el razonamiento seguido a la hora de resolver un problema más que resolver cálculos complicados. El hecho que pudieran relacionar contenidos del currículum de matemáticas con situaciones cotidianas ayudó mucho en el buen desarrollo de la actividad.

Ejemplo de problema planteado

Los problemas a resolver tenían que dar lugar a discusiones matemáticas y razonamientos. Elegimos problemas relacionados con temas reales de la vida cotidiana donde el alumnado pudiera observar una aplicación e interpretación de conceptos más abstractos trabajados en clase. Además, los problemas eran lo suficientemente ricos para dar lugar a maneras diferentes de resolución y, algunas veces, con preguntas abiertas que obligaban al alumnado a tomar decisiones y, por lo tanto, admitían más de una solución correcta. (Flores y otros, 2017).

A modo de ejemplo, uno de los problemas que propusimos fué el del calentamiento global del planeta tal y como muestra la Imagen 4. Para trabajar el problema, pedíamos una estructura muy pautada: datos, planificación, resolución, solución y reflexión (Imagen 5). Una lectura exhaustiva tenía que permitir al alumno entender qué datos eran necesarios y relevantes para su resolución. Una planificación del problema los ayudó a pensar antes de ponerse a trabajar. La resolución estaba claramente separada de la solución en el sentido empírico de los términos para ayudarlos a discernir entre saber cómo encontrar la solución y saber escribir una respuesta al problema planteado.

El problema pretendía, por un lado, que el alumno discutiera sobre un tema candente como sería el calentamiento global y se diera cuenta de que solamente aplicando la tasa de variación, se puede hacer un análisis sobre las distintas maneras que tiene una función de crecer, lo que normalmente llamamos curvatura

(concavidad y convexidad). Por supuesto, no se trata tanto de entrar en el detalle de éstos temas, sino de conectar el concepto de tasa de variación con las distintas

maneras de variar. Para ello, debían escoger los datos adecuados y tomar las decisiones pertinentes para poder responder a la pregunta. Aquí lo que importaba era el diálogo generado entre ellos para poder reflexionar, basados en los datos proporcionados, sobre un problema global de la humanidad (Imágenes 5 y 6).

El rol del docente durante las sesiones, idealmente, consistió en observar las interacciones entre el alumnado y moldearlas para que éstas ganaran en calidad y se produjera la deseada “discusión matemática”. Quisiéramos subrayar que nuestro rol no fue el de resolver dudas sobre la materia, sino acompañar, guiar y modelar el mentoraje tutor/a-tutorado/a. Por eso se puso especial cuidado en que el nivel de dificultad de los problemas no excediera el nivel de experiencia que podía proporcionar el alumno-tutor/a. Para ayudarnos como docentes en esta tarea de observación, utilizamos una tabla de observación docente proporcionada por el GRAI de la cual restringimos el número de comportamientos a observar. Nos fijamos principalmente en los siguientes seis ítems:

Ambos	tutorado/a	tutor/a
Interesados en la tarea Se sienten a gusto	Pide ayuda Formula preguntas	Prepara las hojas Se implica activamente en ele aprendizaje del tutorado/a

Tabla 2: Comportamientos a observar durante las sesiones.

Esta elección se hizo teniendo en cuenta las necesidades del grupo-clase y tenía como objetivo observar cómo interactuaban para poder realizar un retorno a cada una de las parejas sobre su proceso y ayudarles a fijarse objetivos de mejora.

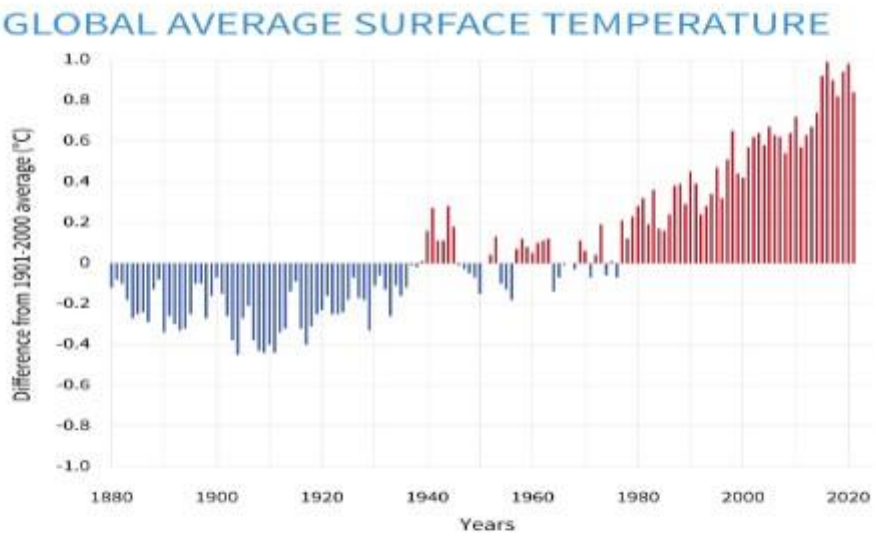
PARA EMPEZAR...

Leemos en uno de los últimos informes de la ONU de 2022 que el calentamiento global se acelera. ¿Os preocupa?

En la afirmación anterior se habla de la variación de una variación: Las temperaturas están variando (subiendo), pero parece que el ritmo al que varían también está variando, se está acelerando. ¿Desde cuándo crees que esto ocurre?

¿QUÉ NOS DICE EL PROBLEMA?

El siguiente gráfico muestra la media de la temperatura de la superficie terrestre desde 1880 hasta 2021 comparada con la temperatura media del siglo XX. Las barras azules indican los años con temperaturas más frías que la media; las barras rojas indican los años con temperaturas más altas que la media. Es un gráfico basado en datos del National Centers for Environmental Information.



(a) Con vuestras palabras, explicad qué significa que al año 1940 le corresponda un valor de 0.3 en el gráfico anterior.
(b) Razonad si a partir del gráfico anterior podemos deducir la media de la temperatura terrestre del año 2000.
(c) A partir del gráfico, ¿podemos deducir la Tasa de Variación Media de la temperatura terrestre entre los años 2000 y 2010? y entre 2010 y 2020?
(d) Reflexionad: ¿Tiene sentido calcular la TVM de una TVM? ¿Qué nos indica?

A partir de los resultados obtenidos, ¿es posible justificar que el calentamiento global se acelera, es decir, que el planeta se calienta cada vez más rápidamente?

Imagen 5: Ejemplo de problema sobre el calentamiento global y la tasa de variación.

DATOS

PLANIFICACIÖN

RESOLUCIÓN

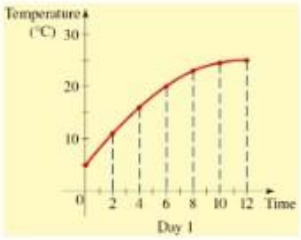
ELABORACIÓ DE RESPOSTES

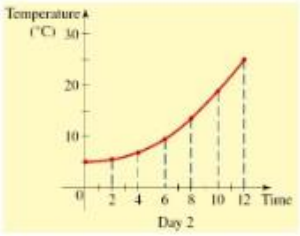
REVISIÓN FINAL

Reflexionemos: ¿Hemos dado respuesta a todas las preguntas planteadas? ¿Hay algún aspecto que se nos ha pasado por alto? ¿Cuál? ¿Hemos seguido la planificación hecha? ¿Qué cambios hemos hecho? ¿Hemos elaborado una buena argumentación? ¿Somos capaces de contársela a los demás? ¿Se entiende?

ACTIVIDADES COMPLEMENTÁRIAS

- Los siguientes gráficos nos dan las temperaturas de Springfield durante dos días diferentes a lo largo de un período de 12 horas, empezando a las 12 de la noche (00h).





Analice cómo varía la Tasa de Variación Media (en períodos de 2h) a lo largo de los 2 días. Es decir, ¿la TVM va aumentando, disminuyendo, o bien es constante en cada uno de los gráficos?

Imagen 6: Pautas para la resolución del problema y actividades complementarias

Evaluación final y valoración

Una vez terminadas las 12 sesiones en pareja, y con el objetivo de definir indicadores de éxito o fracaso del programa, pasamos al alumnado una evaluación final individual (académica) y les pedimos que volvieran a cumplimentar el mismo cuestionario de autoconcepto matemático que habían hecho al inicio. Para recoger una valoración de la experiencia del alumnado, les pedimos que dieran respuesta también a una serie de preguntas cualitativas.

Al principio, les costaba mucho seguir las instrucciones de los problemas. La mayoría no identificaban los datos, ni daban importancia a la planificación de la resolución del problema. Con nuestro retorno a lo largo de las semanas, al final conseguimos una mejora en la comprensión lectora de los problemas y en la comunicación matemática usada en la resolución de los mismos.

La valoración general sobre la experiencia fue muy positiva. La comunicación entre iguales y el hecho de que se ayudaran entre ellos les aportó seguridad para enfrentarse a la asignatura. Uno de los retos que nos encontramos tiene que ver con la implicación por igual de los dos alumnos en la discusión “rica” del problema. En algunos casos, el tutor/a se limitaba a dar órdenes directivas a su tutorado/a y éste le cuestionaba poco. Cuando detectamos este tipo de interacciones, pusimos empeño en intentar romperlas, recordándoles que una de las cualidades del “buen tutorado/a” consiste en hacer buenas preguntas.

Resultados

La muestra de alumnado fue de 45 alumnos en el curso de ESO IV, donde dos de los tres grupos siguieron este procedimiento. El grupo que no realizaba la actividad servía de grupo control para poder analizar si el método era efectivo o no para alcanzar los objetivos. Este grupo realizó sólo las actividades inicial y final de forma individual.

Una vez recogidas las evidencias de las evaluaciones académicas, de autoconcepto matemático y valoraciones personales, queríamos analizar si esta intervención de tutoría entre iguales había tenido un impacto en el rendimiento académico y en la

actitud del alumnado hacia la asignatura. A continuación, comentamos los resultados obtenidos en estas áreas.

La mejora de los resultados de nuestros alumnos en este tipo de problemas quedó marcada por una diferencia de 5.41% en las medias de las respectives evaluaciones inicial y final (Tabla 3).

Media resultados evaluación inicial	Media resultados evaluación final
$\overline{X_0} = 54.96\%$	$\overline{X_f} = 60.37\%$

Tabla 3: Resultados de las evaluaciones académicas.

Por lo que respecta a la variación del rendimiento interno en la asignatura de Matemáticas, la mejora no fue significativa numéricamente hablando. Sin embargo, cualitativamente hablando, sí que se notó una diferencia importante. El alumnado terminó el curso más motivado y con ganas de asimilar nuevos conceptos, y esto se reflejó en el ambiente de trabajo en el grupo-clase.

En general, las preguntas relacionadas con el autoaprendizaje y el autoconcepto tuvieron un ascenso mucho más significativo que no los resultados numéricos de la resolución en sí de los problemas, tal y como muestra la Imagen 5.

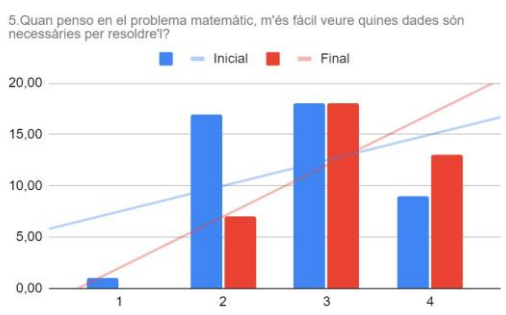
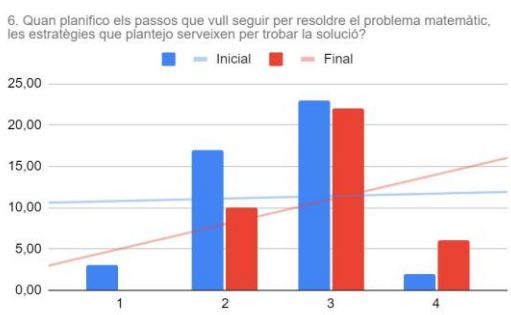
Cuando leo un problema matemático me es fácil identificar los datos necesarios para resolverlo.	Cuando planifico los pasos a seguir para resolver un problema matemático las estrategias que planteo me sirven para resolverlo.
	

Imagen 5: Comparación de las respuestas a las preguntas 5 y 6 del cuestionario de Autoconcepto Matemático (inicial vs final).

De esta forma, podemos afirmar que logramos cambiar su actitud ante las matemáticas, incentivar su curiosidad con temas de su interés y la gran mayoría de ellos, ganaron confianza en sí mismos para poder enfrentarse a un reto matemático.

En lo que respecta a la valoración personal que el alumnado hizo sobre esta metodología de trabajo, en general se mostraron satisfechos de los problemas propuestos, encontrándolos muy interesantes. Al preguntarles si aconsejarían seguir con la misma estrategia en cursos venideros, su recomendación fue seguir con el programa e implementarlo también en otros cursos con una media de $X = 3,35$ en una escala del 1 al 4.

Conclusiones

La valoración global de la experiencia fue muy positiva. Haber podido trabajar el método de la tutoría entre iguales satisfizo al alumnado y a nosotras, que pudimos constatar una mejora significativa en la salud matemática de nuestros alumnos.

Como se ha visto en el apartado de resultados, si bien la mejora académica ha sido marginal, el alumnado sí que mejoró su comunicación matemática así como la percepción de sí mismos/as como estudiantes de matemáticas.

Los resultados de las encuestas muestran que la actividad gustó al alumnado, sobre todo dar una vertiente más práctica a la asignatura. El tipo de actividad tan estructurada con recogida de datos, planificación, resolución y solución fue usada para enriquecer la comunicación matemática y aprender a enfrentarse a un enunciado. La rutina intrínseca al método usado les ayudó a hacer menos tediosa esta tarea que habitualmente les cuesta mucho. Las clases de (en)Raonem eran diferentes y, por tanto, dieron un punto de frescura a la asignatura, ya sea por el hecho de salir de la rutina, de hacer una breve pausa, sin prisas, para trabajar un solo problema cada semana.

Valoramos positivamente haberlo implementado en el último curso de la secundaria, el refuerzo positivo hacia la autoestima y la consolidación de conocimientos explicados a lo largo de la etapa, lo hacen un buen curso para mejorar la relación del

alumnado con la asignatura y con sus estudios. De forma indirecta, también les ayuda a apreciar las diferencias que existen entre las diferentes matemáticas que se pueden encontrar en la siguiente etapa educativa: el bachillerato.

A pesar de la valoración positiva general, todavía hay mucho trabajo por hacer. Algunos alumnos se quedaron con la idea de que el tutor/a hacía un trabajo desigual respecto al tutor/a, que adoptaba un rol más pasivo. Alumnos con necesidades especiales, estaban muy agradecidos por la experiencia por distintos motivos. Por ejemplo, por tomarse con calma un tiempo para poder resolver dudas de temas pasados y asentar bien conocimientos adquiridos hace tiempo. Otros alumnos, en cambio, encontraron que habían perdido clases de teoría y que podían haber aprovechado mejor el tiempo.

Por último, la experiencia nos ha abierto los ojos a nuevas posibilidades y a una forma sutil de poder ayudar a nuestro alumnado a salir adelante con su vida académica y con su autoestima personal. Como decía Euclides, "hay cosas que parecen increíbles para la mayoría de personas que no han estudiado

Matemáticas".

Referencias

Alegre, F., Moliner, L, Maroto, A., Lorenzo Valentín, G.. (2020). *Academic Achievement and Peer Tutoring in Mathematics: A Comparison Between Primary and Secondary Education.* SAGE Open. 10. 215824402092929. 10.1177/2158244020929295.

Clements, D.H.; Sarama, J. (2018) *Myths of Early Math*. Education Sciences, *8*, 71. https://doi.org/10.3390/educsci8020071

Chestnut EK, Lei RF, Leslie S-J, Cimpian A. (2018) *The Myth That Only Brilliant People Are Good at Math and Its Implications for Diversity*. Education Sciences; 8(2):65. https://doi.org/10.3390/educsci8020065

Chin, L., Zakaria, E. , Daud, Md Y.. (2010). *The Effects of Cooperative Learning on Students' Mathematics Achievement and Attitude towards Mathematics*. Journal of Social Sciences. 6. 10.3844/jssp.2010.272.275.

Departament d'Ensenyament (2000): Tutoria entre iguals a l'IES Can Puig. Col·lecció de videos Didàctics L'Escola a Casa. Programa de Mitjans Audiovisuals.

Duran, D (coord.) (2006), *Tutoría entre iguales, algunas prácticas.* Monográfico de Aula de Innovación Educativa, 153-154, 7-39.

Duran, D., Torró, J. i Vilar, J. (2003): *Tutoria entre iguals. Un mètode d'aprenentatge cooperatiu per a la diversitat.* Barcelona: Llibres de l'ICE de la UAB.

Duran, D. i Vidal, V. (2004): *Tutoría entre iguales: de la teoria a la práctica.* Barcelona: Graó.

Education Endowment Foundation. *Teaching and learning toolkit* https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/teaching-learningtoolkit (Page generated on: Saturday, 6 April 2024 at 12:55 (E))

Education Endowment Foundation. *Teaching and learning toolkit . Peer tutoring* (última consulta Octubre 2023) https://educationendowmentfoundation.org.uk/education-evidence/teaching-learningtoolkit/peer-tutoring (Page generated on: Saturday, 6 April 2024 at 12:55 (E))

Flores, M., Bravo, M., Duran, D. (2017). *Medir el autoconcepto en la resolución cooperativa de problemas.* Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 86, 11-18.

Flores, M., Duran, D., Albarracín, L. (2017). *(En)Raonem en parella: Tutoria entre iguals per desenvolupar la resolució cooperativa de problemes.* Guix: Elements d'Acció Educativa, 439, 69-73.

Flores, M., i Duran, D. (2017). *Razonar en pareja*. Cuadernos de Pedagogía, 476, 79-81.

Grup de Recerca sobre Aprenentatge entre Iguals. (2004). Barcelona. Universitat Autònoma de Barcelona. (última consulta Abril 2024). https://webs.uab.cat/grai/es/

Johnson, D., Johnson, R., Stanne, M., & Garibaldi, A. (1990). Impact of group processing on achievement in cooperative groups. Journal of Social Psychology, 130, 507-516.

Pentabilities, actions for learning, 2024 https://pentabilities.com

Topping, K. (2000) Tutoring by Peers, Family and Volunteers. Geneva: International Bureau of Education, UNESCO. Traducció al català *http://www.ibe.unesco.org/publications/practices.htm*

La Probabilidad en el currículo español de Educación Secundaria Obligatoria por Comunidades Autónomas

Macarena Elgueda-Ibarra
e.macaelguedaa@go.ugr.es

María Magdalena Gea Serrano
mmgea@ugr.es
Universidad de Granada

Núcleo temático: Formación del profesorado; Evaluación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Se presenta un análisis comparado de los saberes básicos que se establecen en el currículo de las diferentes Comunidades Autónomas en España y el que determina el Ministerio de Educación y Formación Profesional para el territorio al ámbito de su gestión en torno a la probabilidad. Considerando los conocimientos, destrezas y actitudes que se determinan para la enseñanza y aprendizaje de la incertidumbre e inferencia en los cuatro cursos que conforman la Educación Secundaria Obligatoria, observamos grandes diferencias, principalmente, en las directrices para los primeros cursos y aquellas que refieren a la incertidumbre.

Palabras clave: Incertidumbre, Inferencia, Probabilidad, Educación Secundaria Obligatoria, Currículo.

1. Introducción

En la cotidianidad, el ser humano se ve envuelto en situaciones de incertidumbre cuando maneja la posibilidad de ocurrencia de sucesos aleatorios en su toma de decisiones. Estas situaciones no son exclusivas de los contextos de juegos de azar, sino que se presentan en muchos campos científicos como diagnósticos médicos, pronósticos del clima, o economía, entre otros.

No es necesario estar cursando estudios formales en matemáticas para tratar con la probabilidad, porque impacta a toda la sociedad, y a diario recibimos información en la prensa, redes sociales, etc., que nos incitan a tomar decisiones que implican un adecuado desarrollo de la inferencia (Batanero et al., 2023). Un ejemplo que pone de manifiesto el alcance de estas situaciones en la sociedad, con la consecuente importancia que adquiere la formación en probabilidad del ciudadano, lo encontramos ante el último sorteo de lotería de Navidad que se celebró el 22 de diciembre de 2023 en España, pues diversos medios de comunicación hicieron eco a la noticia de la predicción del número ganador en dicho sorteo por medio de la Inteligencia Artificial, y esta situación provocó que se agotara su venta en horas.

En este trabajo nos interesamos en el estudio de la probabilidad a nivel curricular, según el actual cambio legislativo que atraviesa España. Centramos la atención en la Educación Secundaria Obligatoria (en adelante: ESO) por tratarse de una etapa crucial en la formación obligatoria que reciben nuestros estudiantes. Además, los resultados del último estudio PISA (MEFPD, 2023) no son nada alentadores, teniendo en cuenta que muchos estudiantes finalizan esta etapa educativa sin continuar sus estudios para acceder al mundo laboral. Pensamos que esta mirada al currículo es de gran utilidad al docente, puesto que redundará en esa “necesaria visión holística (vertical y horizontal)” que se pone de manifiesto por diferentes autores (entre otros, Montes et al., 2022, p. 51) y ayudará a tomar conciencia de las diferentes realidades que actualmente se suceden en el territorio español y en aquel al ámbito de su gestión.

2. Fundamentos

En las siguientes secciones se describe un marco para proporcionar un adecuado razonamiento en probabilidad (Batanero et al., 2023), así como las directrices curriculares estatales en torno a su enseñanza y aprendizaje en la etapa de la ESO.

2.1 Cultura y razonamiento en probabilidad

Batanero et al. (2023) describen las componentes de la cultura y razonamiento probabilísticos necesarios para elaborar conclusiones, emitir juicios y tomar decisiones ante situaciones probabilísticas.

La cultura probabilística requiere: 1) comprender ideas fundamentales, que aplicamos en situaciones cotidianas (aleatoriedad, variabilidad, independencia y predictibilidad); 2) tener competencia en cálculo y estimación de probabilidades en experiencias y situaciones de azar; 3) dominar el lenguaje para comprender información estadística y comunicarla; 4) reconocer el contexto de los datos para identificar el impacto del azar en las interpretaciones que se realicen; y 5) tener una disposición crítica ante la información implicada en una situación aleatoria, tomando conciencia de que la actitud, creencias o intuiciones y sentimientos pueden influir en nuestra disposición hacia la incertidumbre.

Por su parte, el razonamiento aplicado a una situación matemática es similar al que aplicamos a una situación probabilística, porque se razona con modelos en base a la experiencia, pero difiere en la medida en que podemos tomar diferentes decisiones ante una misma información. De ahí el interés por analizar el tipo de situaciones que se plantean en los textos de educación secundaria, pues razonar en torno al riesgo o analizar noticias de medios de comunicación son retos que sugiere la investigación para desarrollar el razonamiento probabilístico en los estudiantes (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2023), aunque los textos escolares suelen plantear inferencias alejadas de la realidad (Batanero et al., 2023). Las componentes que se diferencian son: 1) comprender los diferentes enfoques de la probabilidad; y 2) tomar decisiones

justificadas en la información de los datos, dando evidencias de considerar las alternativas posibles. En la toma de decisiones, se requiere: a) equilibrar elementos personales (por ejemplo, aversión al riesgo) y formales (por ejemplo, calcular la probabilidad bajo el enfoque más adecuado a la situación); b) comprender que no hay algoritmos que determinen un resultado deseado sino que se calculan predicciones; c) distinguir la causalidad de la aleatoriedad; d) tomar conciencia de la influencia de probabilidades previas; e) reconocer la asimetría de probabilidades condicionadas; y f) interpretar probabilidades pequeñas.

2.2 Currículo estatal en probabilidad para Educación Secundaria Obligatoria

El currículo en la ESO se estructura en torno al desarrollo de competencias clave, que se vienen desarrollando desde Educación Primaria y se continúan promoviendo durante el Bachillerato (Jefatura del Estado, 2020). En particular, la competencia que el estudiante debe alcanzar en esta etapa tanto en matemática como en ciencia, tecnología e ingeniería se describe mediante cinco indicadores STEM; y para la materia de matemáticas se determinan diez competencias específicas, para las que se establecen criterios de evaluación por cada ciclo (MEFP, 2022a).

Se persigue el logro del sentido matemático mediante saberes básicos que se organizan en sentidos: numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo. El sentido estocástico en la ESO se organiza en tres grandes ideas: organización y análisis de datos, incertidumbre e inferencia. De acuerdo con Bargagliotti y colaboradores (2020), consideramos la probabilidad como la base de la inferencia, porque permite medir la incertidumbre al tomar decisiones.

En la Tabla 1 se muestran los saberes básicos que se establecen por cada ciclo de la ESO en probabilidad: el primer ciclo se conforma de los tres primeros cursos y el segundo ciclo de un único curso con carácter electivo (opción A y B, esta última con mayor profundidad en contenidos de matemáticas).

Tabla 1. Saberes básicos sobre probabilidad en el currículo estatal de la ESO (MEFP, 2022, pp. 41735, 41739, 41740, 41744)

	1º a 3º curso de la ESO	4º curso de la ESO (opción A y B)
Incertidumbre	I. Identificación de fenómenos deterministas y aleatorios. II. Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. III. Asignación de probabilidades mediante experimentación, concepto de frecuencia relativa y regla de Laplace.	VII. Experimentos compuestos: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. VIII. Probabilidad: cálculo aplicando la regla de Laplace y técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos (diagramas de árbol, tablas…) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas.
Inferencia	IV. Formulación de preguntas adecuadas que permitan conocer las características de interés de una población. V. Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales. VI. Estrategias de deducción de conclusiones a partir de muestras para emitir juicios y tomar decisiones.	IX. Diferentes etapas del diseño de estudios estadísticos. X. Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos relevantes en investigaciones estadísticas mediante herramientas digitales adecuadas. XI. Análisis del alcance de las conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra.

Fuente: Elaboración propia según

Como se observa en Tabla 1, los saberes básicos en incertidumbre e inferencia son iguales para la opción A y B en matemáticas; sin embargo, se espera que el contenido se enfoque de manera diferente, que se reflejará en la diversidad de situaciones de aprendizaje propuestas en la enseñanza y aprendizaje del tema.

Se destaca que, ante una situación de incertidumbre, los estudiantes deben ser capaces de generar y probar conjeturas e hipótesis y tomar decisiones argumentadas, así como lo proponen Batanero y colaboradores (2023), desde primer ciclo; mientras que segundo ciclo se caracteriza por el estudio de experiencias compuestas. Además, la normativa actual atribuye más énfasis a la inferencia, comparado a lo establecido en el periodo de legislación anterior.

3. Método

Se seleccionan para el análisis las directrices curriculares que establece el Ministerio de Educación y Formación Profesional (en adelante: MEFP) para el territorio al ámbito

de su gestión (MEFP, 2022b) y la de cada Comunidad Autónoma, centrando la atención en la etapa de la ESO. Hacemos uso del análisis de contenido (Krippendorff, 2004) para identificar y comparar las categorías de saberes básicos en probabilidad que se presentan, respecto a las directrices estatales (MEFP, 2022) y cómo se distribuyen por curso en la ESO. Se trata de un método de análisis cualitativo que utilizamos en nuestra revisión documental comparada para cada contexto (autonómico y de gestión del MEFP).

Se procedió a la lectura de dichas directrices oficiales, que fueron extraídas del Portal del Sistema Educativo Español (Educagob, 2024). Se consideran como unidades de análisis a comparar los saberes sobre incertidumbre e inferencia, que forman parte del sentido estocástico en los lineamientos curriculares seleccionados. Es común que los saberes se distribuyan en las directrices curriculares por cada curso de la ESO, por lo que presentamos los resultados mediante tablas en las que se muestra su presencia, de acuerdo a los establecidos a nivel estatal (Ver Tabla 1). Pero, en algunos casos, los saberes en probabilidad se determinan conjuntamente para los cursos de 1ºESO y 2ºESO (por ejemplo, en País Vasco) o se dan indicaciones sobre cómo los centros han de distribuir dichos saberes, atendiendo a indicaciones en 3ºESO (como ocurre en la Comunidad Valenciana). En esos casos, consideramos que los saberes son los mismos para cada uno de dichos cursos.

4. Resultados

En algunas directrices curriculares se diferencian los saberes básicos por curso; en particular, en la Comunidad de Valencia la secuencia de saberes solo se indica a partir de 3ºESO, pero se advierte que los centros educativos han de concretar y temporalizar la distribución de saberes de manera equitativa en los primeros tres cursos de la ESO. Por tanto, entendemos que la concreción de 3ºESO se mantiene en los cursos previos.

En la Tabla 2 se muestra la distribución de saberes básicos en probabilidad en el currículo de cada Comunidad Autónoma y las directrices establecidas en el territorio

al ámbito de gestión del MEFP (Ciudad Autónoma de Ceuta, Melilla y centros en el exterior).

Tabla 2. Saberes básicos sobre probabilidad de 1º a 3º curso de la ESO, según Comunidades Autónomas y territorio en el ámbito de gestión del MEFP

	Incertidumbre									Inferencia								
	I			II			III			IV			V			VI		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Andalucía			x			x			x	x		x	x		x	x		x
Aragón	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Asturias		x			x			x		x		x	x		x	x		x
Cantabria	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x
Castilla-Mancha	x	x		x	x		x	x	x	x	x				x			x
Castilla-León								x										
Cataluña	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Comunidad Valencia							x	x	x				x	x	x			
Extremadura	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Galicia			x			x			x			x			x			x
Islas Baleares	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Islas Canarias	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
La Rioja		x			x			x		x		x	x		x	x		x
Madrid		x	x		x	x		x	x			x			x			x
Murcia			x			x			x			x			x			x
Navarra		x	x		x	x		x	x		x	x		x	x			x
País Vasco	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Gestión ministerial			x			x			x			x	x	x	x			x

Se observan diferencias en 1ºESO, pues en Andalucía, Asturias y La Rioja solo se indican saberes básicos alusivos a la inferencia, en el territorio al ámbito de gestión del MEFP solo se menciona un contenido sobre inferencia, mientras que en Aragón, Cataluña, Extremadura, Islas Canarias, Islas Baleares y País Vasco se incluyen todos los saberes establecidos por el MEFP para primer ciclo. Incluso, en Aragón, Cataluña y País Vasco se añaden saberes a los indicados a nivel estatal; pero merece destacar que, en Castilla y León, Galicia, Madrid, Murcia y Navarra no se indican saberes sobre probabilidad en 1ºESO.

La situación mejora en segundo curso en algunas comunidades (Castilla y León, Madrid y Navarra), pero empeora en Andalucía, pues no se concretan saberes en sentido estocástico. Lo más destacado es que algunas comunidades prescinden de saberes sobre inferencia (Asturias y La Rioja), cuando se trabajaron en 1ºESO, mientras que incluyen saberes sobre incertidumbre. Destacan Galicia y Murcia,

puesto que ni en 2ºESO se incluyen saberes sobre probabilidad, mientras que en Aragón, Cataluña y País Vasco se siguen añadiendo a los indicados a nivel estatal.

En 3ºESO las directrices que se establecen son más consecuentes con la importancia de formar a nuestros estudiantes en probabilidad, puesto que Andalucía, Galicia, Madrid, Murcia incluyen prácticamente todos los saberes establecidos a nivel estatal, así como el MEFP en el territorio al ámbito de su gestión; mientras que Castilla y León no establece saberes en probabilidad durante el primer ciclo. Es curioso que en Asturias y La Rioja se alternen contenidos en inferencia e incertidumbre por cada curso de primer ciclo, por lo que en 3ºESO solo se incluyen saberes en inferencia. En Aragón, Cataluña y País Vasco se siguen añadiendo contenidos en probabilidad a los indicados a nivel estatal.

En la Tabla 3 se presenta la distribución de saberes básicos en probabilidad para 4ºESO, sin diferenciar en su doble opción de Matemáticas (A y B), puesto que los saberes son prácticamente los mismos en cada opcionalidad.

Se observa que la mayoría de las directrices curriculares consideran todos los saberes básicos establecidos a nivel estatal para el curso de Matemáticas A y B de 4ºESO. Aunque destaca Castilla y León, porque no incluye saberes sobre probabilidad en experiencias compuestas (saberes VII y IX). Por el contrario, Cataluña, Galicia, La Rioja, Madrid, País Vasco y Valencia agregan saberes a los establecidos a nivel estatal.

Tabla 3. Saberes básicos sobre probabilidad de 4ºESO, opción A y B, según Comunidades Autónomas y territorio en el ámbito de gestión del MEFP

	Incertidumbre		Inferencia		
	VII	VIII	IX	X	XI
Andalucía	X	x	x	x	x
Aragón	X	x	x	x	x
Asturias	X	x	x	x	x
Cantabria	X	x		x	x
Castilla-Mancha	X	x	x	x	x
Castilla-León		x		x	
Cataluña	X	x	x	x	
Comunidad Valencia		x	x	x	
Extremadura	x	x	x	x	x

Galicia	x	x	x	x	x
Islas Baleares	x	x	x	x	x
Islas Canarias	x	x	x	x	x
La Rioja	x	x	x	x	x
Madrid	x	x	x	x	x
Murcia	x	x	x	x	x
Navarra	x	x	x	x	x
País Vasco	x	x	x	x	x
Gestión ministerial	x	x	x	x	x

5. Discusión y conclusiones

Diferentes países han integrado el estudio de la probabilidad en sus currícula de matemática, con el objetivo de formar personas que puedan hacer frente a situaciones de incertidumbre, lo que exigen un razonamiento alejado del habitual determinismo que caracteriza a la práctica matemática.

En la literatura de investigación encontramos diversos autores que reclaman la importancia de desarrollar el sentido estocástico en el ciudadano, para ser capaces de elaborar juicios bien fundamentados que ayuden a tomar decisiones adecuadas ante dichas situaciones aleatorias, manteniendo una actitud crítica ante la información que recibimos en nuestro día a día (Batanero et al., 2013; Batanero, 2019).

En este trabajo se describe cómo han concretado los lineamientos curriculares estatales cada una de las Comunidades Autónomas en España, así como los decretados por el MEFP para el territorio al ámbito de su gestión.

Entre los resultados que se muestran, destacan las divergencias en la concreción de los saberes, principalmente, en primer ciclo de la ESO. En particular, encontramos comunidades como Castilla y León, en las que no se determinan saberes en torno a la incertidumbre ni la inferencia en todo primer ciclo. Esta limitación no se solventa en cuarto curso, porque hay ausencia de saberes en el estudio de experiencias compuestas. Por tanto, el docente ha de estar prevenido ante esta limitación, puesto que “Las situaciones de enseñanza relacionadas con la independencia y el condicionamiento en el campo de la probabilidad son fundamentales para comprender otros conceptos y métodos.” (Batanero et al, 2020, p. 8). Por ejemplo, el estudio de la independencia es crucial para la comprensión del muestreo: “La idea de

independencia se utiliza con frecuencia de forma intuitiva […]. Con frecuencia, las personas tratan de encontrar patrones en fenómenos aleatorios donde no los hay; de ahí la creencia en la buena o mala suerte.” (Batanero et al, 2020, p. 9).

Hemos encontrado que no todos los currícula siguen la organización de saberes establecida a nivel estatal (MEFP, 2022a). Por ejemplo, en la Comunidad Valenciana se separa el sentido estocástico en dos sentidos: 1) de incertidumbre y probabilidad, 2) de análisis de datos y estadística. Además, en la Comunidad de Madrid las directrices curriculares llaman contenidos a los saberes básicos y estadística al sentido estocástico.

Aunque hay directrices curriculares que organizan los saberes en probabilidad para los cursos de 1º y 2º de la ESO conjuntamente, en general, se presentan diferenciados en los tres cursos que conforman primer ciclo y las dos modalidades de 4ºESO, aunque no encontramos diferencias significativas en las concreciones para ambas modalidades en las directrices curriculares autonómicas y las establecidas por el MEPF en su ámbito de gestión. A pesar de que la modalidad B aborda en mayor profundidad la matemática. Suponemos que se encontrarán diferencias en otros materiales curriculares como los libros de texto, según la metodología y situaciones de aprendizaje que se propongan para la enseñanza y aprendizaje del tema. En particular, cabe señalar que en cuarto curso de la ESO en la Comunidad de Aragón se ofrece una asignatura electiva llamada “Matemáticas para la toma de Decisiones” (DECD, 2022) y contempla una unidad sobre el juego. Esta asignatura no ha formado parte del análisis que se ha realizado en este estudio, por lo que sería interesante poder estudiar sus lineamientos en mayor profundidad en futuros trabajos.

En general, podemos afirmar que la presencia de los saberes básicos aumenta conforme se avanza en curso de la ESO, pero la distribución de saberes no suele ser equilibrada durante primer ciclo y esto es un hecho que el docente ha de valorar en su práctica de aula. Porque el libro de texto suele ser un recurso ampliamente utilizado, por facilitar la planificación e intervención docente, pero el docente debe escoger con prudencia la editorial que emplea. Aunque sirven de puente entre la normativa curricular y la enseñanza y aprendizaje del tema (Valverde et al., 2002),

como plantean Serradó y Azcárate (2003), hay diferencias en el modelo de estructura y diseño del contenido entre editoriales.

En comparación a las otras áreas, el currículo en probabilidad tiene igual grado de importancia que el de otros sentidos en matemáticas, pero requiere del desarrollo de un razonamiento específico (Batanero et al., 2023; Sharma, 2015), que se ha de promover desde las primeras edades (Batanero et al. 2021).

Agradecimientos

Proyecto *PID2022-139748NB-I00* financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE. Beca de Doctorado en el Extranjero de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), Chile. Becaria Folio: 72220183.

Referencias

Batanero, C. (2019). Statistical sense in the information society. En *Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias-CISETC* (pp. 28-38).

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil. PNA, 15(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7-18.

Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). La educación del razonamiento probabilístico. *Educaçao Matematica Pesquisa, 25*(2), 127-144. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p127-144

Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2020). Comprendiendo la independencia y el condicionamiento. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, *89*, 7-13.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). Pre-K-12 Guidelines for assessment and instruction in statistics education

(GAISE) report II. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. https://lccn.loc.gov/2020006082

Departamento de Educación, Cultura y Deporte, DECD. (2022). *ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón*. Autor.

Educagob. (2024). *Portal del Sistema Educativo Español. Currículos en las Comunidades Autónomas.* https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/curriculos-ccaa.html

Gea, M. M. (2023). El libro de texto en la enseñanza de la estadística. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz (Eds.), *Memorias XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Trabajos invitados de la XVI CIAEM* (pp. 123-134). https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen1-Invitados.pdf

Jefatura del Estado. (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022a). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022b). *Orden EFP/754/2022, de 28 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional*. Autor.

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, MEFPD. (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Programa editorial del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.) *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 37-54). Editorial Universidad de Granada y SEIEM.

Serradó, A y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática, 15*(1), 67-98.

Sharma, S. (2015). Teaching probability: a socio-constructivist perspective. Teaching Statistics, 37(3), 78-84. https://doi.org/10.1111/test.12075

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., Houang, R. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Springer.

El acompañamiento docente. Una medida para el cambio metodológico en Matemáticas

Autores: José Manuel Vidal González
María Nila Pérez Francisco
Correo: mperfrah@gobiernodecanarias.org jvidgonf@gobiernodecanarias.org
Institución: Consejería de Educación, Formación profesional, Actividad física y Deportes del Gobierno de Canarias

Núcleo temático: Formación del profesorado

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Infantil, Primaria, Secundaria

RESUMEN

Uno de las grandes dificultades que se dan en el sistema educativo reside en encontrar la fórmula para llevar a cabo cambios metodológicos en las prácticas de aula. En general, el profesorado recibe formación pero esta no se traduce en un cambio en el día a día que produzca mejoras en el proceso de enseñanza y mejoras en los procesos de aprendizaje. Se sabe que la formación es condición necesaria pero no suficiente e igual ocurre con los materiales. Son múltiples los factores que impiden esta puesta al día: inseguridad, la fuerza de las prácticas rutinarias, las creencias, …

Esta dificultad es especialmente compleja cuando se trata de introducir cambios en la enseñanza de las matemáticas escolares.

En el Proyecto Matemáticas Newton Canarias se ha incorporado el acompañamiento a los docentes participantes para que las propuestas mostradas en la formación que reciben se lleven al aula, en esta línea se persigue las finalidades recogidas en el siguiente gráfico (Dra. Jenny Román Brito. Msc yDra. María de Lourdes Dousdebés. PhD, 2014)

Acompañamiento al profesorado en 1º y 2º de la ESO.

Acompañamiento al profesorado del 2º ciclo de primaria

.

Entendemos que, en el proyecto, el acompañamiento es un proceso de intercambio de experiencias y conocimientos mediante el cual un docente experimentado y formado (docente acompañante) realiza un modelaje para que el docente acompañado haga la valoración del trabajo en el aula y mediante la reflexión conjunta se propicien cambios metodológicos efectivos en las aulas. (Dra. Jenny Román Brito. Msc yDra. María de Lourdes Dousdebés. PhD, 2014)

El acompañante entra en el aula y desarrolla la sesión con el alumnado como protagonista y con el profesorado observando. Bien sea durante la propia sesión o posteriormente, se comentan las actividades realizadas, los agrupamientos, la atención a la diversidad, se aclaran dudas y se propone la continuación del trabajo en otras sesiones que el docente acompañado pueda realizar solo.

Acompañamiento al profesorado del tercer ciclo de primaria

Comentaremos la organización de los centros para que se realicen estas sesiones y los resultados en el tiempo de este tipo de acciones.

Acompañamiento al profesorado en infantil

En otras ocasiones es el docente el que desarrolla la clase y el profesor acompañante el que observa y después se reúne y comenta la sesión con el profesor acompañado.

Este diálogo considera tanto los comentarios generales del observador como los aspectos que se deben mejorar y los compromisos del docente en la línea que propone Escuela Amelia lynch de Lyon

Acompañamiento en el aula Matemagia

Referencias

Acompañamiento en el aula y retroalimentación docente

Escuela Amelia lynch de Lyon

Acompañamiento pedagógico al docente en el aula

Román Brito. Msc, Dra. Jenny

Dousdebés. PhD, Dra. María de Lourdes

Diseño de problemas con extensiones para atender estudiantes con alta capacidad matemática

Diego Alfonso Contreras
diego.contreras@uv.es
Universitat de València

Núcleo temático: Inclusión, Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

La atención a la diversidad se ha convertido en un desafío actual para el profesorado de matemática en Chile, especialmente con la implementación de la Ley de Inclusión Escolar. Surge la necesidad de abordar cómo atender a los estudiantes con alta capacidad matemática. En este contexto, este trabajo se centra en el diseño de un problema de porcentajes con una demanda cognitiva creciente en sus preguntas. Se presenta el modelo de los niveles de demanda cognitiva como una herramienta útil para diseñar tareas matemáticas desafiantes, planteando un problema con extensiones que permitan atender a este grupo de estudiantes.

Palabras clave: Educación inclusiva, Matemáticas, Resolución de problemas.

1. Introducción

En las últimas décadas, los sistemas educativos de todo el mundo se han enfrentado al desafío de abordar la diversidad que existe en el aula. En Chile, con la implementación de la Ley de Inclusión Escolar (2015), se busca que cada centro educativo promueva la inclusión de todos sus estudiantes, que se reconozcan sus características individuales y se ofrezca una respuesta adecuada para atender sus

necesidades y motivaciones. Entre estos grupos se encuentran los estudiantes con alta capacidad matemática (en adelante ACM), quienes, según Singer y otros (2016), a menudo se sienten desatendidos en las aulas de esta materia.

El currículum escolar chileno de Educación Secundaria promueve que la asignatura de matemática se focalice en la resolución de problemas, motivando a los estudiantes hacia un proceso de búsqueda creativa de soluciones (Ministerio de Educación, 2016). Esto es especialmente beneficioso para los estudiantes con ACM, ya que ellos manifiestan una serie de características en su forma de abordar esta disciplina, mostrando habilidades para resolver problemas con respuestas originales y distintas a las utilizadas por los estudiantes de su misma edad (Krutetskii, 1976).

De acuerdo con autores como Diezmann y Watters (2002) y Castro y otros (2015), el diseño de problemas con extensiones que supongan un desafío para los estudiantes permite poner de manifiesto características propias de la ACM, entre las cuales destacan, para esta comunicación, las habilidades de organizar datos y la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático (Greenes, 1981; Tourón y otros, 1998). De esta manera, y en concordancia con investigaciones en educación matemática, la resolución de problemas se presenta como un método eficaz para que el profesorado caracterice y atienda adecuadamente a este grupo de estudiantes (Castro y otros, 2006; Gutiérrez y Jaime, 2013).

Esta comunicación se enmarca en los avances de un proyecto de investigación doctoral cuyo objetivo general es diseñar y validar un cuestionario basado en la resolución de problemas que permita identificar la alta capacidad matemática en alumnos de 7º básico del sistema educativo chileno (1º de ESO del sistema educativo español). En particular, se presenta el diseño de un problema de porcentajes que consta de dos preguntas con distintos niveles de dificultad. La primera está diseñada para que pueda ser resuelta parcial o totalmente por el conjunto de estudiantes de un aula tradicional, mientras que la segunda busca fomentar el pensamiento de orden superior (Diezmann y Watters, 2002) y la atención de estudiantes con ACM. De esta manera, el objetivo específico de este trabajo es diseñar un problema de porcentajes con una demanda cognitiva ascendente en sus preguntas.

Para el diseño del problema, se utiliza el modelo de los niveles de demanda cognitiva (DC) propuesto por Smith y Stein (1998), el cual fue reformulado por Benedicto (2018). Este modelo evalúa la complejidad del razonamiento presente tanto en el diseño como en la resolución de problemas. Además, se toman en consideración algunos de los criterios para diseñar problemas con extensiones establecidos por Jaime y otros (2018).

2. Modelo de los niveles de demanda cognitiva

El modelo de los niveles de demanda cognitiva desarrollado por Smith y Stein (1998) es una herramienta que permite al profesorado analizar y clasificar las tareas según el grado de dificultad que requieren los estudiantes para resolverlas con éxito. En este modelo se distinguen cuatro niveles de DC, los dos primeros corresponden a un bajo nivel de demanda, mientras que los dos últimos corresponden a una alta demanda. Las características básicas asociadas a cada nivel de DC son las siguientes:

- **Memorización:** tareas que se resuelven mediante la repetición de fórmulas, reglas o definiciones tomadas directamente del enunciado o previamente memorizadas. En este tipo de tareas, no se establece conexión con otros contenidos matemáticos.

- **Algoritmos sin conexiones:** tareas que se resuelven aplicando un algoritmo previamente estudiado o siguiendo instrucciones dadas en el enunciado. No existe conexión con conceptos o significados que subyacen al procedimiento.

- **Algoritmos con conexiones:** tareas que se resuelven aplicando un algoritmo general que se puede seguir solamente si los estudiantes establecen conexiones estrechas con los contenidos matemáticos implícitos en la resolución del problema.

- **Hacer matemáticas:** tareas que se resuelven haciendo uso de un razonamiento complejo y no algorítmico, por lo que los estudiantes deben

acceder a conocimientos y experiencias relevantes y usarlos adecuadamente durante la resolución de la actividad.

En la investigación, se utiliza como referente teórico a Benedicto (2018), quien completó y mejoró la caracterización del modelo de los niveles de DC al definir seis categorías que se centran en diferentes aspectos de la actividad cognitiva durante la resolución de una tarea matemática. Dichas categorías son: la *finalidad* con la que se propone la actividad; el *procedimiento de resolución* que requiere la actividad; el *esfuerzo cognitivo* necesario para llevar a cabo su resolución; los *contenidos matemáticos implícitos* puestos de manifiesto en su resolución; el tipo de *explicaciones* requeridas u otorgadas por los estudiantes; y las *formas de representación* de la solución.

3. Diseño del problema

Para el diseño del problema que se muestra en esta comunicación, se tuvieron en cuenta dos aspectos: el curricular y los referentes teóricos. En el aspecto curricular, se consideró uno de los objetivos de aprendizaje (OA) propuestos por el currículum escolar chileno para 7º básico (1º de ESO del sistema educativo español), con el fin de garantizar que todos los estudiantes participantes del estudio tuvieran los conocimientos mínimos para abordar la tarea propuesta. En particular, se utilizó el OA que dice: “mostrar que comprenden el concepto de porcentaje: representándolo de manera pictórica; calculando de varias maneras; y aplicándolo a situaciones sencillas” (Ministerio de Educación, 2016, p. 107).

Para la elaboración de las dos preguntas del problema, se tomaron en cuenta las características de los niveles de DC, considerando un aumento en el grado de abstracción y, por lo tanto, en la demanda cognitiva necesaria para obtener una respuesta correcta. La Figura 1 muestra el problema presentado en esta comunicación.

PROBLEMA. IMPUESTOS
Puedes usar calculadora para resolver este problema.

Al precio base de un videojuego, siempre se le debe añadir un 20% de impuestos. Por la compra de un videojuego, una empresa cobra $4.000 más por transporte.

a) Si el precio base de un videojuego de deportes es de $35.000, ¿cuánto tendrá que pagar finalmente una persona, si quiere que se lo lleven a su casa? Escribe todos los cálculos que realices.
b) Si tengo que pagar $28.000 por un videojuego de acción, ¿cuál era el precio base, sin transporte ni impuestos? Escribe todos los cálculos que realices.

Figura 1. Texto del problema.

4. Análisis de la demanda cognitiva de las preguntas

Para resolver con éxito el problema de los impuestos, un estudiante con un rendimiento medio debe tener en cuenta los contenidos matemáticos implícitos presentes en el procedimiento de resolución, tales como el orden en la secuencia de operaciones requeridas, el cálculo de porcentajes y la inversión del proceso de obtención de porcentajes.

La pregunta a) se puede clasificar en el nivel de DC de *algoritmos sin conexiones*, ya que requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Esto se debe a que existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que la pregunta presenta claramente la secuencia de operaciones que se deben realizar. Los estudiantes pueden resolver la tarea mediante una estrategia aritmética: calculando el porcentaje de impuestos sobre el precio base del videojuego y luego sumando la cantidad fija correspondiente a transporte sobre las cantidades anteriores para determinar el precio a pagar por el videojuego.

Por otra parte, la pregunta b), propuesta como una extensión a la primera pregunta para atender a estudiantes con ACM, se puede clasificar en el nivel de demanda cognitiva de *algoritmos con conexiones*, ya que su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes necesitan comprender que, para obtener el precio base del videojuego, deben establecer correctamente la secuencia inversa de operaciones: restando el precio del transporte al precio pagado y luego planteando y calculando la relación porcentual entre el precio del videojuego con impuestos y su precio base.

Finalmente, el problema de los impuestos busca poner de manifiesto las habilidades de organizar datos al momento de plantear correctamente las secuencias de operaciones requeridas en ambas preguntas, así como la inversión de procesos mentales, cuando se establece la relación porcentual inversa necesaria para obtener el precio base del videojuego en la segunda pregunta, lo que convierte al problema en un desafío para los estudiantes con ACM.

5. Conclusiones

Los estudiantes con alta capacidad matemática requieren atención especial por parte del profesorado. La resolución de problemas se destaca como una estrategia efectiva para atender las necesidades de estos estudiantes, permitiendo poner de manifiesto sus habilidades. En este sentido, el modelo de los niveles de demanda cognitiva proporciona un marco útil para diseñar problemas que aborden diferentes niveles de complejidad y atiendan las necesidades de todos los estudiantes. La aplicación práctica de estos conceptos se muestra a través del diseño de un problema de porcentajes con preguntas de distintos niveles de dificultad, destinados a atender a estudiantes con altas capacidades matemáticas de séptimo básico en el sistema educativo chileno.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i PID2020-117395RB-I00 y de la ayuda predoctoral PRE2021-097725, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por el FSE+.

Referencias

Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* [Tesis de doctorado, Universitat de València, España]. http://hdl.handle.net/10550/66468

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006) Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca, 11*, 4-22.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca, 21*, 85-104.

Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002) Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch, y M. O. J. Thomas (eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 219-226). MERGA.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(8), 14-17.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 319-326). SEIEM.

Jaime, A., Gutiérrez, Á. y Benedicto (2018). Problemas con extensiones. Propuesta para estudiantes con alta capacidad matemática. *UNO, 79*, 7-14.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. The University of Chicago Press.

Ministerio de Educación (2016). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ley 20.845 de 2015. Establece la Ley de Inclusión Escolar. 29 de mayo. Diario Oficial de la República de Chile Nº 41.177.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V. y Brandl, M. (Eds.) (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. Springer Open

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J., Fernández, R., Ramos, J., y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. En A. Sipán (Coord.), *Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos* (pp. 281-292). Mira.

Juegos móviles y de mesa para el desarrollo de habilitades críticas y creativas en el alumnado con talento matemático

Lucía Rotger García
lucia.rotger@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Ana Belén Petro Balaguer
anabelen.petro@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Juan Miguel Ribera Puchades
j.ribera@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Núcleo temático: Inclusión (Talento matemático) y Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

Este estudio explora el uso de juegos como herramientas para enriquecer las habilidades matemáticas en estudiantes con talento matemático. Para ello, se trata de evaluar cómo los juegos de mesa y móviles pueden fomentar habilidades como estrategia, probabilidad y visualización. Los análisis de los juegos indican que no solo pueden mejorar la participación activa y el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos de manera visual y tangible, sino que también pueden promover el desarrollo de un pensamiento crítico y la capacidad de resolución de problemas a través de la práctica dirigida y contextualizada. Este enfoque interactivo puede ser

una estrategia efectiva para mantener y desarrollar el potencial cognitivo de los estudiantes talentosos, sugiriendo que la integración de estos recursos lúdicos podría transformar significativamente el aprendizaje matemático en contextos educativos inclusivos.

Palabras clave: talento matemático, aprendizaje basado en el juego, estrategias de juego, educación inclusiva, razonamiento lógico.

1. Introducción

En un momento en el que la educación se enfrenta al desafío de adaptarse a las necesidades de una diversidad de aprendices, la integración de estrategias innovadoras que enganchen y estimulen a estudiantes de todos los niveles, con una perspectiva inclusiva, se ha vuelto esencial. Entre las diferentes capacidades se encuentra el alumnado con talento excepcional, quienes frecuentemente requieren estímulos más allá del currículo estándar para alcanzar su máximo potencial. Las habilidades para resolver problemas de manera flexible, creativa y original son cruciales en el ámbito matemático, y están estrechamente ligadas al talento matemático que exhiben algunos estudiantes (Gutiérrez y Jaime, 2013). Este conjunto de habilidades incluye la capacidad para identificar patrones y relaciones matemáticas, generalizar y transferir conocimientos de un problema a otro, y desarrollar razonamiento abstracto (Krutetskii, 1976). Estas competencias permiten a los estudiantes enfrentar y superar desafíos matemáticos complejos, encontrando soluciones innovadoras a problemas que no solo requieren una aplicación mecánica de fórmulas, sino también un entendimiento profundo y una aplicación creativa de conceptos matemáticos.

Una de las estrategias interactivas para enriquecer y fomentar el talento matemático en el contexto educativo puede ser a través del uso de juegos. Los juegos, al integrar desafíos que requieren el uso de habilidades como la visualización espacial, el análisis estratégico y la resolución de problemas complejos, proporcionan una plataforma ideal para que los estudiantes con altas capacidades matemáticas apliquen y expandan sus habilidades (Benavides y Maz-Machado, 2012). Estos

entornos lúdicos no solo permiten a los estudiantes experimentar con conceptos matemáticos en escenarios prácticos y dinámicos, sino que también promueven un aprendizaje profundo mediante la exploración activa y la experimentación (De la Fuente y Garrido-Martos, 2023). En general, el alumnado asocia la resolución de problemas presentes en los juegos con las matemáticas, percibiéndolos como desafíos que requieren pensamiento crítico y el desarrollo de estrategias; sin embargo, solo unos pocos son conscientes de que están practicando geometría y otros contenidos curriculares mediante estos juegos (Matas y Petro, 2023).

Inicialmente, un juego introduce reglas y objetos que los participantes deben aprender a manejar y relacionar entre sí, similar a como un estudiante de matemáticas interactúa con conceptos y teoremas por primera vez (De Guzmán, 1989). Al enfrentarse a retos que requieren no sólo la ejecución de operaciones matemáticas estándar sino también un pensamiento estratégico y creativo, los estudiantes pueden explorar la profundidad y amplitud de la matemática de manera integral. Además, los juegos pueden adaptarse para incrementar su complejidad, ofreciendo así retos continuos que son esenciales para el desarrollo cognitivo de alumnos con talento matemático, asegurando que su potencial no solo sea mantenido, sino desarrollado.

Por otro lado, los juegos con elementos de azar introducen a los estudiantes a conceptos de probabilidad y estadística de una manera que es simultáneamente accesible y rigurosa (Godino, Batanero y Flores, 1999). Mediante la manipulación física de objetos como dados y cartas, los estudiantes no sólo llegan a entender mejor los conceptos de variabilidad y distribución, sino que también aprenden a aplicar estos conceptos en la toma de decisiones informadas dentro del juego (De Guzmán, 1989). De hecho, el azar aparece involucrado naturalmente en algunos de los juegos, como muestra la clasificación de Edo, Deulofeu y Badillo (2007):

a. Juegos de azar absoluto. En estos juegos, las acciones de los jugadores están completamente determinadas por los resultados de los dados.
b. Juegos con alguna estrategia favorecedora. Estos son juegos que incluyen elementos de azar; sin embargo, las decisiones del jugador pueden afectar el desenlace del juego.

c. Juegos de pura estrategia. Aquí, el jugador controla completamente las decisiones, lo que le permite potencialmente desarrollar y aplicar una estrategia que le asegure la victoria.

Si se centra el foco en el objetivo educativo del juego, en Ribera y Rotger (2019) se han clasificado los juegos como:

a. Juegos diseñados específicamente para enseñar conceptos matemáticos.
b. Juegos que proporcionan un entorno adecuado para plantear problemas matemáticos.
c. Juegos donde el uso de matemáticas es esencial para mejorar el juego y la estrategia de los participantes.

De las dos clasificaciones anteriores se observa la importancia de la perspectiva matemática en la elaboración de estrategias en las que el alumnado pueda desarrollar las habilidades críticas y de resolución de problemas en los contextos del juego. Por todo ello, el objetivo principal de este estudio es analizar cómo los juegos de mesa y móviles pueden ser utilizados como herramientas efectivas para desarrollar habilidades matemáticas avanzadas en estudiantes que presentan talento. En concreto, se pretende analizar cómo estos juegos facilitan la aplicación de teorías matemáticas en la práctica, mejoran la capacidad de pensamiento crítico y estratégico, y promueven una comprensión más profunda de conceptos matemáticos complejos.

2. Metodología

Este estudio presenta un enfoque cualitativo para el análisis de las habilidades matemáticas que pueden desarrollar los estudiantes con talento a través del uso de juegos. Se utilizan dos tipos principales de juegos: juegos de mesa y juegos móviles, cada uno seleccionado según su relevancia educativa y su capacidad para fomentar habilidades matemáticas como la estrategia, probabilidad y visualización. La propuesta que se presenta está diseñada para un grupo de 20 estudiantes que presentan altas capacidades intelectuales del programa Mentoriment de la Universidad de las Islas Baleares (*https://mentoriment.uib.es*), con edades comprendidas entre 14 y 18 años. En este programa se realizan talleres que

incorporan contenidos de diferentes áreas de conocimiento, en particular, de conocimiento matemático.

2.1 Una propuesta de juego móvil

Los juegos móviles ofrecen plataformas interactivas que destacan por su accesibilidad y la capacidad de proporcionar retroalimentación inmediata, dos características esenciales para un aprendizaje efectivo. En el ámbito educativo, los juegos móviles matemáticos no solo fomentan la participación activa de los estudiantes mediante problemas y puzles lógicos, sino que también permiten la exploración de conceptos matemáticos complejos de una manera visual y tangible.

Uno de estos juegos es el Shikaku (del japonés, que se puede traducir como "figura con cuatro lados y cuatro ángulos rectos"), un rompecabezas lógico originario de la editorial japonesa Nikoli (*https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/shikaku/*). En su versión original, el tablero consiste en una cuadrícula cuadrada o rectangular con varios números o formas distribuidos en algunas de sus celdas (ver Imagen 1). El objetivo de esta versión es el de dividir el tablero completo en rectángulos (incluyendo cuadrados), de modo que cada figura contenga exactamente un número, y que este número represente la cantidad de celdas dentro del rectángulo. Para experimentar con esta versión del juego, se puede visitar el sitio web *https://es.puzzle-shikaku.com/*, que ofrece un generador de retos con millones de configuraciones posibles, desde tableros de 5x5 hasta 25x25.

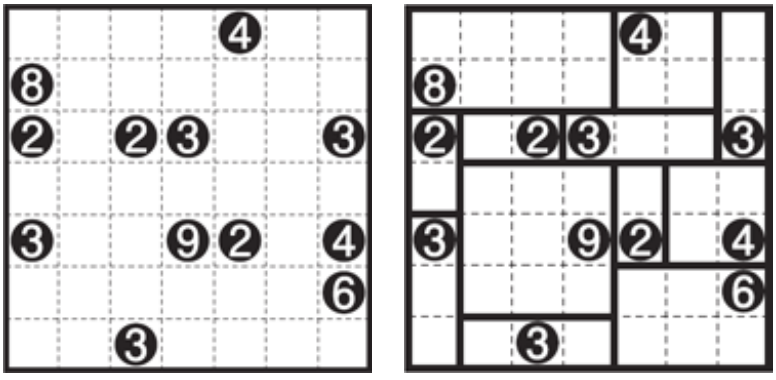


Imagen 1. Reto y solución de la versión original del Shikaku. Fuente: *https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/shikaku/*

Este juego ha sido modificado y adaptado para la aplicación móvil Puzzlerama (*https://bit.ly/Puzzlerama*), ampliando significativamente las posibilidades al incorporar nuevas formas geométricas planas, distintas a las originales compuestas únicamente de rectángulos. Estas nuevas configuraciones incluyen formas variadas como cruces o figuras en forma de la letra "L", "U" o "T", entre otras. Además, en algunos niveles se conservan las configuraciones originales basadas en números. En la Imagen 2, se presentan varios de los desafíos de dificultad creciente, pertenecientes a cuatro de los cinco grupos de dificultad que ofrece esta versión móvil (fácil, medio, avanzado, difícil y experto).

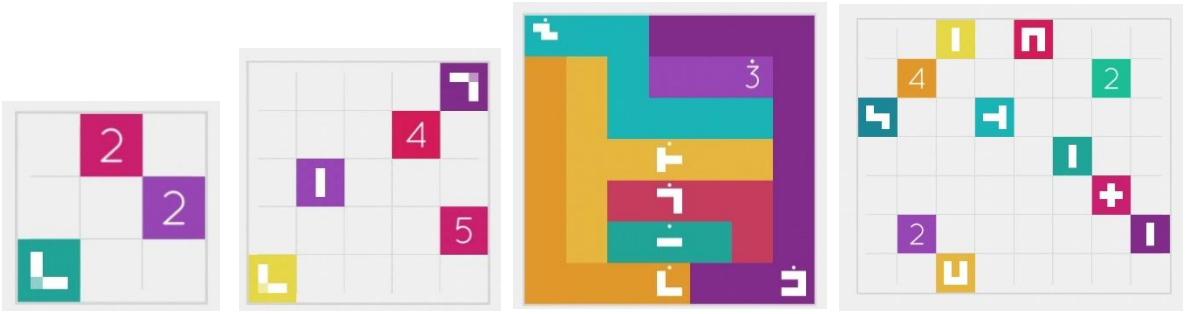


Imagen 2. Diferentes niveles del juego Shikaku. Fuente: Extraídos de la aplicación Puzzlerama

A continuación, se identifican algunas estrategias clave para resolver los rompecabezas de Shikaku y cómo estas se relacionan con conceptos matemáticos de diferente tipo:

1. Utilización de restricciones geométricas:
    a. Descripción: Esta estrategia implica observar y decidir cómo expandir una forma de tamaño no fijado en un rectángulo basándose en su ubicación en la cuadrícula y las restricciones impuestas por los números adyacentes. Por ejemplo, en el primer tablero de la Imagen 2, se observa que la figura sin tamaño determinado debe ocupar las cinco casillas restantes que dejan las dos piezas rectangulares de tamaño fijado e igual a dos.
    b. Contenido matemático relacionado: Implica el uso de ecuaciones o inecuaciones para definir el área desconocida de una figura, considerando restricciones de tamaño y forma.
2. Conteo y distribución espacial:

   a. Descripción: Expandir el número de una celda a un área que corresponda exactamente a ese número de celdas, verificado en la aplicación a través un marcador visual en forma de punto sobre el número (como se puede ver en el tercer tablero, de la Imagen 2).
   b. Contenido matemático relacionado: Involucra habilidades básicas de conteo y aritmética, además de la capacidad de visualización para distribuir uniformemente las unidades dentro de un espacio delimitado.
3. Minimización de la superposición y maximización del espacio:
   a. Descripción: Planificar la expansión de números para utilizar el espacio disponible eficientemente, sin superposiciones.
   b. Contenido matemático relacionado: Involucra principios de optimización y teoría de conjuntos, donde el jugador debe maximizar o minimizar variables dentro de un sistema cerrado (la cuadrícula).
4. Análisis de casos y estrategia de resolución de problemas de prueba y error:
   a. Descripción: Emplear un método de prueba y error para explorar todas las configuraciones posibles de formas para un número dado, especialmente útil en situaciones complejas donde múltiples configuraciones son posibles.
   b. Contenido matemático relacionado: este método refleja los principios de análisis combinatorio y pensamiento algebraico, donde el jugador evalúa sistemáticamente todas las combinaciones posibles hasta encontrar la solución correcta.
5. Estrategias de eliminación:
   a. Descripción: Identificar áreas donde ciertas configuraciones son imposibles y eliminar esas opciones, reduciendo el problema a un conjunto más manejable de posibilidades.
   b. Contenido matemático relacionado: Relacionado con la lógica deductiva y el razonamiento matemático, similar a lo que se utiliza en pruebas de hipótesis y en la simplificación de problemas algebraicos.

Las estrategias mencionadas requieren que el jugador aplique habilidades de razonamiento lógico, visualización espacial y aritmética, ya que debe determinar

cómo se pueden configurar las formas geométricas para cumplir con las condiciones del juego. La simplicidad en las reglas de Shikaku contrasta con la complejidad de su resolución, lo que lo convierte en una herramienta educativa excelente para mejorar la intuición espacial y la capacidad de planificación estratégica en contextos matemáticos. Estas estrategias de juego proporcionan oportunidades al alumnado con talento matemático para aplicar y profundizar su comprensión matemática en un contexto de resolución de problemas lógicos y espaciales sobre un juego.

2.2 Propuesta de juegos de mesa

Como señala Deulofeu (2016), la selección de un juego de mesa para la enseñanza matemática debe considerar criterios como una temática interesante, materiales atractivos y una mecánica de juego ingeniosa que invite a múltiples partidas. Además, es fundamental que el juego facilite la exploración de conceptos, estrategias y procedimientos matemáticos específicos. En este estudio, proponemos dos juegos de mesa que abordan dos áreas temáticas distintas: la numeración y el cálculo, por un lado, y la geometría o la visión espacial por el otro, a través de los juegos “Roll to the top!” y “Colour code”.

2.2.1 Roll to the top!

"Roll to the Top!" es un juego de dados del género Roll&Write, desarrollado por la editorial Cwali. Este juego destaca por su simplicidad y accesibilidad, ya que solo requiere papel, específicamente unas plantillas de juego que se proporcionan, bolígrafos y dados. Este juego se caracteriza por su facilidad de configuración y rapidez para empezar a jugar, lo que lo hace ideal para entornos educativos y casuales. Es un juego educativo que permite reforzar habilidades matemáticas como secuenciación numérica, operaciones básicas, estrategia, toma de decisiones, probabilidad y pensamiento lógico, mediante la mecánica de Roll&Write donde los jugadores llenan plantillas basadas en lanzamientos de dados y deben aumentar numéricamente mientras ascienden en un edificio. Este enfoque integra el razonamiento matemático y la probabilidad en un contexto lúdico que fomenta el aprendizaje activo y práctico.

Este juego se estructura en torno a 6 desafíos representados por plantillas reutilizables, como se observa en la Imagen 3, y un conjunto de cinco dados de distintas caras (4, 6, 8, 12, y 20), además de un dado blanco extra de 6 caras que introduce acciones especiales. El objetivo del juego es completar el tablero con los números obtenidos de los lanzamientos de dados, alcanzando la cima antes que los demás competidores. Las reglas son sencillas:

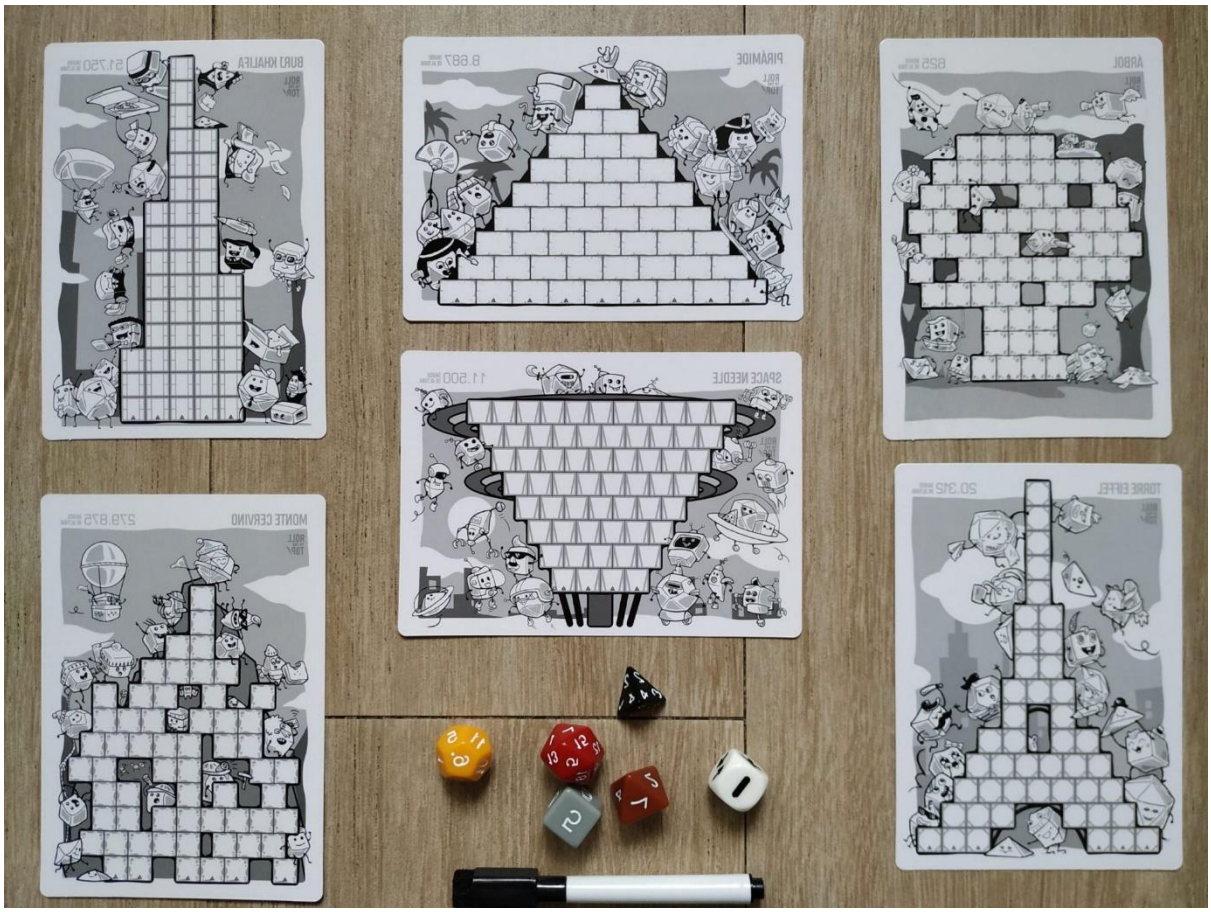


Imagen 3. Tableros disponibles y dados del juego Roll to the top!. Extraído de Madres desterradas (2020).

- Preparación: Se reparte uno de los tableros a cada uno de los participantes, asegurando que los jugadores tengan el mismo tablero. Antes de empezar la partida, se lanzan todos los dados y se retiran los dados en los que se haya obtenido un número impar. Se conserva el dado blanco y los dados con los números pares para empezar la partida.

- Jugadas: En su turno, un jugador lanza los dados disponibles y usa los resultados para llenar las casillas de su plantilla. Se pueden apuntar todos los números que haya en los dados, como dejar alguno sin usar, como hacer la suma de los números de los dados. La regla importante aquí es que el número de una casilla debe ser siempre igual o superior al de sus casillas inferiores. Para poder colocar un número las casillas inferiores deben estar completadas. Solo se puede rellenar, como máximo, el mismo número de casillas como dados de colores se disponen.
- Acciones especiales del dado blanco: Una vez ha completado cada jugador su tablilla, el jugador de su izquierda realiza la acción indicada por el dado blanco. Así, si ha salido un "+" se debe añadir uno de los dados descartados, si sale un "-" se debe descartar uno de los dados con los que se juega, si sale "+/-" el jugador decide si añadir o eliminar un dado y si sale la doble flecha se intercambia uno de los dados con los que jugamos con uno de los descartados.
- Continuación: Una vez hecho esto, se vuelven a repetir las acciones anteriores, hasta que alguien llega a la cima del tablero.

Es importante tener en cuenta algunas excepciones:

- Hay algunos tableros, donde se encuentran algunas casillas que no tienen casillas inferiores. En este caso, para poder colocar un número en esas casillas deben haberse llenado las casillas de la izquierda o de la derecha para poder rellenar esa casilla.
- Siempre se debe jugar con, al menos, dos dados de color y el dado blanco, por tanto, si al realizar las acciones con el dado blanco, nos hemos quedado con uno solo, se añade otro. Si, por el contrario, se está jugando con todos los dados de color, en la siguiente jugada se debe eliminar uno de ellos.
- En alguna jugada puede pasar que ningún jugador apunte ningún número en su plantilla. En ese caso, si quedan, añadimos un dado más.

Estas reglas, diseñadas para ser sencillas y fáciles de recordar, permiten a los jugadores concentrarse en estrategias y toma de decisiones mientras disfrutan del desafío matemático y estratégico del juego. Como se ha indicado, los jugadores deben de ir vigilando donde colocan los números y qué números van colocando para

evitar quedarse sin posibles soluciones, a medida que ascienden en la plantilla. Pero también es cierto que un enfoque demasiado conservador, evitando añadir números por temor a que sean demasiado altos, puede permitir que los oponentes avancen más rápidamente.

Desde el punto de vista matemático, este juego no solo facilita la práctica del cálculo y la secuencia numérica, sino que también ofrece interesantes variantes para adaptarse a jugadores de edades más avanzadas y a aquellos que presentan características de talento matemático (Benavides y Maz-Machado, 2012). Por ejemplo, en lugar de simplemente sumar, los jugadores pueden optar por restar, multiplicar o dividir los resultados de los dados en cada turno, o incluso combinar estas operaciones, respetando el orden de este tipo de operaciones. Otras opciones creativas podrían permitir introducir nuevos dados adicionales que presentaran valores numéricos constantes o variables, lo que permitiría a familiarizarse con conceptos algebraicos básicos.

En el contexto educativo, este juego permite observar las diferentes estrategias de los estudiantes: quiénes arriesgan más, quiénes son conservadores, quiénes planifican su jugada estratégicamente y quiénes actúan de manera más impulsiva. Además, permite evaluar cómo los estudiantes gestionan la incertidumbre y cómo se influencian por las jugadas de sus compañeros, ya que típicamente se juega con las plantillas a la vista de todos, aunque este aspecto puede modificarse si resulta problemático. En resumen, "Roll to the Top!" es un juego competitivo que no solo mejora la velocidad de cálculo, sino que también fortalece la confianza de los estudiantes al enfrentarse con seguridad a problemas matemáticos.

2.2 Colour Code

“Colour Code” es un juego de la casa Smart Games, los cuales tienen una serie de juegos de características similares. Los juegos de Smart Games son juegos de lógica y rompecabezas multinivel para todas las edades. Sus juegos suelen ir acompañados de un libro en el cual se van proponiendo retos de diferente dificultad, con los que se puede jugar de manera individual o por parejas.

En el caso de “Colour Code”, se enfoca en desarrollar la percepción visual y, adicionalmente, se explora el estudio de las características de las figuras planas presentes en las fichas transparentes y en los retos propuestos. Al ser un juego multinivel que presenta desafíos consecutivos, fomenta la resiliencia de los estudiantes, permitiéndoles enfrentar la frustración y superarse continuamente, aspectos claves en el desarrollo del sentido socioafectivo en la enseñanza de las Matemáticas.

El juego consta de:

- Un soporte para colocar las fichas.
- 18 fichas transparentes con diferentes figuras geométricas.
- Cuaderno con 100 retos organizados en 4 niveles de dificultad.

En la Imagen 4 podemos se muestran los diferentes elementos del juego.

Imagen 4. Diferentes elementos del juego “Colour Code”.

Para avanzar en el juego, se deben superar los retos que el libro propone. Las reglas son claras y sencillas:

- Elegir uno de los 100 retos (se recomienda empezar por el juego número 1 e ir avanzando, reto a reto)
- Escoger las fichas transparentes necesarias para cumplir con el desafío planteado, colocándolas en el soporte en el orden y orientación correctos.

- Comprobar si la solución es la correcta, mirando las soluciones al final del libro. Es muy importante que el alumnado no compruebe la solución hasta que haya intentado y superado el reto. Si no, el juego no consigue ninguno de sus objetivos educativos.
- Una vez resuelto, girar la página y proponerse un nuevo reto.

Se deben tener en cuenta algunas pequeñas indicaciones adicionales:

- Para algunos retos, se puede jugar con el fondo blanco del soporte para facilitar la visualización.
- Las formas de un mismo color que están en fichas diferentes pero que forman un conjunto en la propuesta de resolución se consideran una sola figura del mismo color. Por ejemplo, en la Imagen 4, el cuadrilátero verde se forma a partir de dos fichas diferentes, pero se considera como una única figura.

Este juego se considera valioso porque facilita la enseñanza de la geometría, enfocándose en la composición y descomposición de figuras planas. Esta área de estudio es importante en la geometría bidimensional, ya que comprende conceptos fundamentales como la medida de áreas sin la necesidad de recurrir a las fórmulas matemáticas. Además, permite a los estudiantes explorar propiedades geométricas esenciales, como las transformaciones en el plano (simetría, translación y giro) de una manera intuitiva y aplicada.

Al implementar este juego en el aula, es interesante fomentar que el alumnado comparta sus estrategias de resolución. Las técnicas pueden variar, desde el uso de ensayo y error hasta métodos más sofisticados como la disección precisa de las figuras. Inicialmente, algunos estudiantes pueden enfocarse en seleccionar fichas basándose en los colores, mientras que otros podrían descartar fichas que no se ajusten a la solución buscada, mostrando un enfoque más analítico y estratégico en la resolución de problemas.

Una vez que los estudiantes dominan este juego de mesa, se pueden introducir variantes para incrementar la complejidad y el interés, especialmente, con los alumnos que presentan talento matemático. Una posibilidad es permitir que los propios alumnos diseñen los desafíos, utilizando las fichas disponibles para crear nuevos puzles. Otra opción es aumentar la dificultad modificando los desafíos o las

fichas empleadas, por ejemplo, utilizando fichas de igual color pero con superficies diferentes, lo que agrega un nivel de desafío en la identificación y selección de piezas. Además, se puede extender el concepto a figuras tridimensionales, lo cual amplía el alcance del aprendizaje geométrico al explorar el volumen y la visualización espacial. Esta progresión en el juego puede generar mejoras en las habilidades matemáticas promoviendo un pensamiento matemático más profundo y creativo.

3. Conclusiones

La implementación de juegos de mesa y móviles como herramientas efectivas para el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes con talento abre la vía al diseño de nuevos recursos que atiendan a este alumnado. Estos métodos se pueden extender a un contexto educativo más amplio, proporcionando al profesorado un marco práctico para el desarrollo de habilidades curriculares de matemáticas. Además, los juegos matemáticos que requieren o fomentan la interacción social, como aquellos que implican trabajo en equipo, pueden mejorar habilidades como la comunicación matemática y la colaboración en contextos de aula inclusivos.

Al considerar la implementación de las ideas propuestas en el aula, es importante reconocer algunos posibles inconvenientes asociados. Primeramente, introducir un nuevo juego requiere tiempo, no solo para presentarlo y explicarlo, sino también para que los estudiantes jueguen suficientes partidas para familiarizarse con el proceso y comprender las matemáticas involucradas. Además, otro posible inconveniente es el coste de los juegos de mesa y la necesidad de adquirir suficientes ejemplares para que todos los estudiantes puedan participar activamente.

Los ejemplos presentados son solo una muestra de las diferentes posibilidades que ofrecen los juegos de mesa disponibles en el mercado o de descarga gratuita en las plataformas digitales. Se puede encontrar variedad de juegos que atiendan a diferentes áreas de la matemática como el álgebra o la combinatoria.

Un futuro elemento de estudio puede ser la comparación de la efectividad de juegos matemáticos ofrecidos en diferentes formatos, incluyendo digitales, físicos, y híbridos, para identificar cómo el medio influye en el aprendizaje y la participación del alumnado general, y del que presenta talento, en particular.

Esta propuesta se podría extender mediante el desarrollo de nuevos niveles o reglas de juego por parte de estudiantes con talento como ejemplo de cómo el aprendizaje basado en juegos puede fomentar la innovación y la creatividad (Gutiérrez y Jaime, 2013). Este proceso no solo puede reforzar los conocimientos y habilidades previamente adquiridos, sino que también puede impulsar a los alumnos que presentan talento a pensar fuera de los límites tradicionales, explorando y creando nuevos problemas matemáticos en forma de nuevo retos en el juego.

El enfoque presentado del aprendizaje basado en el juego no solo promueve el aprendizaje activo y participativo (De la Fuente y Garrido-Martos, 2023), sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar con confianza los desafíos matemáticos del futuro, destacando el valor de los juegos como recurso significativo y transformador en el contexto educativo.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto “Aproximación multidimensional a la atención a estudiantes con alta capacidad matemática” (PID2020-117395RB-I00), financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Benavides, M., y Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático? En *IX Congreso Iberoamericano Superdotación, talento y creatividad* (pp. 167-179). Buenos Aires, Argentina

De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R. (2023). Aprendizaje basado en juegos. En L. Cañadas y N. Hidalgo (Eds.), *Materiales docentes para el empleo de metodologías y procesos de evaluación formativa en la formación inicial de profesorado* (pp. 101-118). Madrid: Dykinson. https://doi.org/10.14679/2310

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.

Deulofeu Piquet, J. (2016). Juegos de mesa para aprender matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas.* 73, 7 – 13.

Edo, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. En M. I. Berenguer (ed.) *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1-6). Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. *Homenagem ao professor Oscar Sáenz Barrio*. Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar, 165-185.

Gutiérrez, A. (2017). Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático: teoría y práctica. En H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A.P. Canavaro, J.P. da Ponte (Eds.), *O ensino e a aprendizagem da geometria* (pp. 27-39). Instituto de Educación, Universidad de Lisboa.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Madres Desterradas (8 de noviembre de 2020). *Roll to the top!.* Madres desterradas. *https://madresdesterradas.es/index.php/2020/11/08/roll-to-the-top/*

Matas, N. y Petro, A. B. (2023). CAMINOS: Juegos de mesa para trabajar Geometría. En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1465-1474). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Ribera, J. M. y Rotger, L. (2019). Aprendiendo matemáticas con juegos móviles. En XIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana. Innovació i Tecnologia en Educació Matemàtica (pp. 241-255). Alacant: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant. ISBN 978-84-09-14773-1. *http://hdl.handle.net/10045/98662*

Modificaciones a una tarea de pensamiento computacional sobre Scratch propuestas por alumnado que presenta talento matemático

Juan Miguel Ribera Puchades
j.ribera@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Lucía Rotger García
lucia.rotger@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

Núcleo temático: Inclusión (Talento matemático) y Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Universidad

RESUMEN

Este estudio presenta la integración del pensamiento computacional y las habilidades matemáticas en el enriquecimiento curricular de estudiantes con talento matemático de trece a catorce años, participantes del programa Estalmat Islas Baleares, utilizando las plataformas "Hour of Code" y Scratch. La metodología de la sesión empleada buscó potenciar tanto la creatividad como las habilidades analíticas fundamentales en matemáticas. Los resultados destacaron la capacidad de los estudiantes para abordar problemas complejos mediante la descomposición de problemas y la aplicación de la algoritmia. Además, la modificación de juegos en Scratch permitió a los estudiantes aplicar de manera práctica los principios matemáticos y computacionales en un entorno lúdico, estimulando una profundización en el entendimiento matemático y computacional. En conjunto, las actividades fomentaron un enfoque interdisciplinario

que integra la teoría matemática con aplicaciones prácticas, generando un contexto tanto accesible como adecuado para el alumnado que presenta talento matemático.

Palabras clave: talento matemático, pensamiento computacional, creatividad en matemáticas, Scratch, Hour of code.

1. Introducción

La atención a alumnado que presenta talento matemático a través de actividades y recursos adecuados a sus habilidades representa tanto un reto para el profesorado como una oportunidad para fomentar la inclusión de este alumnado. El talento matemático se caracteriza por la capacidad de formular preguntas que exploran más allá de las tareas propuestas, mostrando una notable flexibilidad en cambiar estrategias y estructuras para adaptarse a diferentes problemas (Jaime y Gutiérrez, 2017). Los mismos autores mencionan que este alumnado es capaz de innovar y ajustar técnicas previamente exitosas cuando estas no se adecuan a nuevos problemas, mostrando una notable capacidad para la inversión de procesos mentales en su razonamiento. Además, posee una memoria matemática avanzada que le permite recordar y aplicar principios y operaciones significativas, facilitando la generalización y la abstracción en el razonamiento matemático (Rodríguez-Moldes, 2023). Los alumnos con este talento exhiben una fuerte habilidad para identificar patrones y construir conexiones matemáticas, lo que les permite desarrollar soluciones originales y eficientes (Ramírez, 2013). Considerando estas capacidades, resulta de interés proporcionar a este alumnado oportunidades que permitan desarrollar su talento en propuestas de resolución de problemas de matemáticas.

En este contexto, la integración del pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas, según lo establecido por el Real Decreto 217/2022, subraya la importancia de diseñar situaciones de aprendizaje que fomenten tanto el desarrollo intelectual como el creativo del alumnado con altas capacidades matemáticas, mediante la resolución de problemas que requieran habilidades típicas del pensamiento computacional. De hecho, Wing (2006) introdujo el término Pensamiento Computacional (PC) describiéndolo como un enfoque para la resolución de

problemas, diseño de sistemas y comprensión del comportamiento humano, que se apoya en los fundamentos conceptuales de la informática. Más aún, múltiples estudios abogan por la integración de la programación en la educación temprana, no solo para mejorar la comprensión de las ciencias de la computación sino también para fortalecer habilidades analíticas generales, concretamente, en matemáticas (Grover y Pea, 2013). Este enfoque es especialmente pertinente en el campo del talento matemático, donde, según Ribera (2021), facilita la formulación y solución de problemas matemáticos utilizando herramientas digitales, la organización lógica de los datos y el pensamiento algorítmico. Además, la investigación en el campo de la educación matemática ha evidenciado que la programación por bloques, como la ofrecida por interfaces como Scratch (*https://scratch.mit.edu/*), puede facilitar la comprensión conceptual y fomentar un aprendizaje más profundo de las matemáticas (Brennan & Resnick, 2012). De hecho, existen múltiples actividades de matemáticas en las que se integra el pensamiento computacional para dar respuesta a problemas geométricos (construcción de polígonos) y numéricos (cálculo de divisores de números, construcción de sucesiones…) en interfaces como Scratch o una versión alternativa de este denominada Snap! (Castellà-Carlos, Fernández-Hernández y Sánchez-Farreras, 2023). Estas plataformas, evolución de otras anteriores como Logo (Zapata-Ros, 2015), permiten a los estudiantes visualizar abstractamente y manipular entidades matemáticas, haciendo tangible lo intangible, lo que puede ser beneficioso para aquellos que presentan talento matemático.

Esta propuesta examina una sesión llevada a cabo bajo el programa Estalmat Islas Baleares, enfocado en estudiantes de trece a catorce años con habilidades avanzadas en matemáticas en la que se usa el lenguaje de programación por bloques Scratch. El objetivo es analizar la creatividad que estos estudiantes muestran al modificar juegos programados en un entorno de programación por bloques, los cuales requieren el uso de habilidades en el pensamiento computacional y de saberes básicos de las matemáticas.

2. Metodología

En este estudio se adoptó un enfoque cualitativo para analizar la creatividad de las modificaciones al juego propuesto desde la perspectiva del pensamiento computacional y las habilidades matemáticas en el alumnado que presenta talento matemático. Para evaluar la creatividad de estas modificaciones, se utilizaron métodos de evaluación cualitativos que examinan la originalidad de las creaciones en el contexto del juego, la viabilidad de los diseños propuestos y la capacidad de los estudiantes para aplicar y generalizar principios matemáticos y computacionales en sus programaciones. La evaluación se realizó mediante un estudio detallado de las creaciones individuales de los participantes, recopiladas para un análisis posterior basado en criterios previamente establecidos.

Se realizó una sesión de una hora y media bajo el programa Estalmat Islas Baleares, que atiende a alumnado que presenta talento en matemáticas. Los 15 estudiantes que participaban en este estudio representan una muestra diversa en términos de sus experiencias previas con la programación, aunque todos compartían interés y habilidades en matemáticas, proporcionando así un contexto rico para explorar el desarrollo de habilidades computacionales junto con el aprendizaje matemático avanzado. La parte final de la sesión permitió evaluar cómo los estudiantes utilizan y mejoran sus habilidades de pensamiento computacional a través de la programación por bloques utilizando las plataformas Hour of Code (*https://hourofcode.com/es*) y, posteriormente, Scratch.

2.1 Diseño de la sesión

Durante la sesión se llevaron a cabo dos actividades principales. La primera actividad utilizó la plataforma Hour of Code, donde los estudiantes se enfrentaron a una secuencia de problemas de programación por bloques. Estos retos fueron seleccionados con un rango creciente de dificultad y diseñados para fomentar habilidades críticas como la descomposición de problemas, el reconocimiento de patrones, y la abstracción. Los estudiantes trabajaron individualmente en esta etapa,

lo que permitió una evaluación inicial de sus habilidades y enfoques en la resolución de problemas matemáticos y computacionales. Además, los retos existentes en esta parte facilitan tanto el aprendizaje inicial como la mejora de las habilidades en el caso de que el alumnado haya experimentado con la programación de bloques previamente. Cada tarea de esta actividad fue observada por los docentes, quienes ofrecieron orientación mínima con el interés maximizar la autoexploración y el aprendizaje autónomo de los participantes.

La segunda actividad se centró en el uso de Scratch, una plataforma que permite una mayor libertad creativa en la programación por bloques. En esta parte de la sesión, se planteó un desafío abierto que requería que los estudiantes mejoraran una programación de juego previamente diseñada por los docentes. Este desafío fue concebido para evaluar la creatividad, la capacidad de generalización de los principios matemáticos y computacionales aprendidos, y la habilidad para aplicar estos conceptos en un contexto lúdico y práctico. Los estudiantes debían no solo identificar áreas de mejora en el juego original, sino también implementar modificaciones que aumentaran su complejidad y atractivo. Las modificaciones propuestas fueron luego compartidas y discutidas en grupos, permitiendo la retroalimentación entre pares y la reflexión colectiva sobre las soluciones propuestas. Este enfoque colaborativo buscó potenciar el desarrollo de habilidades de comunicación y crítica constructiva, aspectos esenciales del aprendizaje cooperativo.

1.1.1 Retos iniciales de programación en “Hour of Code”

La plataforma "Hour of Code" (*https://hourofcode.com/es/learn*) representa una iniciativa educativa global que pretende hacer accesible la programación a cualquier persona, independientemente de su experiencia previa en computación (Code.org, 2023). Desde su lanzamiento en 2013, este proyecto ha evolucionado, iniciando con actividades de programación de una hora y expandiéndose a numerosos esfuerzos comunitarios. La plataforma utiliza una variedad de actividades interactivas y videos que introducen los conceptos básicos de la programación con el objetivo de hacerla accesible. El uso predominante de lenguajes de programación por bloques, como

Scratch o Blockly, caracteriza la plataforma. No obstante, frecuentemente se ofrece la posibilidad de visualizar el código en JavaScript, proporcionando una transición hacia lenguajes de programación más tradicionales. Además, se incluyen actividades que emplean Python. Esta plataforma ofrece actividades que integran el pensamiento computacional con el aprendizaje matemático a través de desafíos que combinan la lógica de la programación con principios matemáticos esenciales, como el cálculo y la geometría. Por ejemplo, al programar juegos o simulaciones, los estudiantes emplean conceptos de aritmética, geometría y álgebra para definir comportamientos y resolver problemas específicos, tales como el cálculo de trayectorias o la optimización de recursos.

En la experiencia desarrollada se emplea la secuencia de retos correspondiente al contexto de “Frozen” (*https://studio.code.org/s/frozen/*) dentro de la plataforma “Hour of code”. En ella, el alumnado tiene la oportunidad de crear un paisaje invernal interactivo programando formas planas, como los copos de nieve. Al trabajar en la creación de patrones y figuras geométricas, mientras ayudan a los personajes Anna y Elsa a patinar sobre hielo, los alumnos aplican principios de geometría y medida.
Entre los primeros desafíos de la secuencia se encuentra la creación de polígonos regulares, como el cuadrado. En este reto, el alumnado debe secuenciar adecuadamente las instrucciones para elaborar esta figura mediante desplazamientos y giros (ver Imagen 1). Este tipo de tareas resalta la importancia de aplicar operadores de programación que faciliten la repetición de instrucciones, fomentando el uso eficiente de bucles y estructuras de control en la programación que se introducen en los niveles posteriores.

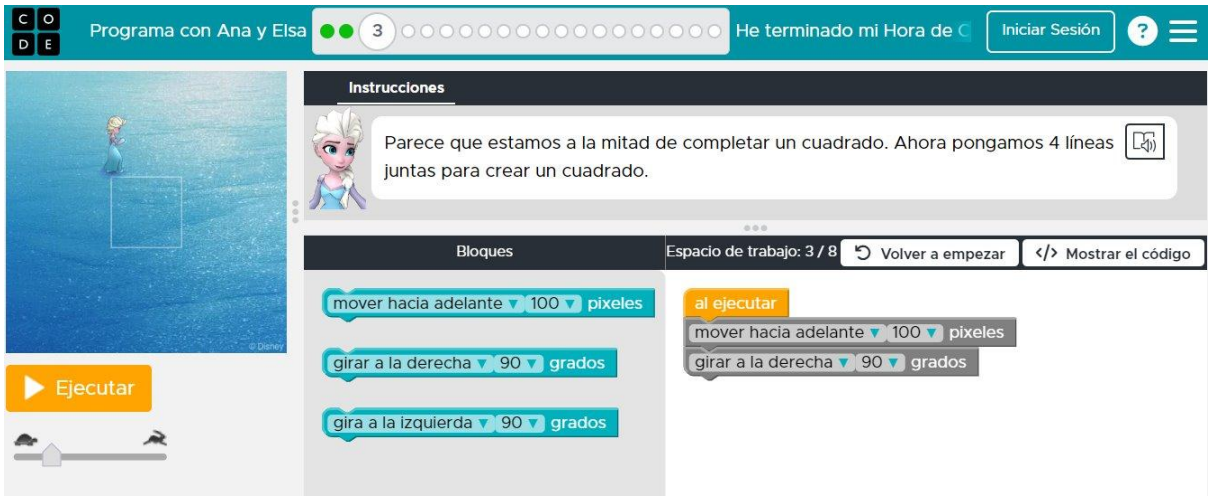


Imagen 1. Reto 3 de la secuencia “Programa con Ana y Elsa”. Tomado de https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/3

Después de trabajar en algunos diseños geométricos básicos en la plataforma, a partir del reto 6 se presentan los primeros problemas abiertos que implican el uso de bloques de control, específicamente bloques de repetición. En esta etapa, se espera que los alumnos utilicen conceptos de iteración y bucles para optimizar y automatizar las soluciones a problemas más complejos (Ver imagen 2).

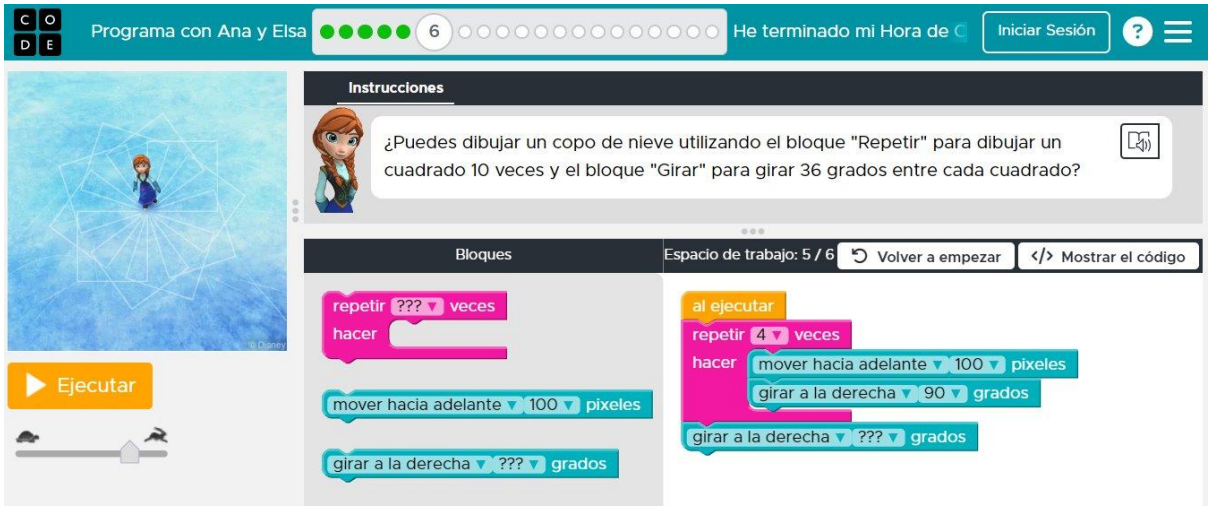


Imagen 2. Reto 6 de la secuencia “Programa con Ana y Elsa”. Tomado de https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/6

Además, se introducen otras formas geométricas planas no regulares, sobre las cuales se pueden aplicar los comandos aprendidos hasta el momento. Estas formas sirven como base para futuros problemas de mayor complejidad que requieren

habilidades de composición y descomposición de figuras geométricas mediante transformaciones geométricas. Este enfoque permite aplicar algoritmos de programación para alterar y combinar formas en nuevas configuraciones.

Imagen 3. Retos 10, 11 y 12 de la secuencia “Programa con Ana y Elsa”. Tomado de https://studio.code.org/s/frozen/

En el penúltimo nivel, el alumnado enfrenta un reto donde debe aplicar el concepto de función en programación; en este caso, un conjunto de líneas de código que juntas generan una forma geométrica plana. Al aplicar rotaciones a esta función, puede crear mosaicos invernales mediante la repetición de la forma generada, explorando así las transformaciones geométricas y la simetría dentro de un contexto visual y práctico (ver Imagen 4).

Imagen 4. Enunciado y solución del reto 19 de “Programa con Ana y Elsa”. Tomado de https://studio.code.org/s/frozen/

En el último nivel, los participantes tienen la oportunidad de desplegar su creatividad utilizando los bloques de código aprendidos durante la secuencia de retos. Este nivel permite que los estudiantes diseñen sus propias creaciones, empleando bloques similares a los utilizados anteriormente, pero introduciendo nuevos parámetros que

les permiten analizar variables de creación y desarrollar patrones visuales creativos y distintivos. Además, la habilidad de generar múltiples secuencias fomenta la iteración y el rediseño, ofreciendo a los estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje la oportunidad de alcanzar el reto final. Esta secuencia de desafíos no solo sirve como punto de partida para la adquisición de habilidades en la programación por bloques, sino que también afianza estas competencias fundamentales.

1.1.2 Modificación de la programación sobre Scratch

Scratch es una plataforma de programación visual desarrollada por el MIT Media Lab, diseñada principalmente para alumnado de 8 a 16 años. Como un lenguaje de programación de alto nivel basado en bloques, Scratch permite a los usuarios crear proyectos interactivos como juegos, animaciones y simulaciones. Como se puede ver en la imagen 5, la interfaz de Scratch es intuitiva y accesible, dividida en áreas para el escenario, la paleta de bloques y el área de codificación, donde los usuarios pueden arrastrar y soltar bloques de código para construir sus programas (Scratch.mit.edu, 2023).

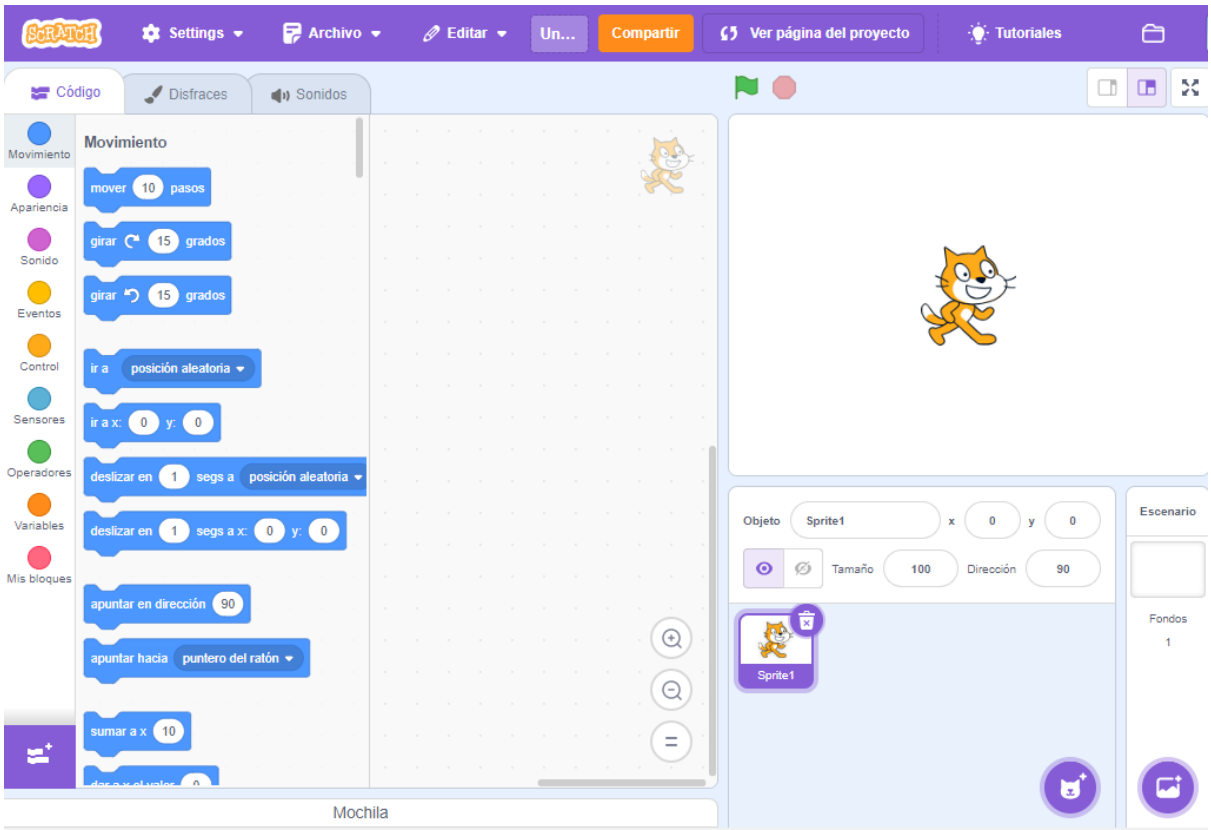


Imagen 5. Configuración inicial en Scratch. Tomado de https://scratch.mit.edu/projects/editor/

En el contexto educativo, especialmente en la enseñanza de matemáticas a través del pensamiento computacional, Scratch ofrece una plataforma para integrar conceptos matemáticos con la programación como variables, operaciones y lógica de control, aplicado en contextos que requieren pensamiento analítico y solución de problemas. A diferencia de "Hour of Code", que proporciona enunciados de actividades de codificación de dificultad creciente de una hora para introducir a los usuarios en la programación, Scratch permite un enfoque más creativo y activo en el que no se incluyen tareas.

En la segunda actividad de la propuesta, los estudiantes se enfrentan a un reto abierto en la plataforma Scratch. La tarea consiste en mejorar el juego “Scratch vol fer classes a Estalmat!” (https://scratch.mit.edu/projects/449316768/) previamente programado, donde deben aplicar y ampliar sus habilidades de pensamiento computacional y conocimientos matemáticos (ver imagen 6).

Imagen 6. Enunciado del juego a modificar. Tomado de https://scratch.mit.edu/projects/449316768/

La actividad está diseñada para estimular la creatividad, alentando a los estudiantes a introducir nuevos elementos o modificar los existentes para mejorar la jugabilidad y el diseño del juego. Durante esta fase, los alumnos exploran conceptos como

variables, lógicas de control, y coordenadas, aplicándolos para realizar cambios significativos que potencien la experiencia del juego. Esta tarea permite evaluar su capacidad para aplicar conocimientos matemáticos en un contexto práctico en el que se promueve el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y pensamiento algorítmico.

En la fase final de la actividad, los estudiantes presentan a sus compañeros y profesores las innovaciones y diseños originales de las modificaciones del juego programado que han creado. Esta fase es también un medio para incitar al análisis y debate sobre las soluciones desarrolladas por los alumnos. Durante esta comunicación entre pares, los participantes detallan las bases de sus elecciones de diseño, incluyendo las técnicas matemáticas aplicadas y los ajustes realizados para variar la complejidad de las modificaciones del juego.

2. Resultados y discusión de la experiencia

En análisis de esta propuesta educativa con alumnado con altas capacidades matemáticas arrojó resultados destacables en términos del fomento de la creatividad, del sentido espacial y de aplicación de habilidades del pensamiento computacional.

2.1 Análisis de los resultados de los retos sobre “Hour of code”

En la secuencia de retos de "Hour of Code", los estudiantes mostraron un crecimiento significativo en su habilidad para aplicar conceptos de pensamiento computacional y matemáticas. En concreto, destaca la eficiencia que representa al alumnado con talento matemático (Ramírez, 2013) con la que respondían a los retos propuestos por la herramienta, reduciendo a media hora el tiempo invertido en su superación. Además, la plataforma incorpora herramientas de apoyo que permiten al alumnado autoevaluar sus programaciones. Por ejemplo, en la Imagen 7 se muestra cómo el personaje da una sugerencia para corregir un error en la definición del giro que debe realizarse.

Imagen 7. Solución incorrecta del nivel 10. Tomado de *https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/10* .

Asimismo, se destaca una funcionalidad de la plataforma que permite visualizar en tiempo real la ejecución del código mediante el resaltado del comando activo; en la imagen 7, se observa que se está ejecutando el primer giro dentro del bucle. Esta característica emula el modo de depuración (*debug mode)* que ofrecen algunos lenguajes de programación, facilitando la identificación y corrección de errores, ya que el programa se ejecuta paso a paso, permitiendo observar el comportamiento del código en tiempo real. Además, facilita el desarrollo del pensamiento computacional en el alumnado dado que favorece la descomposición de problemas, permitiendo encontrar fácilmente los errores cometidos e identificar la causa, y de la creación de algoritmos, observando las posibles iteraciones que se pueden implementar en el proceso de desarrollo y el ajuste de los algoritmos para la mejora de la eficiencia. Además, la plataforma facilita la mejora de la eficacia de los programas mediante mensajes de retroalimentación de los retos superados. En estos últimos relaciona el resultado de la programación con el código de programación en el lenguaje más común de programación, Javascript (ver Imagen 8)

Imagen 8. Solución incompleta del nivel 3. Tomado de https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/3.

Se destaca también la característica que presenta la herramienta para modelizar la circunferencia (aunque la versión programada la denomina como "círculo") representándola como un polígono regular de 360 lados (ver imagen 9). Esta definición permite discutir con el alumnado la imposibilidad de representar los infinitos puntos que conformar una circunferencia real y, por ende, la necesidad de modelizarla a través de polígonos regulares con un elevado número de lados para aproximar su forma.

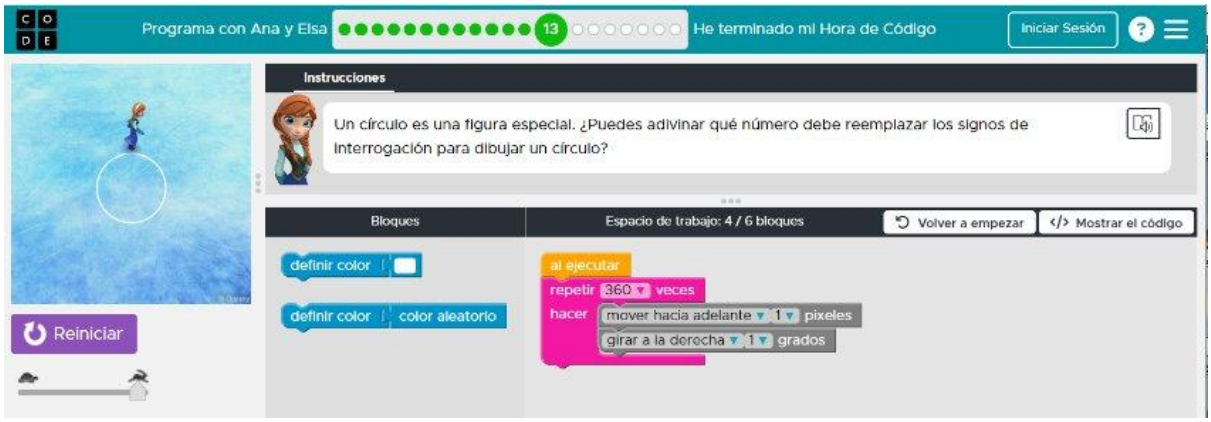


Imagen 9. Solución del reto 13 de "Programa con Ana y Elsa". Tomado de https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/13

A través de esta plataforma, los participantes enfrentaron retos que incrementaron progresivamente en complejidad, comenzando con la programación básica de formas

geométricas regulares como cuadrados, y evolucionando hacia la creación de patrones más complejos y composiciones de figuras geométricas no regulares. Las habilidades de descomposición de problemas y reconocimiento de patrones fueron particularmente notables, ya que los estudiantes aplicaron bucles para automatizar la creación de mosaicos y otros elementos visuales, mostrando una comprensión profunda de las transformaciones geométricas y simetría.

2.2 Análisis de los resultados de las modificaciones del juego en Scratch

En cuanto a la actividad de modificación del juego en Scratch, el alumnado con talento matemático exhibió un alto grado de creatividad e innovación, en línea con lo que indican (Gutiérrez y Jaime, 2017). El reto abierto permitió a los estudiantes aplicar los principios matemáticos y computacionales aprendidos para mejorar un juego existente, introduciendo nuevas funciones y características que aumentaban su complejidad y atractivo.

En un primer momento, el alumnado dio respuesta a la pregunta inicial en la que se solicitaba la programación del movimiento del personaje protagonista del entorno llamado Scratchy. La experiencia del alumnado en otros programas como Minecraft y el interés por realizar un movimiento más rápido del personaje favoreció que eligiera la opción de desplazamiento en las cuatro direcciones (norte, sur, este y oeste) frente a la opción de programación de desplazamiento combinado con giros (horario o antihorario). Destaca el caso del estudiante que realiza una programación del movimiento en la que, al presionar una tecla, el personaje se desplaza ininterrumpidamente hasta llegar al límite de la pantalla, resultando en un juego más dinámico y fluido (ver bloque de la derecha de la imagen 10).

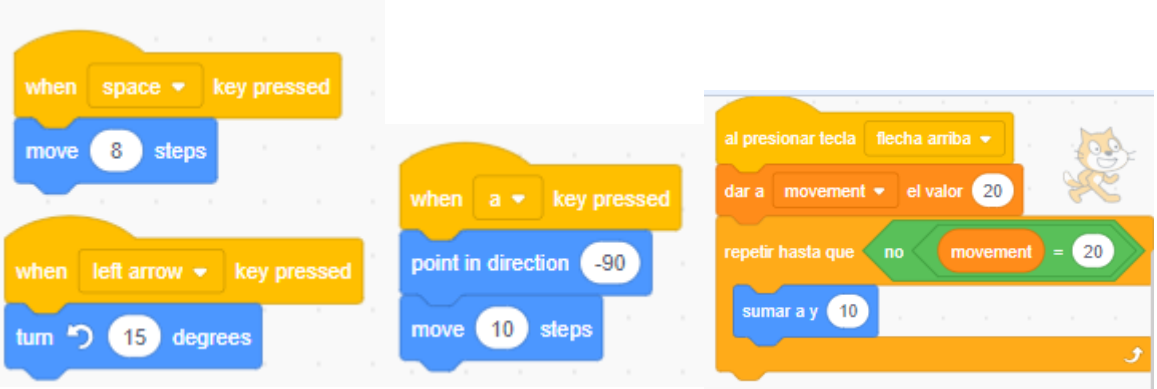


Imagen 10. Tres ejemplos de programaciones del movimiento de Scratchy. Tomado de https://scratch.mit.edu/

Otro aspecto que captó el interés del alumnado fue la programación de elementos aleatorios dentro de la plataforma. Esta aleatoriedad se manifestó en el objetivo del juego, que consistía en capturar el logo del programa Estalmat. Cada vez que el logo era alcanzado por el personaje, aparecía en una nueva posición aleatoria dentro de un plano de juego de 200x120 píxeles y aumentaba el contador de puntos en uno. El alumnado participante en la experiencia ideó diferentes modificaciones que permitieran una subida de puntos más rápida cómo aumentar el tamaño del personaje (facilitando el alcance del logo) o restringir el área donde el logo podía aparecer. Además, implementaron un modo de juego autónomo en el que el personaje se movía automáticamente hacia el logo sin necesidad de intervención manual, añadiendo un elemento de juego independiente.

La creatividad continuó con la introducción de un nuevo personaje antagonista, que disminuía la puntuación de los jugadores cada vez que era tocado. Dependiendo de la programación, este antagonista se movía aleatoriamente o directamente hacia el protagonista, aumentando la dificultad del juego. Las programaciones variaron significativamente entre los estudiantes, presentando desafíos como la reducción de vidas, decremento de puntos alcanzables —pudiendo resultar incluso en puntuaciones negativas— o la duplicación del número de antagonistas tras cada encuentro. Esta última modificación elevó considerablemente la dificultad, convirtiendo el juego en un desafío arduo de superar con una puntuación positiva debido a la creciente presencia de antagonistas, como se ilustra con los cangrejos (antagonistas) de la imagen 11.

Imagen 11. Protagonista rodeado de antagonistas que se dirigen hacía él. Tomado de *https://scratch.mit.edu/*

Este enlace *https://scratch.mit.edu/projects/449504992* conduce a una programación que incluye las innovaciones mencionadas, evidenciando las habilidades y creatividad desplegadas por el alumnado del programa Estalmat en esta actividad.

Durante las presentaciones de sus creaciones, fue evidente que los participantes no solo se enfocaron en la funcionalidad, sino también en la estética y la experiencia del usuario, aspectos fundamentales en el desarrollo de juegos. La evaluación por pares facilitó la mejora conjunta de las versiones diseñadas y la incorporación de nuevos elementos en las programaciones de los juegos.

3. Conclusiones

El presente estudio ha explorado cómo la integración del pensamiento computacional y las matemáticas a través de plataformas como "Hour of Code" y Scratch puede enriquecer el aprendizaje en estudiantes con altas capacidades matemáticas a través de una metodología que enfatiza tanto la programación como la resolución de problemas matemáticos.

La capacidad de descomponer problemas, una competencia clave del pensamiento computacional, se reflejó en cómo los estudiantes abordaron y resolvieron los retos matemáticos propuestos sobre “Hour of code”, como la creación y transformación de figuras geométricas y el manejo de variables y estructuras de control para manipular estos objetos dentro de un espacio definido. Este tipo de habilidades son fundamentales para el desarrollo de un pensamiento matemático más profundo y aplicado, permitiendo a los estudiantes promover su pensamiento algorítmico. El acompañamiento que ofrece esta plataforma puede ser de utilidad tanto para el alumnado que conoce previamente la programación por bloques como para el alumnado que presenta más dificultades, generando un recurso accesible para todos.

La segunda parte del estudio, centrada en la modificación de juegos en Scratch, ofreció al alumnado la oportunidad de aplicar sus conocimientos matemáticos en un entorno más libre y creativo. Este aspecto de la programación fomenta una comprensión más rica de conceptos abstractos matemáticos al requerir su implementación en bloques de código que controlan el comportamiento dinámico dentro del juego. De esta forma, el alumnado pudo explorar conceptos avanzados como la aleatoriedad y las probabilidades, la optimización a través de algoritmos, y la simulación de escenarios que requerían un entendimiento matemático sólido para su configuración y control. La capacidad de integrar estos conceptos en aplicaciones prácticas muestra el potencial de la programación por bloques para enseñar matemáticas de una manera comprensible y atractiva para los estudiantes.

Estas experiencias inclusivas destacan la importancia de los entornos de aprendizaje que no solo desafían a los estudiantes a aprender nuevas habilidades técnicas, sino que también les permiten aplicar estas habilidades en la resolución de problemas en contextos interdisciplinares. La programación no es solo una habilidad técnica en estos contextos, sino una herramienta para explorar y expandir su comprensión matemática, fomentando un ciclo de aprendizaje donde la teoría y la aplicación se enriquecen mutuamente. En conclusión, la integración efectiva de la programación en la educación matemática ofrece un medio accesible para desarrollar habilidades de pensamiento computacional mientras se fortalece el entendimiento matemático.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto “Aproximación multidimensional a la atención a estudiantes con alta capacidad matemática” (PID2020-117395RB-I00), financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y con la colaboración del programa Estalmat Illes Balears.

Referencias

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Vancouver, Canada. http://scratched.gse.harvard.edu/ct/files/AERA2012.pdf

Castellà-Carlos, E., Fernández-Hernández, R., y Sánchez-Farreras, A. (2023). Pensamiento computacional con SNAP!. En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1305-1323). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3

Code.org. (2023). *What is the Hour of Code?*. Recuperado de https://support.code.org/hc/en-us/articles/203524386-What-is-the-Hour-of-Code

Grover, S., y Pea, R. (2013). Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. *Educational Researcher, 42*(1), 38-43. http://dx.doi.org/10.3102/0013189X12463051

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM

Ramírez-Uclés, R. (2013). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Granada: Universidad de Granada, 2013. 410 p. [http://hdl.handle.net/10481/23889]

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022, 1–198. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Ribera, J.M. (2021). Estrategias para la resolución de problemas de matemáticas a través del pensamiento computacional. En F. Navaridas y E. Raya (eds.) *Formación docente y desarrollo de competencias en el profesorado: hacia un modelo para la calidad educativa* (pp. 123-141). ISBN 978-84-9987-212-4.

Rodríguez-Moldes, C. (2023). Unus Pro Omnibus (Et Omnia Pro Uno). En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 190-211). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3

Scratch.mit.edu. (2023). *About Scratch*. Recuperado de https://scratch.mit.edu/about

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking, *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35. http://dx.doi.org/10.1145/1118178.1118215

Zapata-Ros, M. (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, (46). Recuperado de https://revistas.um.es/red/article/view/240321

Actividades para el aprendizaje de la demostración basadas en los ejemplos genéricos

Georgina Cerqueda Santacreu
gcerqueda@uda.ad
Universitat d'Andorra

Yolanda Colom Torrens
ycolom@uda.ad
Universitat d'Andorra

Jordi Deulofeu Piquet
jordi.deulofeu@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Procesos / Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Secundaria y bachillerato

RESUMEN

El trabajo que presentamos se centra en mostrar como los ejemplos genéricos permiten introducir las demostraciones en Secundaria. Proponemos una secuencia de actividades que tiene por objetivo mostrar la limitación de la evidencia empírica para demostrar, crear la necesidad de producir demostraciones generales y exponer los ejemplos genéricos como un modo accesible de escribir demostraciones. Nos centramos concretamente en una de las actividades en la que se pide demostrar una propiedad numérica a partir de una representación pictórica sobre la cual realizar acciones. Mostramos algunas resoluciones representativas y errores comunes que se han producido por el alumnado.

Palabras clave: demostración, ejemplo genérico, representación visual.

1. Introducción

El nuevo programa de matemáticas de secundaria (Govern d'Andorra, 2023) incluye la competencia "Aplicar el razonamiento matemático para conjeturar y para demostrar", reparando en el uso del razonamiento deductivo que permite encadenar razonamientos lógicos para realizar demostraciones que validen propiedades. El programa expone los distintos lenguajes permitidos para realizar las demostraciones, siendo el álgebra uno de ellos, pero incluyendo las demostraciones visuales y narrativas siempre que muestren generalidad. La inclusión de esta competencia concuerda con las recomendaciones Internacionales, como las del National Council of Teachers of Matematics (NCTM, 2000), y con el consenso de la comunidad investigadora, que considera que desarrollar el sentido de la demostración tiene que ser uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática y reclama desde hace más de tres décadas que la demostración tenga un papel más importante en los planes de estudio (A. J. Stylianides et al., 2016). Por otro lado, el programa describe que el objetivo de realizar una demostración en clase ha de ser la mejor comprensión de los conceptos y hechos matemáticos que aparecen en ella. De hecho, esta función de la demostración es considerada como la más importante desde el punto de vista didáctico, ya que esta función permite profundizar en la comprensión de conceptos de manera que se mejore el aprendizaje matemático del alumnado (Hanna, 2000; Rocha, 2019).

A pesar de la importancia que le otorgan los investigadores y las recomendaciones de los currículos, la presencia de la demostración en las aulas de educación básica es mínima (G. J. Stylianides et al., 2017). Uno de los principales desafíos que enfrentan los profesores de matemáticas de secundaria es cambiar sus creencias sobre las demostraciones, considerándolas adecuadas para todos sus estudiantes y, por lo tanto, integrándolas de manera natural en sus actividades de clase (Knuth, 2002). Actualmente, los estudios indican que los estudiantes suelen tener una concepción errónea del concepto de prueba (G. J. Stylianides et al., 2017). En particular, una de las principales dificultades que tienen los estudiantes a la hora de construir demostraciones es una tendencia a apoyarse en razonamientos empíricos,

considerando que un conjunto de ejemplos es suficiente para establecer la validez de una propiedad matemática y los utilizan tanto para considerar que un argumento empírico es una demostración como para producirla (Healy y Hoyles, 2000; Reid y Knipping, 2010; G. J. Stylianides et al., 2017; Zaslavsky et al., 2016). El trabajo con ejemplos, sin embargo, puede facilitar la comprensión, la exploración y la demostración de conjeturas. En particular, los ejemplos genéricos se presentan como recursos que podrían mejorar la comprensión de los alumnos al reducir el formalismo, el lenguaje simbólico y la generalidad total (Dreyfus et al., 2012; Leron i Zaslavsky, 2014; Yopp i Ely, 2016).

2. Referentes teóricos

2.1 Definición de demostración para la matemática escolar

Una demostración es sinónimo de un razonamiento deductivo, es decir, es un proceso en el que nueva información se deriva de un conjunto de premisas a partir de inferencias deductivas, que son conclusiones que se extraen de premisas de manera que hay motivos racionales para creer que las premisas requieren la conclusión y que es imposible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa (Harel y Weber, 2020). Esta deducción se utiliza para verificar, explicar, sistematizar y comunicar ideas matemáticas. La concepción del significado de demostración que tenga un docente influye en como lo aplica en sus clases, de modo que una concepción muy formal o rigurosa puede implicar que el docente considere que hacer demostraciones es una actividad reservada a los grados educativos más altos (Knuth, 2002). Por este motivo, es necesario disponer de una demostración que se adapte a la educación matemática más elemental (A. J. Stylianides, 2007). Con este objetivo, A. J. Stylianides (2007, pàg 291) define demostración como un argumento matemático (secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de un enunciado matemático) de manera que utiliza propiedades aceptadas por la comunidad de la clase que son ciertas y no necesitan justificación; utiliza métodos de razonamiento válidos y conocidos (o dentro de su alcance) en la comunidad de la clase; y se comunica con formas de expresión o representación que son apropiadas o conocidas (o dentro de su alcance) por la comunidad de la clase. Gracias al hecho de que las

propiedades, razonamientos y representaciones deben ser aceptados y conocidos por la comunidad de la clase, esta definición es suficientemente flexible para ser consistente en todos los niveles educativos y permite incluir actividades de demostración desde los primeros cursos de la educación matemática (A. J. Stylianides et al., 2016). De este modo, un argumento puede ser válido como demostración en un curso, pero no en otro. Por otro lado, también se tiene en cuenta el punto de vista de la disciplina matemática, ya que solo se consideran válidos aquellos razonamientos o lenguajes que también son válidos por la comunidad matemática. Es el docente quien, con un rol activo, actúa en representación de la comunidad matemática y ayuda al alumno a adquirir los criterios para reconocer que argumentos son aceptados y cuales no pueden serlo. En particular, no se pueden aceptar como válidos los razonamientos empíricos, puesto que extraen conclusiones a partir de evidencias incompletas.

2.2 Ejemplos genéricos para hacer demostraciones

Podemos definir el ejemplo genérico como el razonamiento que se realiza sobre un ejemplo concreto que se puede reproducir sobre cualquier otro ejemplo de la clase. El término ejemplo genérico, según Mason y Pimm (1984), se refiere a un ejemplo que destaca su función como portador de generalidad, resaltando características generales de la clase que representa al acentuar o ignorar algunas propiedades. Este tipo de ejemplo no se centra en características específicas del caso presentado, sino en aquellas que son comunes a toda la clase. Balacheff (1988) lo relaciona con esquemas de justificación pragmáticos, que se basan en realizar operaciones sobre un ejemplo representativo para explicar las razones de la verdad de una propiedad. Por otro lado, Rowland (1998) distingue entre razonamiento empírico y ejemplo genérico, indicando que este último proporciona información sobre por qué una proposición es cierta para cualquier ejemplo, no solo para el caso específico presentado. La clave del ejemplo genérico radica en cómo se presenta la verificación, resaltando el proceso de justificación más que la mera demostración de la propiedad.

Reid y Vallejo (2018) proponen criterios para evaluar demostraciones genéricas, considerando factores sociales y psicológicos. Estos criterios incluyen la necesidad

de generar más ejemplos para confirmar la generalidad, y que el ejemplo genérico explique los fundamentos de la propiedad en cuestión. Para ser considerada una demostración utilizando ejemplo genérico, debe demostrar consciencia de generalidad y razonamiento matemático, evitando basarse únicamente en evidencia empírica. El ejemplo genérico debe mostrar las razones matemáticas que permiten su aplicación a otros casos. Estas evidencias pueden presentarse en textos escritos u otras representaciones. Reid y Vallejo (2018) enfatizan la importancia de que tanto profesores como alumnos comprendan las evidencias necesarias para producir una demostración adecuada.

2.3 Demostraciones de acción representadas visualmente

Las demostraciones que emplean ejemplos concretos también se conocen como demostraciones de acción, un término popularizado por Semadeni (1984). Estas demostraciones se caracterizan por realizar una acción concreta sobre una representación de un ejemplo, que no sea ni demasiado simple ni demasiado complejo. La acción realizada sobre la representación se replica en otro ejemplo representado de la misma manera y siguiendo la misma estructura, hasta que no sea necesario generar más ejemplos. Se observa entonces que la acción puede reproducirse en cualquier otro ejemplo, o se determina en qué clase de objetos se puede replicar. Así, la demostración de acción es el resultado de internalizar las acciones de la demostración más que una inferencia lógica, aunque en las acciones realizadas implican un razonamiento asociado con argumentos correctos y las acciones son concreciones de demostraciones formales que deben poder realizarse en todos los casos del enunciado. De modo similar, Wittmann (2021) denomina demostraciones operativas a este tipo de demostraciones y las caracteriza por usar una representación con la cual el alumnado de cierto nivel está familiarizado. Tanto Wittman como Sedameni consideran válidas este tipo de demostraciones, puesto que las operaciones se pueden realizar independientemente del objeto representado y esto les da generalidad.

Reid y Knipping (2010) clasifican las demostraciones genéricas en función del tipo de ejemplo que usan: numérico, concreto, pictórico o situacional. Los autores denominan

demostraciones visuales a las demostraciones que usan como representación un ejemplo pictórico. En estos casos, las imágenes se usan de forma directa y las acciones que se realizan sobre ellas son imaginadas mentalmente. Es decir, para entender la demostración visual a partir de las imágenes hay que realizar las acciones concretas mentalmente.

3. Estudio realizado

La comunicación que se expone forma parte de una investigación llevada a cabo en el contexto de una tesis doctoral cuyo propósito es evaluar el impacto de los ejemplos genéricos en la habilidad para generar demostraciones en estudiantes de ESO y bachillerato. Para ello, desarrollamos y aplicamos una prueba de evaluación diagnóstica, una secuencia de actividades de aprendizaje centradas en demostraciones basadas en ejemplos genéricos y una evaluación final. La investigación se ha realizado con alumnado de secundaria y bachillerato. En ninguno de los dos niveles educativos se habían realizado antes actividades de demostración. El alumnado de secundaria había realizado con anterioridad este mismo curso una unidad didáctica de lenguaje algebraico.

Los alumnos han realizado individualmente las pruebas inicial y final, y han trabajo por parejas en la realización de las actividades de aprendizaje. Presentamos aquí la secuencia de actividades y detallamos una de ellas, mostrando producciones representativas realizadas por los alumnos.

3.1 Secuencia de actividades

Basándonos en los objetivos de la investigación y las dificultades encontradas en la revisión bibliográfica, hemos desarrollado una serie de actividades con el propósito de mostrar a los estudiantes las limitaciones de la verificación empírica y la importancia de construir demostraciones generales.

La primera actividad presenta tres apartados en que hay que comprobar con ejemplos si una conjetura se cumple o no. Las tres conjeturas son falsas y se presentan de manera que hay una progresión en la dificultad de encontrar un contraejemplo,

finalizando con una propiedad que tienen el primer contraejemplo en un número de orden 10^{26} (ver imagen 1). Este último apartado se ha adaptado de The 'Monstrous Counterexample' illustration de A. J. Stylianides (2009) y tiene por objetivo que los estudiantes comprendan la importancia de aprender métodos de validación generales que aseguren la validez de una propiedad sin depender exclusivamente de evidencia empírica, la cual se manifiesta insuficiente.

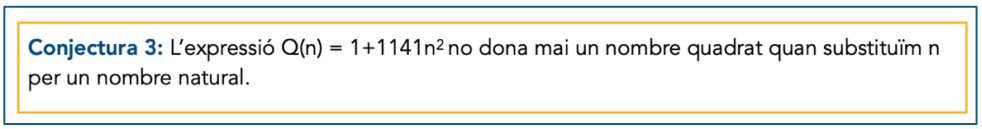


Imagen 1. Conjetura falsa para mostrar la limitación de la evidencia empírica

Una vez generada la necesidad de disponer de una validación general, se presenta al alumnado una definición de demostración adaptando la definición de A. J. Stylianides (2017) y haciendo hincapié en las funciones de la demostración. Se describe la demostración como un razonamiento con las siguientes características:

1. Es un argumento deductivo: cada enunciado de la demostración ha de estar deducido lógicamente de los enunciados anteriores;
2. Sirve para convencerte a ti, a un compañero y a una persona escéptica de la veracidad de la propiedad;
3. Ayuda a comprender y explica por qué el enunciado es cierto;
4. Tiene que utilizar ideas y conceptos que nuestra clase ya sabe o puede entender;
5. Se ha de presentar claramente, utilizando el lenguaje y las representaciones adecuadas.

A continuación, se presenta el ejemplo genérico como un método particular de demostrar. Así, los ejemplos genéricos son:

1. Son demostraciones que se realizan sobre un ejemplo concreto;
2. Puedes usar el ejemplo, pero sin usar las características específicas del número escogido. Te ha de servir para realizar un razonamiento general;
3. Has de explicar los motivos por los cuales tu razonamiento se puede aplicar a cualquier otro ejemplo;

4. El ejemplo no puede ser muy grande ni muy pequeño;
5. La demostración está formada por el ejemplo y el razonamiento.

3.1 Actividad de demostración con ejemplos genéricos

Las actividades de demostración propuestas, basadas en ejemplos genéricos, requieren que los estudiantes demuestren una serie de propiedades numéricas relacionadas con la divisibilidad. El nivel de ayuda proporcionada disminuye gradualmente a medida que avanzan en las actividades, empezando con una actividad en que se presentan desordenadamente los pasos de una demostración desordenada y hay que ordenarlos. En todas las actividades, se pide que se expliquen los motivos por los cuales la propiedad es cierta y porqué su razonamiento es aplicable a cualquier número, con el objetivo de que muestren las evidencias de razonamiento y generalidad requeridas para poder considerar válida una demostración genérica.

Mostramos en esta comunicación la cuarta actividad, cuyo propósito es demostrar que el cuadrado de un número par es divisible por cuatro, y que el cuadrado de un número impar deja un residuo de 1 al dividirse por cuatro, utilizando una representación gráfica que puede generalizarse (ver Imagen 2).

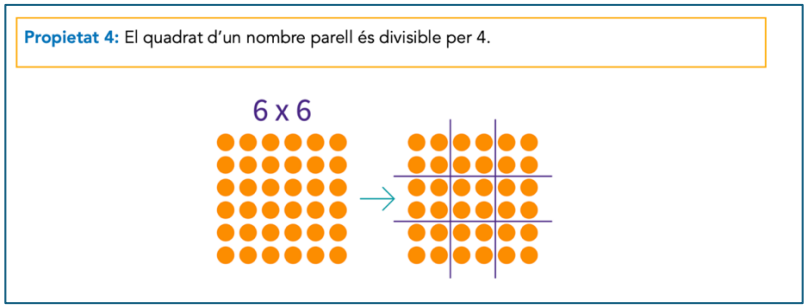


Imagen 2. Propiedad a demostrar y representación visual

A partir de esta imagen, se pide al alumnado que reproduzca la representación gráfica con otros valores y que interprete numéricamente la acción representada en la imagen, para posteriormente redactar una demostración.

4. Resultados de la experiencia en el aula

Presentamos en este apartado algunas de las producciones del alumnado que son representativas de los razonamientos utilizados y exponemos los errores más comunes.

4.1 Interpretación de la visualización y demostración de la propiedad

Prácticamente todos los alumnos son capaces de entender la visualización y reproducirla sobre otro ejemplo. La gran mayoría de ellos, además, pueden relacionarla con una expresión numérica de la operación (ver Imagen 3).

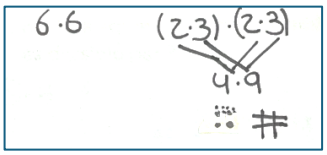
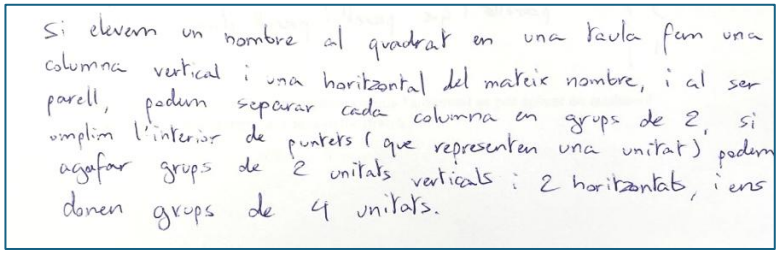


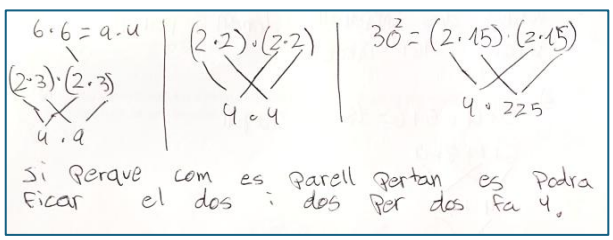
Imagen 3. Expresión numérica de la representación visual

A partir de aquí, encontramos principalmente tres tipos de intentos de demostración de la propiedad: la demostración algebraica elevando al cuadrado 2n, el razonamiento que usa la representación gráfica como soporte genérico para explicar cómo construimos los grupos de cuatro que aseguran la divisibilidad (Imagen 4) y el razonamiento basado en los ejemplos genéricos numéricos, mostrando la multiplicación del factor 2 de cada número (Imagen 5).


Si elevem un nombre al quadrat en una taula fem una columna vertical i una horitzontal del mateix nombre, i al ser parell, podem separar cada columna en grups de 2, si omplim l'interior de punters (que representen una unitat) podem agafar grups de 2 unitats verticals i 2 horitzontals, i ens donen grups de 4 unitats.

Traducción del texto: Si elevamos un numero al cuadrado en una tabla hacemos una columna vertical y una horizontal del mismo número y al ser par, podemos separar cada columna en grupos de 2, si llenamos el interior de puntos (que representan una unidad) podemos coger grupos de 2 unidades verticales y 2 horizontales y nos dan grupos de 4 unidades.

Imagen 4. Razonamiento basado en la descripción de la representación visual

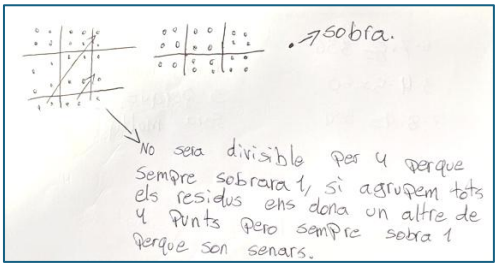


Traducción del texto: Si porque como es par por lo tanto se podrá poner el dos y dos por dos da 4.

Imagen 5. Razonamiento basado en la multiplicación del factor 2 de cada numero

4.2 Demostración de la segunda propiedad

Para finalizar la actividad se pide demostrar que el cuadrado de un numero impar deja residuo uno al ser dividido por cuatro, para poder observar si utilizan un razonamiento análogo al propuesto en la representación visual. En la Imagen 6 se muestra una demostración producida por un alumno, en la que repite sobre una imagen de un cuadrado impar el procedimiento realizado y completa las acciones para mostrar que el residuo será uno.



Traducción del texto: No será divisible por 4 porque siempre sobrará 1, si agrupamos todos los residuos nos da otro de 4 puntos pero siempre sobra 1 porque son impares.

Imagen 6. Demostración de acción producida por un alumno de tercero de secundaria

4.3 El uso del álgebra

Aunque una vez realizada la demostración genérica se pide utilizar álgebra para demostrar que el cuadrado de un número par es divisible por cuatro, solo hay tres alumnos de secundaria que también usan el lenguaje algebraico para intentar demostrar que el cuadrado de un numero impar tiene residuo uno al ser dividido por cuatro. En cambio, los alumnos de bachillerato que intentan hacer una demostración algebraica son aproximadamente dos quintas partes de la muestra.

En general, los alumnos que son capaces de expresar un numero impar como 2n+1 o 2n-1 son también capaces de encontrar la expresión desarrollada de su cuadrado, lo que produce de forma evidente una demostración de que el cuadrado de un numero impar es impar y, más concretamente, tiene residuo uno al ser dividido por 4. Aun así, ninguna de estas demostraciones algebraicas es explicativa, en el sentido de que no muestra las razones por las cuales la propiedad es cierta. Por otro lado, los alumnos que la realizan tanto una demostración algebraica como una representación simbólica de la propiedad no conectan las dos representaciones. En las imágenes siguientes

se muestran dos ejemplos de producciones de demostraciones algebraicas realizadas por alumnos de bachillerato.

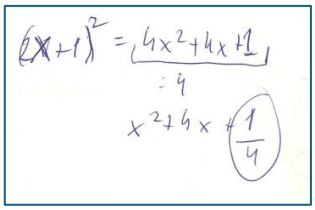


Imagen 7. Propuesta de demostración algebraica de un alumno de bachillerato

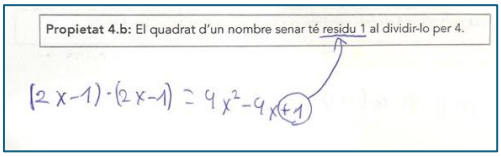


Imagen 8. Propuesta de demostración algebraica de un alumno de bachillerato

4.4 Algunos errores comunes

4.4.1 Representaciones gráficas no generalizables

Uno de los errores más frecuentes en el intento de demostrar que el cuadrado de un impar siempre deja residuo uno cuando se divide por cuatro es la realización de representaciones visuales que no son generalizables. Es decir, los alumnos representan el cuadrado de un número impar con una cuadricula de puntos, pero la acción que realizan algunos de ellos sobre esta cuadricula para representar las agrupaciones de cuatro puntos no sigue una estructura que se pueda replicar en cualquier otro ejemplo. Se muestra un ejemplo en la Imagen 9. Por este motivo, ninguno de estos intentos de demostración consigue generar una demostración aceptable, pues no muestra evidencia de un razonamiento generalizable. Estas representaciones no difieren de una verificación empírica de la propiedad en forma numérica.

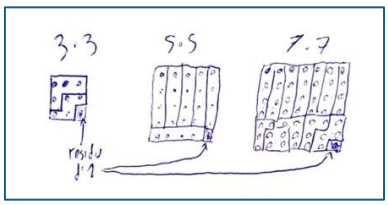
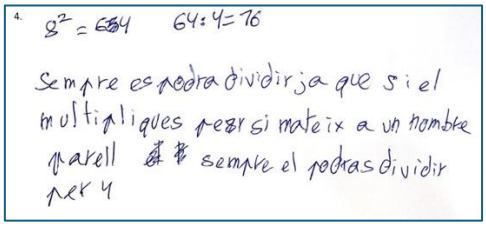


Imagen 9. Acción de dividir en grupos de 4 no generalizable a cualquier valor

4.4.2 Tautologías

Otro de los errores que detectamos relacionado con la estructura y definición de demostración es el uso de las tautologías. Algunos alumnos redactan afirmaciones para acompañar ejemplos o representaciones, pero estas afirmaciones solo repiten la propiedad y no ofrecen ningún argumento para justificarla. Se muestra un ejemplo en la imagen siguiente.



Traducción del texto: Siempre se podrá dividir ya que si lo multiplicas por sí mismo a un número par siempre podrás dividir por 4.

Imagen 10. Tautología en un intento de demostración

4.4.3 Concepciones erróneas sobre conceptos de divisibilidad

Entre los alumnos que utilizan el álgebra para demostrar la propiedad de los números impares, encontramos varios alumnos que expresan algebraicamente los números impares como 3x o 5x, en contraposición a los números pares que han sido expresados como 2x. Esto muestra una concepción errónea de los números impares y de su factorización, que se produce incluso en bachillerato. Solo dos de los alumnos que intentan un razonamiento de este tipo son capaces de expresar de una forma aceptable que en la factorización de un numero impar no hay ningún factor igual a 2, lo que les permite demostrar que el cuadrado del número no será divisible por cuatro.

También detectamos errores en el concepto de residuo, como el hecho de que la división de un numero impar por cuatro tenga que tener automáticamente residuo uno y no se justifique porque no puede ser tres en este caso.

5. Consideraciones finales

En el desarrollo de la actividad, gran parte del alumnado ha sido capaz de producir razonamientos correctos para demostrar que el cuadrado de un numero par es divisible por cuatro y que el cuadrado de un numero impar es impar, siendo menos los alumnos que consiguen explicar porque en el caso impar el residuo de la división

por cuatro es uno. Aunque estos razonamientos sean correctos y se intenten expresar de manera general, en muchos casos su comunicación es incompleta. Los alumnos emplean propiedades ciertas y generales o realizan acciones generalizables, pero no redactan una demostración deductiva encadenando conclusiones y es el lector quien tiene que rellenar los huecos del razonamiento. En relación a la definición de demostración, también encontramos alumnos que siguen utilizando la verificación empírica o que no ofrecen ningún argumento.

Por otro lado, observamos que en tercero de secundaria el alumnado aún no utiliza el álgebra si no se le solicita hacerlo. Sus tentativas de demostración, aunque más incompletas y menos formales, incluyen más razonamiento e intentan ser más explicativas. Es decir, en general, los intentos de demostración producidos por el alumnado de secundaria tratan de explicar las razones por las cuales se cumple la propiedad, a diferencia de las demostraciones algebraicas producidas por el alumnado de bachillerato. Se observó esta diferencia en las producciones presentadas en las imágenes 5 y 6 en contraste con las imágenes 7 y 8. Esta observación está en línea con los hallazgos de Iversen (2022), quien determinó que estudiantes de 12-13 años, un curso menos que los participantes en nuestro estudio, muestran preferencia por las argumentaciones que incorporan un ejemplo y un texto explicativo.

Los ejemplos genéricos y en particular las demostraciones visuales genéricas pueden proporcionar un soporte para desarrollar estos razonamientos explicativos, de manera que se promueva el aprendizaje de las ideas matemáticas subyacentes en la demostración, que tienen que ser el objetivo principal para incluir demostraciones en las clases de matemáticas de secundaria (Hanna, 2000; Rocha, 2019). Por este motivo, consideramos que hay que incluir actividades de este tipo desde los primeros cursos. Estas recomendaciones coinciden con las de Zaslavsky et al. (2019), que proponen el trabajo efectivo con los ejemplos para el aprendizaje de las demostraciones y afirman que la selección y presentación acurada de ejemplos tiene potencial como herramienta pedagógica para crear actividades de demostración.

Referencias

Dreyfus, T., Nardi, E., y Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 191–213). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_8

Govern d'Andorra. (2023). *Programa de matemàtiques de segona ensenyança de l'Escola Andorrana - Decret del 12-7-2023 de publicació del programa de matemàtiques de segona ensenyança de l'Escola Andorrana*. Àrea d'Ordenament Curricular - Ministeri d'educació. https://www.educacio.ad/images/stories/estudis/2aEnsenyanca/10_Programa_Matematiques_2a_EA.pdf

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Harel, G., y Weber, K. (2020). *Deductive Reasoning in Mathematics Education BT - Encyclopedia of Mathematics Education* (S. Lerman, Ed.; pp. 183–190). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_43

Iversen, S. (2022). Seventh-grade students' perceptions of qualities in a mathematical argument. En Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)

Knuth, E. (2002). Proof as a Tool for Learning Mathematics. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *95*(7), 486-490. https://doi.org/10.5951/mt.95.7.0486

Leron, U., y Zaslavsky, O. (2014). Generic Proving: Reflections on Scope and Method. En M. Pitici (Ed.), *The Best Writing on Mathematics 2014* (pp. 198–215). Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400865307-017

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Reid, D. A., y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Brill. https://doi.org/10.1163/9789460912467

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *377*(2140), 20180045. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. J. (2009). Breaking the Equation ' Empirical Argument = Proof '. *Mathematics Teaching*, *213*, 9–14.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 315–351). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266). NCTM.

Wittmann, E. C. (2021). Operative Proofs in School Mathematics and Elementary Mathematics. En E. C. Wittmann (Ed.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science* (pp. 223–238). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_11

Yopp, D. A., y Ely, R. (2016). When does an argument use a generic example? *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 37–53. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9633-z

Zaslavsky, O., Aricha-Metzer, I., Thoms, M., Sabouri, P., y Brulhardt, A. (2016). Generic use of examples for proving. En NCTM Research Conference.

Propuesta para desarrollar el Pensamiento Estadístico, para toda la ESO

Xavier Vilella Miró
xvilella@xtec.cat
Grup Vilatzara / Institut de Ciències de l'Educació - Universitat Autònoma de Barcelona (ICE-UAB)

Jaume Serra Nogués
jserra12@xtec.cat
Grup Vilatzara / Institut de Ciències de l'Educació - Universitat Autònoma de Barcelona (ICE-UAB)

Núcleo temático: Procesos - Conexiones

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

El Seminario de Investigación e Innovación en Educación Matemática del ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona, el Grup Vilatzara, acaba de publicar (condiciones Creative Commons) una propuesta de Estadística compuesta por actividades para cada curso de la ESO. Se puede acceder a ella en:
https://sites.google.com/xtec.cat/gv-lemedp/inici

El propósito de esta publicación es ofrecer al profesorado de Matemáticas de la ESO un conjunto de actividades ordenadas desde 1º a 4º, que ponen el acento no tanto en los parámetros estadísticos y su uso para el cálculo, como en el desarrollo del pensamiento estadístico. La comprensión de los instrumentos estadísticos permite, ante cada situación, decidir cuál de ellos utilizamos, y cómo hacerlo, conociendo sus limitaciones.

Estas actividades han sido testadas en diferentes centros y por diferentes profesores y profesoras, y han mostrado ser útiles para ese fin.

Palabras clave: Estadística, Modelización, Aprendizaje significativo, Innovación.

1. Descripción de la propuesta

Cuando afrontamos situaciones deterministas, lo hacemos con una actitud que ha de ser algo distinta frente a situaciones de incertidumbre. Conviene empezar por aceptar esta incertidumbre, comprender que quizás las conclusiones a las que lleguemos no tendrán el 100% de certeza, de verdad (Sol y Vilella, 2017).

Cada actividad consta de dos partes: la primera, dirigida al profesorado, es una guía didáctica para su aplicación en el aula; la segunda es la actividad en un formato listo para presentarla al alumnado, inspirado en Fisher y Vince (1988).

En la guía del profesor/a se puede encontrar:

- Curso y nº de orden de la actividad
- Descripción y objetivos: incluye los parámetros estadísticos que se trabajan en la actividad
- Gestión de aula. Sugerencias respecto a:
- la presentación al alumnado;
    - el agrupamiento del alumnado (individual o por parejas, pequeño grupo, gran debate y conclusiones…);
    - la dinámica de enseñanza (secuencia pasos aconsejables, momento para lanzar un nuevo reto, puntos de parada y reflexión, etc.;
    - la gestión del tiempo;
    - posibles dificultades que se han observado en su aplicación;
    - sugerencias sobre buenas preguntas a realizar.

  Evidentemente, no tiene por qué aparecer todo este listado de sugerencias en la guía de cada actividad.
- Material propuesto para la actividad.
- Formas de pensar la Estadística que se desarrollan en esta actividad: a partir de la propuesta de secuencia de aprendizaje del Grup Vilatzara (Sol et al., 2019):
    1. **Descripción**
    2. **Interpretación y argumentación**

3. **Comparación**
4. **Interrelación entre variables**
5. **Modelización**

- Principales puntos de aprendizaje. Retos, preguntas relevantes, variables ocultas. Observaciones interesantes para su evaluación.
- Ampliación:
- Conexiones intramatemáticas e interdisciplinares
- Posibles actividades de ampliación

Al final de las actividades de cada nivel de la ESO, hay una propuesta de **Proyecto Matemático,** que puede servir como núcleo, si se desea, de una Situación de Aprendizaje.

2. Las cinco formas de pensar en el pensamiento estadístico

Basándonos en Graham (2006), podemos reconocer cinco formas de pensar en el pensamiento estadístico, con las que establecemos la secuencia de aprendizaje:

3 La **descripción** de un gráfico: con palabras, números, imágenes, herramientas digitales.

4 La **interpretación** y la argumentación.

5 La **comparación**: usando la medida, comparaciones numéricas; comparando diferencias (rango, rango intercuartílico, desviación estándar); diferencias absolutas y relativas).

6 La **interrelación entre variables**: relaciones bivariantes (directas e inversas); tablas de datos de doble entrada (decidir variable a cada eje, diferencia variableatributo); causa-efecto; regresión (capacidad predictiva y limitaciones) y correlación.

7 La **construcción de modelos**.

3. Actividades propuestas para cada nivel de la ESO

3.1 1º ESO

1. *Una gran epidemia.*

Esta actividad se presenta en su contexto histórico. Se quiere deducir que el número de muertes está relacionado con la presencia de una fuente de agua contaminada, y lo hacemos a partir de la descripción e interpretación del mapa del médico británico John Snow.

2. *¿Tienes buenos reflejos?*

Esta actividad es un estudio de los tiempos de reacción de los alumnos, es una adaptación de la actividad Reaction Timer, de la web nRich Project. En esta actividad, el alumnado genera los datos con los que va a trabajar. Es importante que se dé cuenta que el trabajo estadístico no empieza a partir de un conjunto de datos que te vienen dados, sino que empieza con una pregunta que, para encontrar la respuesta, recogemos datos, los organizamos y los analizamos para sacar conclusiones.

3. *¡Cuidado, no te equivoques!*

La actividad es un conjunto de cinco situaciones independientes, con las que pretendemos que el alumnado se dé cuenta que la correlación no significa necesariamente una relación causa-efecto y, de paso, que mejore su capacidad de razonar y comunicar su razonamiento. En ocasiones el error es el uso de datos absolutos y no relativos: por ejemplo, accidentes de tráfico en relación al número de vehículos que circulan.

4. *Caracterizando la classe*

El alumno debe realizar una recopilación de datos mediante encuestas muy básicas para tratarlos estadísticamente. El objetivo principal es que el alumno, de forma autónoma y no guiada por el profesor, se encuentre con situaciones donde debe decidir los datos a recoger, los parámetros a calcular, los gráficos a realizar, etc.

5. *Proyecto: ¿Llevas demasiado peso en la mochila?*

Formulamos una pregunta abierta sin pautas para afrontarla. No debe concretarse demasiado el reto inicial porque se convertiría en una especie de pauta que, justamente, no queremos dar. Esperamos que el alumnado busque la respuesta a una pregunta compleja mediante la experimentación basada en el método científico: plantearse cómo resolver el enigma, redactar su conjetura, preparar un experimento que pueda confirmarla, modificarla o rechazarla, y establecer las conclusiones finales.

Todo esto obliga a preparar un plan y llevarlo a la práctica.

3.2 2º ESO

1. *¿Cuántos fueron? ¿Cuántos volvieron?*

Esta actividad se basa en la descripción e interpretación de un gráfico complejo: el de Minard sobre la desastrosa campaña del ejército francés en Rusia en 1812/13. Queremos que se den cuenta de cuáles son las variables implicadas en un gráfico complejo como éste. Además, queremos que comprendan lo que nos dice cada una de ellas y sus conexiones. Finalmente, esperamos que admiren el buen trabajo realizado por Minard, que en un solo gráfico nos habla de hechos históricos, tragedias humanas, sin haber estado nunca: la importancia de los datos, bien organizados.

2. El agua en el mundo

Los gráficos circulares no siempre son fáciles de interpretar, especialmente cuando se representan pequeños porcentajes. La actividad plantea retos relacionados con porcentajes y fracciones que facilitan la observación de las dificultades del alumnado en estos temas. El objetivo es el trabajo contextualizado de porcentajes, fracciones, decimales y operaciones con estos números.

3. Quiero una moto

La actividad se plantea como un juego de rol en el que, a partir de los mismos datos, una parte de la clase debe elaborar argumentos en un sentido, y la otra parte, los argumentos en el sentido opuesto. Para ello, el alumnado debe interpretar los gráficos y convertir esa interpretación en argumentos a favor del rol que le ha tocado representar. Pretendemos que el alumnado se dé cuenta de que a menudo unos

mismos datos pueden ser usados tanto a favor y como en contra de lo mismo. Además, esperamos que soliciten más datos de los que se les presentan: por ejemplo, en el primer gráfico habría que conocer los porcentajes de conductores de motos por edades. Por otra parte, es necesario observar si el alumnado comprende los criterios que usan las compañías de seguros para calcular las cuotas (el principal, la siniestralidad). Por último, debe tenerse en cuenta que en esta actividad no se trata únicamente de la compra o no de una moto sino también reflexionar sobre las medidas que puede tomar la Administración para reducir el número de accidentes con motos implicadas.

4. *¿Qué países son los mejores en los Juegos Olímpicos?*

Queremos que los alumnos propongan un indicador que haga una clasificación más justa de los países, no sólo a partir de las medallas conseguidas, sino que tenga en cuenta otros factores como el PIB, o la población del país. Pretendemos que el alumnado investigue cómo se hace una fórmula, cómo se crea, mediante la práctica.

Ésta es una propuesta de alto nivel.

5. Comparando e interpretando informaciones

Esta actividad tiene tres objetivos:

- Mostrar una conexión entre Sociales y Matemáticas.
- Que los alumnos comprendan las claves de elaboración de las pirámides de población.
- Que los alumnos vean cómo un gráfico puede describir la evolución de la población de un país a lo largo de los años y cómo hechos socialmente relevantes quedan reflejados en las gráficas.

6. *¿Ha habido engaño?*

Presentamos los principales parámetros de centralización (media, mediana, moda) a partir de un cómic (artículo "El engañoso término medio", publicado en el libro "Aja! Paradojas" de Martin Gardner). No debemos quedarnos sólo en la simple comprensión de los parámetros, debemos llegar a que el alumnado se dé cuenta de

las limitaciones que tiene cada uno de ellos.También es necesario reflexionar sobre los valores asociados a la decisión de escoger uno u otro parámetro según lo que se pretende conseguir por parte del empresario.

7. El comerciante

En la situación se dan la media, la moda, el tamaño de la muestra, y la suma de todos los valores y se pregunta por qué no son valores compatibles. El objetivo de la actividad es que el alumnado se dé cuenta de que si los parámetros estadísticos son contradictorios, esto significa que hay un error o un engaño. También pretendemos desarrollar el razonamiento matemático del alumnado, que se muestra en sus argumentaciones.

8. Proyecto: Preparando el concierto

Este proyecto no está tan lejos de la realidad: los alumnos disponen de un presupuesto de un millón de euros para preparar 4 o 5 conciertos. Tienen que tener en cuenta 6 o 7 variables, como las preferencias del público, lo que cobra cada artista, el precio del local donde harán la actuación, etc. Se debe saber combinar las informaciones de las tablas para hacer una propuesta viable. Deberán buscar información sobre algunas de estas variables de las que no se dan los datos.

3.3 3º ESO

1. Florence Nightingale

Usamos un contexto histórico para mostrar la estadística como herramienta para tomar decisiones. Proponemos que se explique la vida de F. Nightingale, especialmente durante el servicio en la Guerra de Crimea y su lucha posterior por cambiar las condiciones sanitarias en los hospitales del ejército británico. En ese momento es cuando aparece uno de los gráficos estadísticos más famosos: el diagrama polar. A pesar de ser conocido, no es fácil entender cómo se ha generado. Hay que dar valor a cómo este gráfico ayudó a mostrar al Estado Mayor la magnitud del desastre sanitario en los hospitales del ejército. Aprovechamos este gráfico de

área polar para trabajar la proporción entre dos sectores circulares. El objetivo es mostrar la importancia del tratamiento estadístico de los datos para entender el mundo y tomar decisiones. Concretamente, queremos que el alumnado se dé cuenta de cómo una representación gráfica puede ayudar, o no, a comunicar visualmente una información.

2. *¿Qué pasó ese aciago día?*

El objetivo que perseguimos es que el alumnado comprenda que unos datos bien organizados pueden informarnos incluso de eventos que no hemos presenciado. He aquí uno de los poderes de la Estadística. Por otro lado, también muestra las limitaciones de la Estadística: es importante remarcar que todas las preguntas que se planteen durante la actividad no tienen por qué obtener respuesta con los datos proporcionados en la tabla. Es decir, ante unos datos, cabe preguntarse qué es lo que realmente se puede afirmar a partir de ellos.

3. *¿Dónde llueve más: en Barcelona o en Cádiz?*

Proponemos hacer la comparación de la pluviosidad en diferentes lugares: son lugares donde llueve lo mismo en un año, pero la distribución mensual es muy distinta (Barcelona, 614 mm; Cádiz, 626 mm). Además de relacionarlo con el paisaje (concretamente con la vegetación), queremos aprovechar la creencia de que ciertos sitios son más lluviosos que otros. Disponemos de las pluviosidades mensuales (https://es.climate-data.org/), e introduciremos la idea de dispersión a partir del gráfico de barras, haciendo notar la variabilidad de las barras respecto a la media.

4. Temperaturas en dos ciudades

Ambos grupos de datos tienen la misma media, pero si se representan las frecuencias en un diagrama de barras ya se ve que no son tan equivalentes: unas están más agrupadas hacia el valor central y otras están acumuladas hacia los valores extremos . Por tanto, la media no es suficiente para describir completamente los datos, hay que encontrar algún otro valor que recoja la dispersión observada. El objetivo es hacer que se den cuenta de que es necesario algo más aparte de un parámetro de centralización, pero aconsejamos introducir la desviación en otra actividad.

5. Salida de fin de semana

Unos amigos hacen un viaje juntos, hacen gastos diferentes y al regreso hay que calcular cuánto debe pagar o recibir cada uno. El concepto de promedio saldrá rápidamente. Después de una forma más o menos explícita se calculan las distancias a la media (manteniendo el signo). Para finalizar se solicita una representación gráfica. Esto les ayudará a ser más conscientes de lo que significan los números con los que trabajan. A partir de una situación cotidiana se pretende realizar una introducción al concepto de distancia a la media que más adelante se ampliará para estudiar las desviaciones. En este caso no se utiliza el valor absoluto porque es importante la posición de cada dato con respecto a la media.

6. El tamaño de las piezas

Se presentan dos grupos de datos que tienen la misma media, lo que los hace equivalentes. Necesitamos algún indicador que nos permita discriminarlos y poder escoger el grupo de datos más adecuado. Venimos de trabajar una actividad (3.5) en la que se ha introducido la idea de desviación de cada valor respecto a la media. El objetivo de esta actividad es dar el paso hacia la desviación media (o la standard), con o sin ayuda de alguna representación gráfica (esto dependerá de cada grupoclase).

7. La duración de las pilas

Ambos grupos de datos tienen prácticamente la misma media, lo que los hace prácticamente equivalentes. Si se representan las frecuencias en un diagrama de barras ya se ve que no son tan equivalentes, y esta diferencia se cuantifica con la desviación (en este caso, poco importa si se trata de una desviación media o de una estándar). Conviene interpretar la poca dispersión como medida de la regularidad o fiabilidad del producto. El objetivo es aplicar el cálculo de la desviación (introducido anteriormente) para complementar la información del parámetro de centralización.

8. La población de las comarcas

Esta actividad está diseñada para mostrar que la comparación directa entre desviaciones no es correcta, a menos que tengan una media similar. Hemos elegido

los datos de población municipal de dos comarcas, por lo que una tiene una mayor desviación que la otra, pero si se hace el gráfico, no se aprecia así. El desarreglo está en que las medias son diferentes, y por tanto las desviaciones no son directamente comparables. Introducimos el Coeficiente de Variación.

9. *¿Dónde hay mayor dispersión?*

En esta actividad presentamos una situación muy similar a la de la actividad 3.8, en la que el primer grupo presenta más dispersión que el segundo. A partir del diagrama de barras se ve claramente, pero los parámetros de dispersión usuales (variancia, desviación media y desviación típica), en cambio, no reflejan este hecho. Tenemos dos opciones: o normalizar los datos, o utilizar el coeficiente de variación. El objetivo es dar cuenta EXPLICITAR que los parámetros de dispersión usuales sólo sirven para comparar muestras que han utilizado el mismo sistema de medida para cuantificar los datos. Si no es así, utilizar un nuevo parámetro de dispersión: el coeficiente de variación.

10. *Proyecto: ¿Podemos fiarnos del control de calidad de empresas como embotelladoras de refrescos o empaquetadoras de patatas fritas?*

Muchas personas dudan sobre si el contenido de un refresco, o de una bolsa de patatas fritas, se corresponde con lo que anuncia el fabricante en la botella o la bolsa. A nuestro alumnado a menudo le preocupa que le engañen respecto a este dato (siempre piensan que les dan menos de lo anunciado). Este proyecto pretende dar al alumnado una herramienta para dilucidar si su conjetura es cierta o no. Conocer una de las técnicas de control de calidad de estas empresas permite preparar un estudio estadístico en base a una muestra aleatoria real. Usando probetas y básculas de precisión, obtienen los datos que confirmarán o desmentirán su conjetura.

3.4 4º ESO

1. El tamaño de los glaciares

Esta actividad expone una situación real, con datos reales, en la que la fuerte correlación en los datos permite inferir conclusiones. Cabe decir que no son datos bivariantes, sino una serie temporal a la que se desea ajustar un modelo funcional.

Sin embargo, creemos que la situación tiene suficiente interés para ser desarrollada. El objetivo es que se dibujen (a mano) las nubes de puntos (escoger preferentemente aquellas combinaciones que tengan más puntos) para observar la fuerte correlación existente y se aventuren a predecir la desaparición de los glaciares (y en caso de que la predicción no concuerde con la realidad, intentar averiguar las causas). Además, queremos hacer ver la importancia de la correlación en campos muy distintos del puramente matemático, mostrar algunos de los conceptos que se verán en detalle más adelante (nube de puntos, correlación, recta de regresión…) y mostrar cómo un gráfico ayuda a hacer más comprensibles los datos y facilita la creación de conjeturas.

2. *Comparando fósiles*

En los últimos 150 años, se han encontrado y estudiado distintos fósiles que presentan muchas características en común. Una diferencia importante entre ellos es su tamaño. ¿Se trata de especies diferentes, o son individuos de una misma especie en diferentes estadios de desarrollo? Esto hoy día se resuelve con una prueba de ADN, pero en este caso no podemos realizarla, por lo que usamos los coeficientes de correlación para determinarlo.

3. Los lagos de Andorra

Los lagos del Pirineo son, por regla general, de pequeño tamaño pero algunos llegan a tener una profundidad importante, teniendo en cuenta sus dimensiones. Estos lagos tienen, en su mayoría, un origen glaciar, por eso se espera encontrar alguna relación entre sus dimensiones y su situación.

4. *¿Se hereda la altura?*

Esta actividad propone la búsqueda de una respuesta a una cuestión que les afecta en primera persona, como puede ser su estatura. La actividad es mucho más rica y significativa si se trabaja con datos reales y del mismo grupo. Hay que tener presente que la relación con un solo progenitor no suele ser buena, mejorando algo con la de la media de los progenitores. Pero mejora aún más si hacemos diagramas de dispersión separados (media padres vs hijas y media padres vs hijos). Para conseguir

una fuerte correlación con TODOS los datos, los pediatras trabajan con unas variables retocadas.

5. Faltas personales

El caso que aquí se presenta es el de la relación entre los puntos que ha hecho un jugador a lo largo de una temporada y las faltas personales que haya hecho. En principio, no parece que tenga que haber ninguna relación, pero suele encontrarse, y esto debe dar pie a introducir lo que se llaman las correlaciones espurias, e insistir en el hecho que la existencia de una correlación no implica que exista una relación de causalidad entre los datos.

6. *¿Es rentable la publicidad?*

Esta actividad presenta los datos (ficticios) de una empresa sobre su volumen de ventas y lo que invierte en publicidad. Se pide que se encuentre la recta de regresión y que se utilice. También se pide que se encuentre la otra recta de regresión (la de x sobre y) para ver sus diferencias.

7. Presión arterial

Esta actividad presenta datos sobre la presión arterial sistólica medida en varios pacientes para ver si existe relación con la edad. El objetivo es encontrar la recta de regresión y obtener valores con ella, dándose cuenta de la validez del resultado según la dispersión de la nube de puntos.

8. *Lanzamiento de un tiro libre*

Aunque este caso corresponda estrictamente al ajuste de un modelo funcional (cuadrático), lo hemos escogido por la familiaridad del contexto que se propone. Proponemos tres partes en esta actividad. En principio, parecen independientes y alguna podría obviarse, pero pensamos que las tres se complementan entre sí. En la primera parte, después del reconocimiento inmediato de que la trayectoria es una parábola, proponemos que obtengan su expresión a partir de cinco puntos, para mostrar que ésta es una opción débil, que con un pequeño error ya deja de identificar la parábola. Por tanto, en la segunda parte, después de obtener las coordenadas de

los puntos, proponemos que se haga una regresión lineal múltiple para obtener los tres coeficientes de la función cuadrática. Dejamos para el profesor las explicaciones sobre cómo hacer esto, que depende del software que desee utilizar. En la tercera parte se vuelve a utilizar el GeoGebra y, en concreto, la posibilidad de mostrar cómo cambia la gráfica de una función variando sus parámetros. Proponemos que se cree una función cuadrática en la que sus tres coeficientes estén vinculados a puntos deslizantes, y de esta manera obtener por tanteo cuál es la mejor solución.

9. Proyecto: Elecciones presidenciales en Florida

A pesar de ser una situación histórica de hace un cierto tiempo, y para los alumnos es aún más lejano, creemos que el caso tiene mucho interés por el análisis que comporta.

En las elecciones presidenciales de Estados Unidos, se enfrentaban (entre otros) el candidato republicano Bush y el demócrata Gore. El número de votos electorales que tenían cada uno en ese momento era muy parecido, por lo que el estado de Florida fue clave para decantar la balanza. El escrutinio daba vencedor en el estado de Florida a Bush por poco más de 500 votos. Esto supuso que se pidiera hacer el recuento de votos y apareció el caso que presenta esta actividad. El objetivo es detectar el valor anómalo, y ver cuántos votos había más según la expresión de la recta de regresión. Luego, si se desea, puede mostrarse la papeleta de votación y discutir si su diseño podía haber influido en los resultados obtenidos.

En el Grup Vilatzara (formado, a día de hoy, por Jaume Serra, Manel Sol, Xavier Vilella, Joaquim Giménez, Roser García, Mònica Rodríguez, Albert Martín, Amparo López, Marta Goitia, Berta Mas, Alberto Herrero, Imma García, Ovidi Fàbregues, Sònia Gumbau y Paola Reina), esperamos y deseamos que esta propuesta sea útil para el profesorado de aula de la ESO.

Referencias

FISHER, R., VINCE, A. (1988) *Investigando las matemáticas*. AKAL Editorial.

GRAHAM, A. (2006). *Developing thinking in statistics.* The open university P.C.P. London.

SOL, M. y VILELLA, X. (2017). Más allá de los parámetros. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* nº. 76, 32-38. Barcelona.

SOL, M., GARCÍA, R., FÀBREGUES, O. (2019). Desarrollando el pensamiento estadístico en la ESO. Actas XIX JAEM.

Acceso a Universidad para mayores de 25 años: ¿Qué queda de lo que estudiamos?

Neila Campos González
camposn@unican.es
Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación - Universidad de Cantabria

Núcleo temático: Procesos, Evaluación

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

El Acceso a la Universidad para Mayores de 25 años es una oportunidad para retomar los estudios después de un período de tiempo más o menos prolongado. La autora habla desde una experiencia de dos décadas impartiendo las asignaturas de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales* y *Matemáticas Avanzadas* de forma semipresencial en la UNED, dentro de dicho Curso de Acceso, con contenidos equiparables a los de Bachillerato. En esta comunicación se revisan las principales fortalezas, carencias y actitudes detectadas en el alumnado adulto ante el reto de estudiar matemáticas de nuevo. Esta información permite esbozar un análisis de la permanencia en el tiempo de los conocimientos y habilidades que se adquirieron en la enseñanza obligatoria, así como intentar explorar por qué el olvido parece actuar de forma selectiva con los procedimientos y con las ideas matemáticas.

Palabras clave: *Acceso universidad, aprendizaje a lo largo de la vida, enseñanza semipresencial, educación de adultos, instrumental-relacional.*

1. Las Matemáticas en el Curso de Acceso para Mayores de 25 años.

1.1 El contexto de la UNED.

El aprendizaje a lo largo de la vida incluye para muchas personas optar al acceso a la Universidad después de haber interrumpido los estudios durante un tiempo. La Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) proporciona una modalidad semipresencial de estudios universitarios que puede ser conveniente para estudiantes que tienen otras obligaciones, por ejemplo laborales o familiares. La UNED ofrece también un Curso de Acceso para Mayores de 25 años (Acceso +25) y su correspondiente prueba de evaluación, que en caso de superarse, proporciona acceso a estudios universitarios solamente en la UNED.

Como en el resto de estudios de la UNED, la asignatura es coordinada a nivel nacional por el profesorado de la sede central, que también diseña y gestiona las pruebas de evaluación. La actividad docente, sin embargo, tiene lugar en los Centros de la UNED repartidos por España y otros países, donde imparten docencia los profesores/as tutores/as, que habitualmente dedican a la UNED determinadas horas semanales compaginando esta labor con otras ocupaciones docentes o de otra índole.

Por tanto, el profesorado tutor no interviene en la elaboración de los enunciados de las pruebas de Acceso, iguales para toda España. Así pues, el profesorado tutor ha de intentar preparar al alumnado lo mejor posible para la superación de la prueba, sabiendo, eso sí, las características generales de ésta en la materia que les corresponde.

El curso y prueba constan de una fase general (Lengua castellana, Comentario de texto y Lengua extranjera) y una fase específica en la que se ofertan una veintena de asignaturas para elegir dos. Entre ellas se encuentran *Matemáticas Avanzadas* (llamada simplemente *Matemáticas* hasta 2018) y *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.*

La asignatura *Matemáticas Avanzadas* es obligatoria para acceder a estudios de Ciencias, Ingeniería y Arquitectura, mientras que para Ciencias de la Salud y para

Ciencias Sociales y Jurídicas se admite cualquiera de las dos asignaturas de Matemáticas. Para estudios de Artes y Humanidades no es obligatorio elegir una asignatura de Matemáticas. Si se supera una de las dos fases, general o específica, pero no se supera la prueba en su conjunto, la calificación de la fase superada se conserva durante dos años más.

La docencia es semipresencial, con una hora de clase a la semana en un Centro de la UNED, a la que el alumnado puede asistir de forma presencial o virtual. Las clases se realizan con pizarra electrónica, de modo que se puede atender a la vez al alumnado presencial y al que se encuentra online en directo, interactuando con ellos mediante el chat y/o voz. También se pueden grabar las clases para que el alumnado las pueda visualizar con posterioridad, tanto si no han asistido a la clase, como si desean volver a escucharla.

Asimismo, existe la posibilidad de matricularse de la prueba de acceso en modalidad libre, sin derecho a recibir docencia.

El perfil de alumnado es muy diverso, así como su nivel previo de formación. En la mayoría de casos se trata de estudiantes que concluyeron sus estudios de ESO sin acometer los de Bachillerato, o habiendo abandonado estos últimos, aunque también hay alumnos que completaron el Bachillerato sin haber superado en su momento las PAU. Muchos de ellos han realizado además ciclos formativos.

El alumnado procedente de EGB aparece en número cada vez más escaso en Acceso +25, ya que por otra parte la UNED ofrece opciones de acceso diferentes para mayores de 45 años.

Añadamos que en algunos alumnos de Acceso +25 se aprecia un importante nivel de interés por el conocimiento y de formación autodidacta en diversos ámbitos, lo que claramente les facilita el camino.

1.2 Algunos datos estadísticos orientativos.

En el curso 2023/24 la UNED tiene más de 150.000 estudiantes matriculados, incluyendo unos 5000 en los Curso de Acceso +25 y +45 (excluyendo la prueba libre), distribuidos en más de doscientos centros de la UNED. De los estudiantes de Acceso del presente curso, 577 se han matriculado en *Matemáticas Avanzadas*, y 2600 en *Matemáticas Aplicadas a las CC.SS.*

La tasa de éxito de Acceso +25 varía según la opción elegida para estudios de Grado, pero el promedio está en un 70%-80% de aprobados entre el alumnado presentado a examen (tasa de éxito). Sin embargo, si consideramos que en torno a un 30% no se presentan a examen, la tasa de rendimiento del Curso de Acceso (aprobados sobre matriculados) se reduce a una cifra próxima al 50%.

En cuanto a las asignaturas de Matemáticas, las siguientes gráficas recogen la información del curso 2022/23 (aprobados, suspensos, no presentados) para cada una de las dos asignaturas, desglosada por la opción elegida para estudios de Grado. Como se puede apreciar, la tasa de éxito y de rendimiento de las asignaturas de Matemáticas es sensiblemente menor que la tasa del Curso de Acceso en su conjunto.

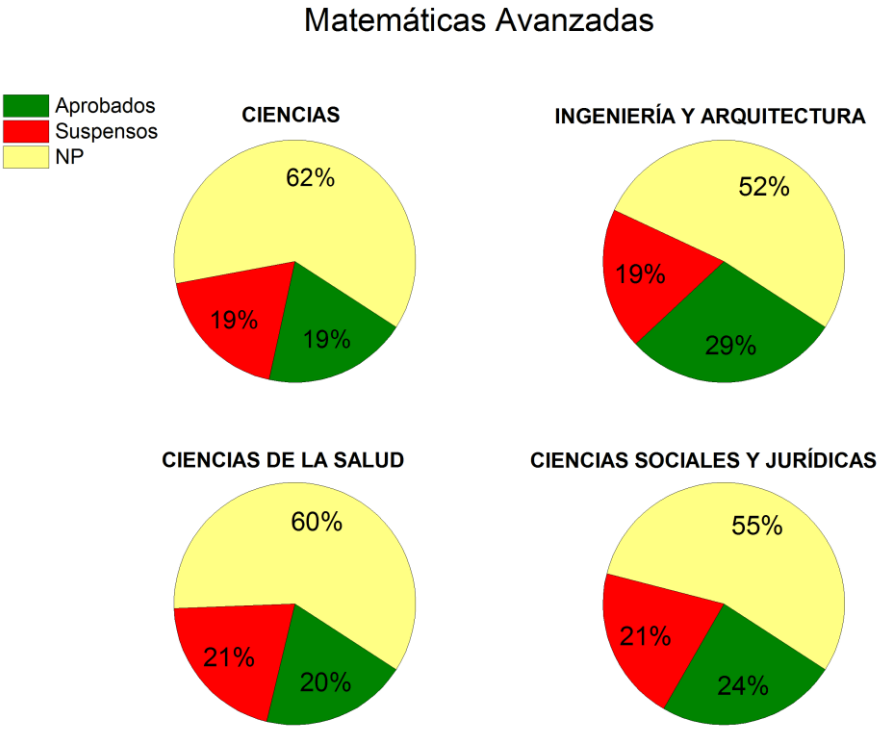


Imagen 1.
Resultados de la asignatura Matemáticas Avanzadas en el curso 2022 / 23.
(Fuente: Portal Estadístico de la UNED).

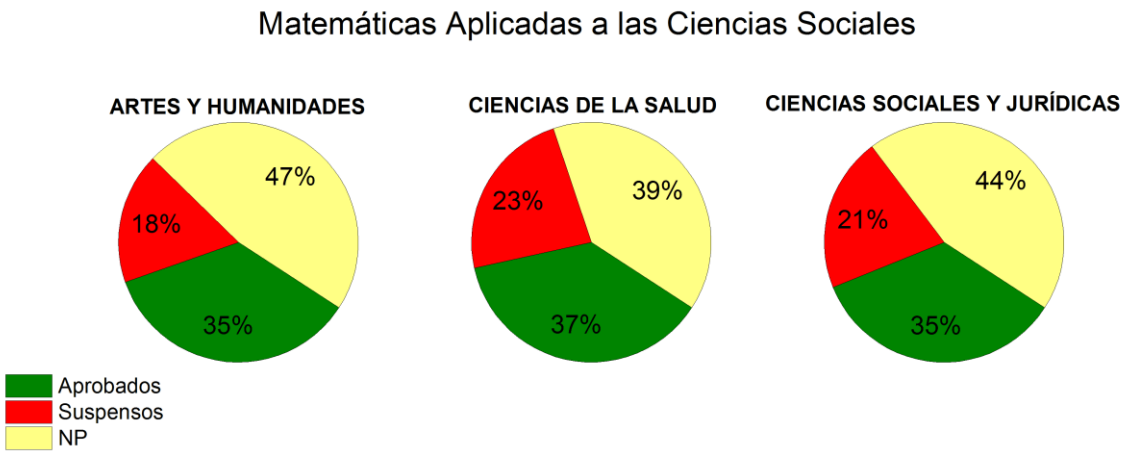


Imagen 2.
Resultados de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales en el curso 2022 / 23.
(Fuente: Portal Estadístico de la UNED).

En lo que se refiere a la distribución por edades, se presenta a modo de ejemplo el gráfico relativo a los 16 estudiantes matriculados de *Matemáticas Aplicadas a las CC.SS*. en el centro UNED Cantabria durante el presente curso 2023/24.

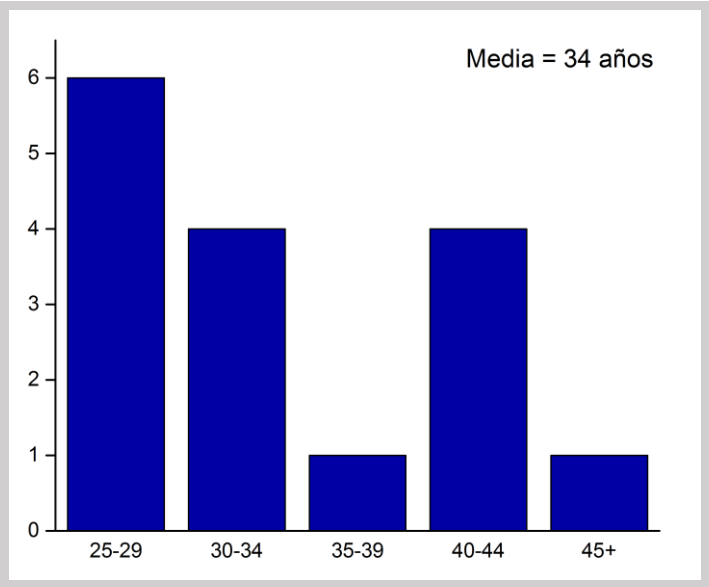


Imagen 3.
Edades de los estudiantes matriculados en Matemáticas Aplicadas a las CCSS en UNED Cantabria, 2023 / 24.

1.3 Contenidos y evaluación de las asignaturas de Matemáticas.

Las dos asignaturas de Matemáticas cubren unos contenidos similares a las análogas de Bachillerato (Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales), aunque con temarios más condensados, pues se trata de un solo curso en lugar de los dos años de Bachillerato. A continuación se incluyen esquemáticamente los contenidos de ambas asignaturas de Acceso.

Matemáticas Aplicadas a las CCSS.

Tema 1. Fundamentos
Lógica. Teoría de conjuntos. Aplicaciones entre conjuntos.

Tema 2. Aritmética y Álgebra
Bases de numeración. Números racionales y reales. Fracciones. Porcentajes. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales.

Tema 3. Geometría
Figuras planas. Coordenadas en el plano. Ecuaciones de la recta.

Tema 4. Funciones
Funciones elementales. Límites y continuidad. Derivación. Aplicaciones de la derivada.

Tema 5. Probabilidad y Estadística
Probabilidad. Probabilidad condicionada. Estadística descriptiva. Descripción gráfica y numérica.

Matemáticas Avanzadas:

PARTE I

Preliminares: Números y conjuntos.

Tema 1*: Estadística y Probabilidad. Combinatoria.

Tema 2. Polinomios. Fracciones algebraicas.

Tema 3. Elementos de geometría. Trigonometría.

Tema 4. Matrices y determinantes.

Tema 5. Sistemas de ecuaciones lineales.

Tema 6. Geometría vectorial del plano.

Tema 7. Geometría vectorial del espacio.

*(* El tema 1 no es materia de examen, pero sí será necesario tener los conocimientos de Combinatoria).*

PARTE II

Preliminares. Números reales

Tema 1. Funciones elementales I

Tema 2. Funciones elementales II

Tema 3. Límites de funciones. Continuidad

Tema 4. Derivabilidad de funciones

Tema 5. Estudio y representación de funciones

Tema 6. Cálculo integral

En ambas asignaturas, la evaluación se realiza mediante un examen tipo test de opción múltiple, con penalización de los fallos, debiendo obtener una puntuación igual

o superior al 50% para superar la prueba. Actualmente se permite calculadora en la prueba de *Matemáticas Aplicadas a las CCSS,* y no se permite en *Matemáticas Avanzadas.* La duración del examen es de una hora, y se realiza al mismo tiempo en toda España.

Existen dos convocatorias: una en junio y otra en septiembre, además de un examen parcial optativo en febrero, que libera materia o bien pondera en la puntuación final.

2. Fortalezas, carencias y actitudes observadas en el alumnado de las asignaturas de Matemáticas.

2.1 Motivación del alumnado

El alumnado del Curso de Acceso es un alumnado altamente motivado, como lo prueba el propio hecho de haber elegido el camino de retomar sus estudios. Muchos depositan sus esperanzas en el Curso de Acceso para emprender un camino de mejora personal o profesional, y por ello hacen un importante esfuerzo de asistir presencial o virtualmente a las clases, normalmente en horario de tarde, además de organizar su tiempo para dedicar suficientes horas al estudio fuera de las clases.

No todos los matriculados asisten a las clases, pero quienes lo hacen, muestran habitualmente un alto grado de implicación y participación en ellas. Hay que destacar que la labor de enseñanza-aprendizaje se ve enormemente facilitada por el hecho de que el número de alumnos en clase es habitualmente bastante reducido, permitiendo una atención altamente personalizada.

El alumnado que no asiste a las clases puede visualizar las grabaciones, de modo que el horario no suponga un problema; al docente le constan estas visualizaciones. Normalmente en torno a la mitad de los matriculados no hacen seguimiento alguno de las clases; estos estudiantes con frecuencia tampoco se presentan a examen, aunque en unos pocos casos sí lo hacen y con éxito, lo que indica un buen nivel de conocimientos previos y/o haber recurrido a otras ayudas para el aprendizaje.

Por otra parte, el alumnado adulto dispone de una madurez mental que puede hacer más ágil la adquisición de nuevos (u olvidados) conceptos y que puede compensar en parte la falta de hábito de estudio. Aunque el tiempo transcurrido desde la interrupción de los estudios es un factor relevante, en ocasiones el alumnado de mayor edad compensa esta dificultad con una mayor madurez y otras cualidades como una mejor comprensión lectora.

Añadamos que contar con el apoyo familiar es un factor que puede resultar decisivo. En ocasiones, el/la estudiante tiene hijos realizando estudios del mismo nivel y esto aporta un impulso adicional.

2.2 Dificultades generales ante el estudio

El o la estudiante que comienza el Curso de Acceso se enfrenta a varios retos simultáneamente: Por una parte se trata de volver a ejercer una actividad, el estudio, que probablemente no había practicado en una década o más. Y por otra parte se trata de hacerlo de forma semipresencial, de modo que la mayor parte del trabajo ha de llevarlo a cabo el alumnado por cuenta propia. La falta de hábito de estudio, además de la propia falta de tiempo, suele suponer un obstáculo considerable.

El manejo del curso virtual no supone inconveniente para una parte del alumnado, pero sí para otra parte, según su competencia digital. En la UNED, incluido el Curso de Acceso, este entorno digital es fundamental para seguir las asignaturas, así como para que el alumnado pueda estar en contacto entre sí y con el equipo docente a través de recursos como los foros.

Debido a todas estas circunstancias, a lo largo del curso, algunos estudiantes se ven sobrepasados y abandonan. Otros, a pesar de no superar la prueba en el primer año, lo hacen en su segundo o tercer año. No es de extrañar, por otra parte, que se necesiten al menos dos años para asimilar un temario equiparable al de Bachillerato.

2.3 Actitud hacia las asignaturas de matemáticas

Algunos alumnos vienen con una alta motivación para las matemáticas, sobre todo en la asignatura *Matemáticas Avanzadas* que conduce a los estudios de Ciencias o Ingenierías, y se alegran de la oportunidad de volver a tomar contacto con esta materia.

En la otra cara de la moneda, la obligatoriedad de la asignatura genera a veces rechazo, especialmente para el alumnado que aspira a un Grado con menor afinidad por las matemáticas, lo que suele ser el caso en la asignatura *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.*

En esta última, parte del contenido (en especial el referido a Lógica) no resulta familiar para la mayoría del alumnado, lo que supone una dificultad añadida, además de que no lo reconocen como parte de las matemáticas. Sin embargo, una vez trabajada es una materia que a menudo suscita interés, y de la que –por ejemplo– los futuros juristas reconocen la utilidad. También reconocen la utilidad del bloque de Probabilidad y Estadística. No ocurre así con otros contenidos como la numeración en distintas bases o los conceptos de Geometría.

Parte de la labor docente en Acceso ha de consistir necesariamente en intentar mejorar la autopercepción que el o la estudiante tiene respecto de las matemáticas, que en la mayoría de los casos es bastante negativa, manifestándose de distintas formas:

- Ansiedad matemática. “Se me cierra la mente y no puedo hacer nada”.
- Bloqueo ante la hoja en blanco. “No escribo nada porque no sé por dónde empezar”.
- Escepticismo ante la eficacia del estudio y la práctica. “Si no me sale a la primera, no me saldrá nunca”.

Por otra parte, suele haber una dificultad adicional –que proviene probablemente de la falta de hábito– para tomar notas o apuntes en clase que después les sirvan a ellos

mismos como material de estudio o repaso. El hecho de grabar las clases con pizarra electrónica, que se puede volver a visualizar después, contribuye a paliar este problema.

2.4 Carencias detectadas en el conocimiento matemático

A pesar de que el título de ESO o equivalente es necesario para matricularse en el Curso de Acceso, es muy notoria la proporción de estudiantes que no han afianzado o han perdido esos conocimientos. Algunos (aunque no la mayoría) presentan graves carencias y dificultades para operaciones básicas, como operar con números enteros; más aún para operar con potencias o fracciones. Este alumnado obviamente debe solucionar estas carencias antes de acceder a la Universidad.

Normalmente, el alumnado es consciente de haber perdido u olvidado contenidos o procedimientos, produciéndose con frecuencia situaciones como las siguientes:

"¿La raíz cuadrada de 25? Es que no recuerdo cómo se hacían raíces cuadradas."

"¿El 20% de 100? Es que no recuerdo cómo se calculaban porcentajes".

"¿La operación ½ * 6 ? Es que no recuerdo cómo se operaba con fracciones."

Esto es llamativo porque las anteriores son cuestiones que, además de corresponder a etapas anteriores al Acceso, obviamente se resuelven de forma inmediata si se conoce el significado de la operación que se está efectuando. Incluso, en ocasiones, algún estudiante manifiesta que sabe la solución pero que la ha obtenido por "sentido común" y no mediante procedimientos matemáticos, con lo cual considera que lo que ha hecho puede no ser "lo correcto".

Otra parte del alumnado sí recuerda cómo ejecutar los procedimientos y operaciones en cuestión, o consiguen recordarlo tras un breve repaso, pero igualmente encuentran dificultades a la hora de dotar de significado a las operaciones.

El alumnado suele considerar por tanto que el conocimiento procedimental “es” el conocimiento matemático, es decir, que las matemáticas consisten en saber hacer cálculos, ejecutar algoritmos, o aplicar fórmulas.

El uso correcto de la notación matemática también suele ser un escollo, pero ya que el examen de Acceso es de tipo test y el alumnado no debe entregar desarrollo alguno, no se suele insistir en ese aspecto más allá de lo que el alumnado pueda absorber durante las clases.

El álgebra, es decir el uso de símbolos en lugar de números, es probablemente la parte en la que se detectan más carencias. A menudo se sabe operar pero con una cierta rigidez que solo les permite hacer frente a situaciones conocidas, por ejemplo no sabiendo resolver $(–a+b)^2$ por no poder identificarlo como una “igualdad notable” estudiada; aunque a veces tampoco pueden resolver las igualdades “conocidas” porque recuerdan mal la fórmula y no son conscientes de que se puede operar directamente aplicando la propiedad distributiva.

Se observan dificultades especialmente en la resolución de ecuaciones de primer grado, al aplicar incorrectamente las reglas de “pasar al otro miembro” y cometer los fallos que son habituales en el alumnado de ESO. Sin embargo, incluso en los casos en que la mecánica se efectúa correctamente, se detecta una carencia sobre lo que significa resolver una ecuación, ya que esta es percibida como un enunciado sobre el cual hay que ejecutar determinados procedimientos para llegar a un resultado, pero no se sabe relacionar dicho resultado con la ecuación propuesta: en otras palabras, no son conscientes de que el resultado corresponde al valor de la incógnita que debería sustituirse en el enunciado para hacer cierta la igualdad.

A la vista de estas circunstancias, en las clases de Acceso +25 frecuentemente hay que retroceder al nivel de Secundaria antes de poder llegar a la materia propiamente del nivel de Acceso. Afortunadamente, el reducido número de estudiantes que habitualmente hay en el aula permite adaptar las actividades de aprendizaje a las necesidades de cada uno.

Por otra parte, algunos estudiantes de Acceso sí cursaron el Bachillerato, y por tanto adquirieron ya conocimientos propios de este nivel. Esto marca una importante diferencia especialmente para el caso de *Matemáticas Avanzadas*, equivalente a Matemáticas II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología; este alumnado tiene por delante un camino más fácil a la hora de conseguir el acceso a la Universidad. Pero en este nivel también se observan fenómenos similares a los descritos antes, relativos al carácter procedimental de los conocimientos: por ejemplo, estudiantes que recuerdan la mecánica del cálculo de derivadas pero no la interpretación gráfica de ésta, o el cálculo con logaritmos pero no el significado de éstos.

Se da entonces la paradoja de que saben resolver lo difícil pero no lo fácil: es decir, pueden no saber que el logaritmo decimal de 1000 es 3, pero sí ser capaces de resolver una complicada ecuación logarítmica.

2.5 Actitud hacia el conocimiento matemático

Si acudimos a la distinción clásica entre conocimiento matemático procedimental y conceptual, también llamado instrumental y relacional (Skemp, 1976; Herheim, 2023), a la vista de lo expuesto en la sección anterior apreciamos que en una mayoría de estudiantes de Acceso la comprensión de las matemáticas es fuertemente instrumental. Poseen una idea de las matemáticas como un conjunto de reglas o procedimientos a seguir, con frecuencia en detrimento de la comprensión de su significado. Por tanto, conciben las matemáticas como algo que hay que memorizar, recordar y repetir, y suelen valorar su propia capacidad matemática en función de esta habilidad exclusivamente. En la taxonomía de Bloom (Bloom, 1956; Forehand, 2005) el único nivel utilizado sería el más básico: recordar.

Esta visión se aprecia tanto en los estudiantes que recuerdan bien los procedimientos (y que por ello se autoperciben como “buenos” en matemáticas), como en aquellos que no recuerdan cómo hacerlo pero “saben que existía un procedimiento o fórmula para eso”.

Se da además una percepción de las reglas y procedimientos como algo arbitrario, que es de un modo como podría ser de otro, posiblemente debido a una falta de reflexión sobre la arbitrariedad o no de las matemáticas. En respuesta a preguntas como "¿Por qué para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes?", a menudo la respuesta es: "Porque la regla es así".

La percibida arbitrariedad de las matemáticas y la ausencia de significado constituye, aunque el alumnado no sea consciente de ello, un factor que incrementa la ansiedad y el bloqueo. Si lo único que se puede hacer es recordar reglas, en caso de no recordarlas bien o no estar seguros el alumnado no dispone de otros recursos cognitivos y se bloquea.

Es por ello que, en las clases, la autora de este trabajo intenta aportar un enfoque relacional siempre que sea posible. Las reacciones del alumnado son variadas: desde la sorpresa a la perplejidad, pasando por el rechazo a algo que puede ser percibido como un trabajo mental adicional; otros sin embargo reconocen que la comprensión hace más fácil el aprendizaje y también más agradable, y desearían "que se lo hubieran enseñado así" (lo cual no significa realmente que no se lo hayan enseñado así, sino que bien pueden haberlo olvidado).

Por otra parte, dado que el examen de Acceso se basa en preguntas de tipo test, el alumnado puede no sentir la necesidad de dotar de significado a los procedimientos que ejecuta, mientras sepa obtener la respuesta correcta. Sin embargo, hay que observar que en ocasiones las preguntas del test están diseñadas de modo que el alumnado que posea una comprensión del tema puede con facilidad descartar respuestas claramente incorrectas; por este motivo la comprensión sí aporta una ventaja para el examen.

Cierto es que algunos estudiantes ven más allá de la prueba de Acceso y reconocen que un mejor aprendizaje redundará en su beneficio a la hora de estudiar un Grado, sobre todo si éste involucra conocimiento matemático. Pero aun así, la mayoría prefieren centrarse en aprobar el examen, confiando en que después podrán adquirir las habilidades matemáticas que sean necesarias (lo cual, aunque pueda parecer

difícil, no lo es tanto gracias al ritmo flexible que permite la UNED en sus estudios de Grado).

3. La permanencia del conocimiento matemático.

De las consideraciones vistas en la sección anterior se desprende que lo que más se recuerda es la mecánica de los cálculos, fórmulas o procedimientos (o al menos se tiene un recuerdo de ellos aunque sea impreciso), por encima de la comprensión de ideas o conceptos, de los que muchas veces no se tiene siquiera consciencia de que existieran. Es decir, la matemática instrumental parece recordarse con más intensidad y duración que la relacional. Cabe preguntarse las causas.

Una primera posibilidad es que la instrucción que recibieran en su momento tuviera efectivamente mayor contenido instrumental que relacional, y que el significado de los conceptos matemáticos no fuera transmitido junto con los procedimientos. Sin embargo, aunque en algún caso pudo haber sido así, no parece plausible pensar que esa situación se haya dado en tantos estudiantes de tantas procedencias diferentes en el tiempo y en el espacio.

Más creíble parece que se trate de un fenómeno de olvido selectivo. Si el olvido ocurre ya de un curso a otro dentro de la enseñanza obligatoria, con más razón ocurrirá después de un intervalo de desconexión del estudio; en principio también parece posible que no solo se olviden contenidos, sino distintos enfoques de ellos. Es decir, el alumnado que manifiesta que “ojalá se lo hubieran enseñado así”, puede haber olvidado los razonamientos, explicaciones o ideas asociadas a un cierto contenido matemático que aprendió en su momento, y en cambio haber retenido solamente el procedimiento para resolverlo.

También hay que tener en cuenta que el alumnado de Curso de Acceso presenta un sesgo inherente, puesto que son personas que en su momento no continuaron sus estudios, y probablemente no destacaron en ellos. Sin embargo, esto no es siempre por falta de capacidad o facilidad para los estudios o para las matemáticas, sino que

en numerosas ocasiones han existido condicionantes sociales, económicos, familiares, etc. que impidieron que el/la estudiante pudiera seguir el camino deseado.

La autora de este trabajo lleva impartiendo docencia como profesora-tutora en Acceso +25 en UNED Cantabria desde el año 2006, y dado que el alumnado se examina con edades entre 25 y 45 años, esto ha permitido observar a estudiantes nacidos desde la década de 1960 hasta el 2000, y de diversas procedencias geográficas. A pesar de los numerosos cambios habidos en la sociedad y en la legislación educativa en este tiempo, el olvido parece operar siempre de la misma manera selectiva, primando la pervivencia de los procedimientos por encima de los conceptos.

¿Y por qué razón habrían de recordarse mejor los procedimientos que los conceptos? En principio no parece lógico que las ideas, una vez comprendidas y asimiladas, desaparezcan con el tiempo sin dejar rastro, hasta tal punto que el estudiante ni siquiera sea consciente de que una vez estuvieron ahí.

Para resolver este enigma, la interacción directa con los alumnos y alumnas de Acceso a lo largo de los años nos conduce a aventurar la siguiente conjetura: los conocimientos que más sobreviven al tiempo son aquellos que en su momento formaron parte, no solo del aprendizaje en las aulas, sino también de las correspondientes pruebas de evaluación. Es decir, el alumnado recuerda especialmente aquello que se le preguntaba en los exámenes. Por tanto, si el significado de los conceptos matemáticos ha sido presentado y trabajado en el aula pero no ha sido materia de examen, la memoria lo descarta, y quizá ni siquiera al cabo de mucho tiempo.

Podemos pensar en varias razones por las cuales los contenidos que son materia de examen se fijan más firmemente en la memoria.

- El profesorado trabaja más en el aula la materia que sabe que va a ser evaluada.
- El alumnado dedica tiempo y esfuerzo personal a estudiar y practicar el tipo de contenidos que sabe que se van a evaluar.

- El propio hecho de que unos contenidos o habilidades sean materia de examen hace que el alumnado les atribuya mayor importancia subjetiva e identifique el "conocimiento" de la materia con esas habilidades en particular.

- El impacto emocional de los exámenes –para bien o para mal– puede contribuir también a fijar su contenido en la memoria.

Habría que preguntarse hasta qué punto las pruebas de evaluación en los distintos niveles de enseñanzas medias (presentes y pasadas) han incidido o inciden en el aspecto relacional de las matemáticas, es decir, preguntarse si estas pruebas recogen los niveles más altos de la taxonomía de Bloom: comprender, relacionar, analizar… incluso crear. Esto incluye también la EBAU, que marca en gran medida la orientación de la enseñanza y aprendizaje en Bachillerato. Porque, si los conceptos y sus relaciones se trabajan en el aula pero después no se evalúan de forma acorde, posiblemente no se fijen adecuadamente.

4. Conclusión.

El Curso de Acceso para Mayores de 25 años nos permite ver "lo que queda" de los conocimientos matemáticos de la enseñanza obligatoria, pasados por el filtro del tiempo. Dentro de la diversidad del alumnado de Acceso, una característica constante llama la atención año tras año: la mayor permanencia del conocimiento instrumental (procedimientos) frente al relacional (conceptos).

En algunos casos, los procedimientos aún están en la memoria o regresan con un ligero repaso, y en otros casos, los procedimientos ya no se recuerdan pero han dejado su impronta en la mente, como una silueta vacía. Sin embargo, las ideas, es decir, la comprensión de los conceptos o su significado, casi siempre parece haberse esfumado sin siquiera dejar rastro de su existencia.

En base a la interacción directa con el alumnado, conjeturamos que los conocimientos que más recuerdan son aquellos que formaron parte de las actividades de evaluación en su momento. Por tanto, si en las aulas de la enseñanza obligatoria el aprendizaje

tenía un componente relacional, pero los exámenes eran fundamentalmente instrumentales, ese conocimiento es el que más ha sobrevivido.

Sin duda existen muchos otros factores dentro y fuera de las aulas que influyen en la permanencia en el tiempo de lo aprendido, pero es posible que el factor de la evaluación sea relevante. Los docentes sabemos que la evaluación cumple varias funciones en la educación de nuestros discentes, ya se trate de evaluación sumativa o de evaluación formativa. Quizá tengamos que reflexionar también sobre otra posible función de las actividades de evaluación: la de ayudar a fijar los conocimientos e ideas a largo plazo, y con ello, la apreciación que tendrá el ciudadano adulto hacia las matemáticas.

Referencias

Bloom, B. S. (1956) *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook: The Cognitive Domain*. David McKay, New York.

Forehand, M. (2005). Bloom's taxonomy: Original and revised. *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology*, 8, 41-44.

Herheim, R. (2023). On the origin, characteristics, and usefulness of instrumental and relational understanding. *Educational Studies in Mathematics,* 113, 389–404

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Estrategias de formulación de problemas en Secundaria: Funciones.

Kevin Herrera Dévora
alu0101265285@ull.edu.es
Universidad de la Laguna

Israel García Alonso
igarcial@ull.edu.es
Universidad de la Laguna

Núcleo temático: Procesos y Formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Esta propuesta de aula tiene como objetivo introducir al alumnado a la formulación de problemas. Se presentan tres tareas que desarrollan distintas estrategias de reformulación de problemas relacionados con el estudio de gráficas y funciones. Se comenzará con el estudio de cambios de contexto, luego cambios en los datos y, por último, cambios en el objetivo del problema. Cada tipo de reformulación incluirá una fase de resolución y evaluación de los problemas formulados por parte de otros compañeros. Para finalizar la situación de aprendizaje se realizará un trabajo cooperativo y competitivo por equipos. Se abordan problemas que parten desde tablas, gráficos o enunciado y se pide un elemento distinto al de partida. Se espera que, al comenzar, los alumnos presenten dificultades para llevar a cabo correctamente la reformulación pedida, pero evolucionen correctamente, mostrando creatividad en las formulaciones, mejorando el aprendizaje sobre el tema y reduciendo la ansiedad hacia las matemáticas.

Palabras clave: Formulación de Problemas, Funciones, Gráficas, Tablas.

1. Introducción

La resolución de problemas ha sido objeto de numerosos estudios que han dado lugar a múltiples teorías educativas y propuestas de mejora en la educación matemática, en cambio, la formulación de problemas ha sido en los últimos años cuando está teniendo un gran desarrollo en la investigación y la intervención en el aula.

Como hemos dicho, la resolución de problemas ha tenido una gran importancia en la investigación en educación matemática desde que Pólya publica su libro "How to solve it" en los años 40 y, aunque pareciera una consecuencia de esto, el estudio de la formulación de problemas no se desarrolla hasta la década de los 90, cuando los investigadores Edward Silver y Jinfa Cai desarrollan su investigación en torno a la formulación de problemas. Es tal la diferencia en los resultados de investigación entre ambas disciplinas que "hay docenas de afirmaciones teóricas, cientos de instrumentos psicométricos y miles de estudios empíricos sobre resolución de problemas, pero pocos estudios y nada sistemáticos sobre invención de problemas" (Castro, 2011, pág. 10).

Se define formulación de problemas al "proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema)" (Malaspina, 2013, pág. 131). Además, "la formulación de problemas se refiere tanto a la generación de nuevos problemas como a la reformulación de problemas dados. Así, la formulación puede ocurrir antes, durante o después de la solución de un problema" (Silver, 1994, pág. 19).

A la hora de reformular un problema se pueden distinguir dos técnicas principales

(Grundmeier, 2015): *modificaciones superficiales o modificaciones estructurales*. Estas se diferencian en cuanto a la profundidad de los cambios realizados y cómo pueden afectar a la resolución del nuevo problema generado (Tabla 1). Así, las técnicas superficiales no cambian la base del problema mientras que las técnicas estructurales son modificaciones más profundas que cambian la estructura del

problema. Entre las técnicas superficiales encontramos: añadir información, modificar datos, cambiar el objetivo o incorporar cambios en la redacción. Por su parte, como técnica estructural se tiene: intercambiar datos por objetivos, generar un nuevo contexto o extender el problema.

Técnicas de formulación	Estrategias
Técnicas superficiales	Añadir información
	Modificar datos
	Cambiar objetivos
	Cambiar redacción del enunciado
Técnicas estructurales	Intercambiar datos por objetivos
	Cambiar el contexto
	Extender el problema

Tabla 1. Tipos de estrategias de formulación. Fuente: Grundmeier, 2015

Las investigaciones sobre formulación de problemas han identificado diversas bondades en el aprendizaje de las matemáticas tras su incorporación en el aula, como puede ser la accesibilidad y ajuste al estudiante de la tarea de formulación, la capacidad para provocar un pensamiento más profundo sobre ciertos tipos de problemas (Cai et al., 2022). Pero también es una oportunidad para que los estudiantes sean creadores de conocimiento, no sólo receptores del conocimiento ya conocido (Crespo, 2015, p. 495) y les permite utilizar las matemáticas para profundizar y hacer preguntas que sean relevantes personal y socialmente. Además, se sabe que, la formulación de problemas moviliza conocimientos diferentes a los que promueve la resolución de problemas, ofreciendo diversas ventajas en el aprendizaje de las matemáticas:

- **Mejora el aprendizaje** del tema o concepto matemático que aborda el problema, ya que moviliza en el alumnado diferentes conceptos matemáticos o desde una perspectiva diferente, estableciendo nuevas conexiones

conceptuales o aplicaciones a nuevas situaciones, logrando así un aprendizaje significativo y en mayor profundidad del concepto estudiado (Ayllón & Gómez, 2015).

- **Aumento de la motivación** del alumnado pues se enfrenta a una actividad de suelo bajo y techo alto, que aborda sin dificultad inicial generando una actitud de predisposición hacia su realización. Es reconocido que la actitud hacia las matemáticas es clave en los procesos de aprendizaje de la materia (Evans, 2000; Gómez Chacón, 2000; Pólya, 1945).
- **Reducir la ansiedad** hacia las matemáticas gracias a una mayor motivación. No olvidemos que en los resultados PISA 2022 (INEE, 2023) el alumnado español presenta mayor ansiedad ante la realización de actividades matemáticas.
- **Superación de los errores**, ya que la formulación de problemas estimula al alumno a elegir la información que ha de utilizar y a seleccionar con qué datos desea operar, haciendo que se produzca una disminución de errores resolutivos (Brown & Walter, 1993; English, 1997; Silver et al., 1996).
- **Desarrollo de la creatividad** se ha estudiado la relación positiva entre la habilidad para formular problemas, el grado de creatividad y el talento matemático (Krutetskii, 1969; Silver, 1994).
- **Aumento de las posibilidades del profesor para evaluar** ciertas capacidades matemáticas de los alumnos que normalmente resultan difíciles de evaluar como, por ejemplo, su conocimiento, su forma de razonar y su desarrollo conceptual (Ayllón, 2005).

El currículo se hace eco de estas investigaciones y recoge esta competencia específica de formulación de problemas a lo largo de toda la etapa obligatoria, es decir, desde Educación Primaria hasta el Secundaria (RD 157/2022; RD 217/2022), lo que da cuenta de la relevancia de este conocimiento.

El currículo hace hincapié en la formulación de problemas a través de la formulación de problemas sobre situaciones reales que se puedan resolver mediante matemáticas, resolución y análisis de las soluciones de manera crítica. Esta práctica

fomenta el pensamiento creativo y analítico del alumnado, además de establecer conexiones de conceptos matemáticos abstractos con situaciones de la vida real. De esta forma, el currículo refleja los resultados de investigación que sugieren que la simple transmisión de conceptos y fórmulas puede limitar la comprensión y el uso de las matemáticas en contextos reales.

Vista la relevancia de la formulación de problemas en la clase de matemáticas, en esta comunicación se presenta una propuesta de intervención en una clase de 4º ESO dirigida a promover la formulación de problemas de matemáticas en torno al tema de funciones. A continuación, se muestra cómo se ha organizado la intervención y qué respuesta ha tenido en los estudiantes de este nivel educativo.

2. Estrategias de reformulación de problemas

Se presenta una propuesta para el aula compuesta por 3 tareas en torno al aprendizaje de la formulación de problemas matemáticos en torno al estudio de funciones lineales y afines. Las tareas abordan el aprendizaje de estrategias de formulación de problemas que concluyen con una actividad en la que los estudiantes retarán a sus compañeros/as con un problema formulado por ellos mismos y que, a la vez, deberán valorar y comentar (Tabla 1).

Tarea	**Estrategia de formulación**
1. Todo Cambia	Cambio de contexto
2. Seguimos creando	Modificar los datos del problema dado
3. ¿Qué quieres saber?	Cambio del objetivo del problema

Tabla 1. Tareas y estrategia de formulación desarrollada. Fuente: elaboración propia

Cada tarea se trabajan funciones mediante gráficas, enunciado y tablas. Y, además, desarrollarán una estrategia de formulación de problemas y sistematizarán lo trabajado hasta el momento. Todo ello sin perder de vista que el foco de las tareas está en el desarrollo del razonamiento y las competencias para la comprensión conceptual y la aplicación de los conceptos matemáticos por parte del alumnado.

Desde la perspectiva curricular se abordan, entre otras posibles, la siguiente competencia específica y criterio de evaluación, válidos para todos los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria (RD 217/2022, p. 41727):

- Competencia específica 3: Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento

- Criterio de evaluación 3.2: Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.

Los saberes básicos principales se indican en cada actividad, posteriormente.

Veamos, a continuación, una descripción de las tareas que se proponen para el desarrollo de la formulación de problemas en torno al estudio de funciones.

2.1 Tarea 1. Todo cambia

En esta primera tarea se introduce la reformulación de problemas y el trabajo con funciones (Tabla 2). Para ello, se inicia con conceptos básicos de funciones como la representación de puntos en el eje de coordenadas y una iniciación a que los alumnos propongan contextos para las diferentes funciones.

Tarea 1: Todo Cambia Estrategia de reformulación*: Cambio de contexto*	**Actividades**	**Saberes básicos**
1.1.	¿Quién es quién?	Función como gráfica
1.2.	Motorista	Función como enunciado
1.3.	Baloncesto	Función como gráfica
1.4.	Resolución y evaluación	Resolución de problemas-coevaluación

Tabla 2. Actividades que conforman la Tarea 1. Fuente: elaboración propia

La primera actividad presenta un ejercicio principal en el que deben identificar puntos en el primer cuadrante (Imagen 1) y, posteriormente, proponer una situación diferente para el mismo problema (Imagen 2).

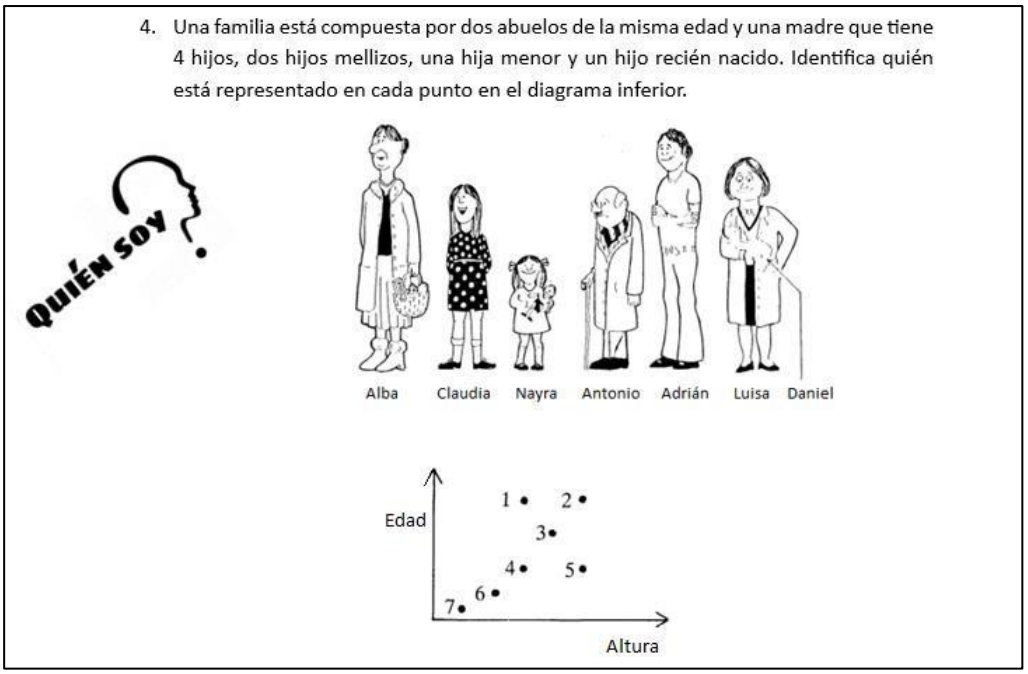


Imagen 1. Pregunta 4 de la Tarea 1.1. Fuente: Shell Centre for Mathematical Education Publications, 1985, p. 64.

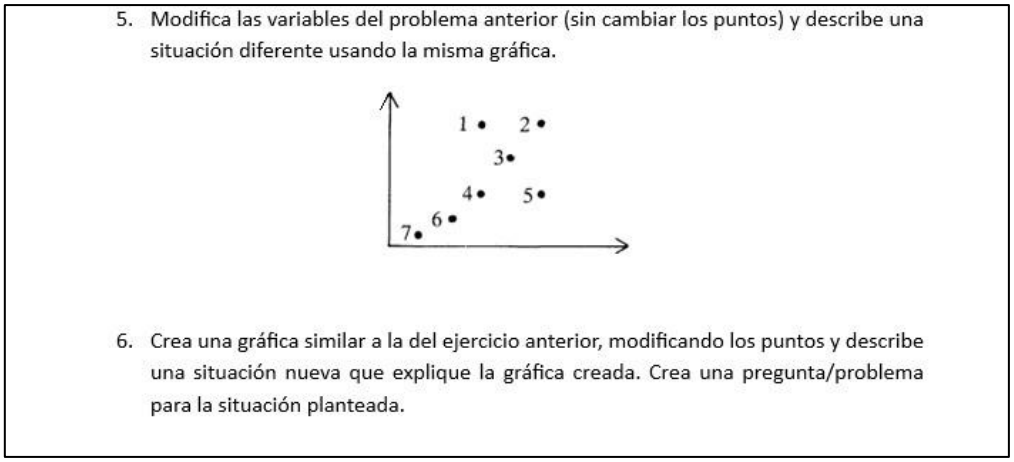


Imagen 2. Preguntas 5 y 6 de la Tarea 1.1. Fuente: elaboración propia

Además, se realiza una formalización del trabajo realizado, definiendo “reformulación de problemas” y los aspectos que se deben atender al modificar un problema (enunciado/contexto, información y objetivo/pregunta). De esta manera, en las actividades siguientes (1.2 y 1.3) nos adentramos más profundamente en la

reformulación haciendo hincapié en el reconocimiento de los cambios realizados y la resolución del problema formulado.

En la actividad 1.4 (al igual que sucederá en las tareas 2 y 3 con las actividades 2.4 y 3.4), se pide al alumnado que vuelva a escribir uno de los problemas formulados durante la tarea, para que sea analizado y resuelto por otro/s compañero/s. En estas actividades se realiza coevaluación y heteroevaluación a través de una rúbrica.

2.2 Tarea 2. Seguimos creando

La tarea 2 (Tabla 3) propone a los estudiantes una situación habitual de compra, en la que se ofrece una tabla con la información que deberán modificar (cambiar los datos) de forma que el problema siga estableciendo una relación entre las variables (Imagen 3). También se incluirán en esta tarea algunas situaciones en las que las tablas con datos no son adecuadas para la situación ofrecida, en las que deberán realizar una reformulación del contexto cuando sea posible o bien para que la información dada sea adecuada (Imagen 4).

Tarea 2: Seguimos creando

Estrategia de reformulación: *Modificar los datos del problema dado*		
Actividades		**Saberes básicos**
2.1.	Comprando sal	Función como tabla
2.2.	Pasos diarios	Función como enunciado
2.3.	El parquímetro	Función como gráfica a trozos
2.4.	Resolución y evaluación	Resolución de problemas-coevaluación

Tabla 3. Actividades que conforman la Tarea 2. Fuente: elaboración propia

1. Durante la mañana de los lunes, Pedro realiza la compra semanal en el mercadillo de su pueblo. En la tienda de especias a granel se encuentra un cartel que expresa las relaciones entre la cantidad de sal que compra y su precio. Dibuja una gráfica que exprese los precios de cualquier cantidad de sal para que Pedro y el resto de los clientes sepan cuanto deben pagar.

Cantidad de sal (gr)	Precio (€)
50	0,05
100	0,10
200	0,20
250	0,25
350	0,35
500	0,50

Imagen 3. Pregunta 1 de la tarea 2.1. Fuente: elaboración propia

Cantidad de sal (gr)	Precio (€)
50	0,06
100	0,13
200	0,24
250	0,34
350	0,22
500	0,17

Cantidad de sal (gr)	Precio (€)
54	0,05
12	0,10
2	0,20
25	0,25
35	0,35
50	0,50

¿Teniendo en contexto y las variables de las tablas, podemos considerar que los datos son correctos? ¿Puedes prever el precio para otras cantidades de sal? Justifica tu respuesta.

5. ¿Sería posible alguna de las tablas anteriores en otra situación? Enuncia una situación en la que sea posible alguna de esas tablas.

Imagen 4. Pregunta 5 de la tarea 2.1. Fuente: elaboración propia

Tal y como se aprecia en la imagen anterior, además de trabajar el cambio de datos incidiendo en la compresión de los cambios realizados, se combina con los cambios de contexto trabajados en la tarea 1.

Durante la tarea se realiza una formalización de lo aprendido (Imagen 5), de forma que los alumnos tengan claro lo que hemos trabajado.

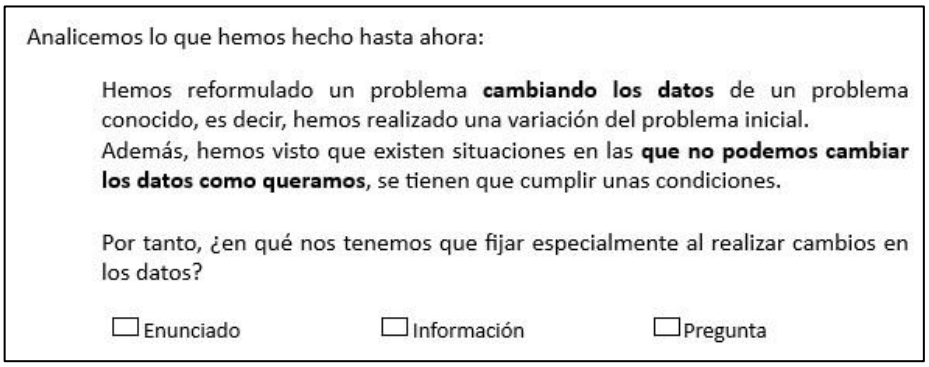


Imagen 5. Síntesis de lo aprendido . Fuente: elaboración propia

2.3 Tarea 3. ¿Qué quieres saber?

En esta tarea se trabaja la reformulación mediante cambios de objetivo. En los ejercicios propuestos este cambio de objetivo se traduce en cambiar la pregunta que plantea el problema (Tabla 4).

Tarea 3: ¿Qué quieres saber?	
Estrategia de reformulación*: Cambio del objetivo del problema*	
Actividades	**Saberes básicos**
3.1. El automóvil	Función como gráfica
3.2. Distancia de seguridad	Función como enunciado gráfico
3.3. Rozando el cielo	Función como tabla
3.4. Resolución y evaluación	Resolución de problemas-coevaluación

Tabla 4. Actividades que conforman la Tarea 3. Fuente: elaboración propia

Por ejemplo, en la actividad 2 (imagen 6), se plantea un ejercicio que incluye un enunciado gráfico y se pide la representación gráfica correspondiente a los datos proporcionados y, luego, se realiza una pregunta en base a esta representación. El objetivo es que, en los ejercicios posteriores, formulen preguntas diferentes que puedan ser respondidas con la información de la representación gráfica que han construido.

Distancia de seguridad

1. Hace unos años, La Dirección General de Tráfico lanzó una campaña de concienciación sobre la distancia de seguridad entre vehículos en la carretera. Esta imagen formaba parte de la campaña.
a) Representa en una gráfica los datos que aparecen en la imagen.
b) De acuerdo con la gráfica, ¿crees que un vehículo que circula a 60 Km/h tiene suficiente espacio para detenerse con 32 metros de distancia?

Imagen 6. Actividad 2 de la Tarea 3. Fuente: Alonso y Soguero, 2015

En cada actividad (Imagen 7), después de haber formulado el problema, se pide que lo resuelvan y que reescriban el problema si consideran que su formulación podría mejorarla.

2. Añade apartados c) y d) al ejercicio 1. Estos apartados deben ser preguntas que se puedan responder con la gráfica dibujada en el apartado a).

3. Explica por qué crees que la pregunta que acabas de formular es adecuada para poder responderse con los datos que tenemos.

4. Escribe otra pregunta que se pueda responder con la gráfica de la primera pregunta.

5. Resuelve la pregunta que has formulado en la pregunta 2.

6. Ahora que has resuelto el problema que formulaste en la pregunta 2, ¿harías cambios en el enunciado? Si haces cambios, reescribe el enunciado de la pregunta con los cambios que harías, si no haces cambios, escribe el motivo de por qué consideras que no es necesario hacer cambios.

Imagen 7. Preguntas de la 2 a la 6 de la tarea 3. Fuente: elaboración propia.

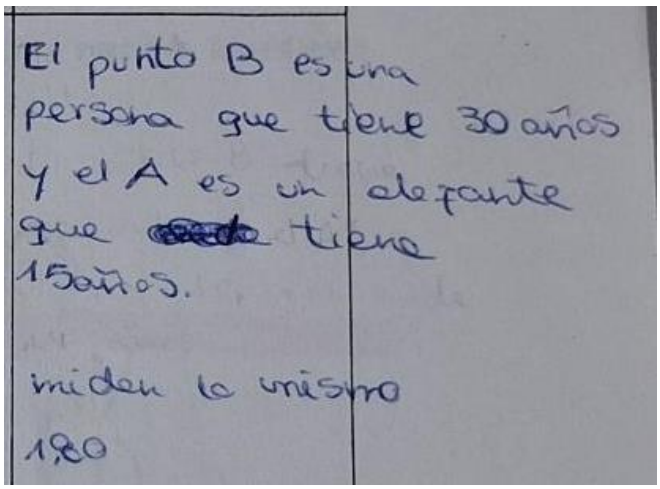
A modo de cierre, la actividad 3.4 consistirá en que el alumnado se rete entre sí con nuevos problemas generados por ellos mismos. Estos problemas los deberán

resolver, siempre que sea posible, y recogerán si es resoluble y qué solución han obtenido. Con esto se pretende que incorporen las diferentes estrategias estudiadas.

3. Resultados de la experimentación.

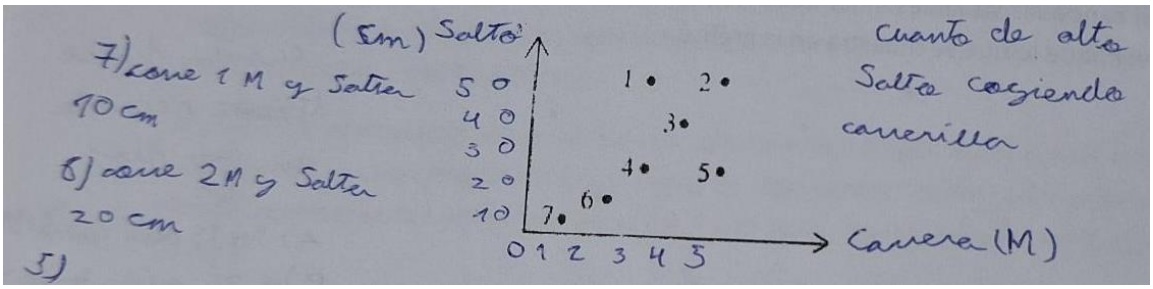
La propuesta de aula se puso en práctica en un centro urbano de Tenerife, con el grupo de diversificación curricular de 4ºESO, compuesto por 11 estudiantes (7 chicos y 4 chicas), y a lo largo de 16 sesiones. Este alumnado presenta una desmotivación generalizada hacia el aprendizaje de las matemáticas y un bajo rendimiento académico.

Dadas las características del alumnado, inicialmente mostraron cierto escepticismo ante la nueva actividad que se les proponía. Pero, rápidamente, una vez se inició el trabajo de las actividades de la tarea 1 el grupo se implicó en su resolución y se mostró participativo. Se pudo constatar, por un lado, que los estudiantes manifestaban un conocimiento de los conceptos básicos de funciones, lo que permitía profundizar en aspectos relacionados con la formulación de problemas. En cuanto a la formulación, inicialmente los estudiantes presentan dificultades para identificar nuevos contextos, pues solo consideraban situaciones que involucran a personas. Esto es de esperar dado que la actividad es totalmente nueva para ellos. Pero, una vez surgen nuevos contextos para los problemas, les resulta más fácilmente imaginarlos y resolver las actividades que se les propone (Imagen 8 y 9).



El punto B es una persona que tiene 30 años y el A es un elefante que tiene 15 años. Miden lo mismo: 180

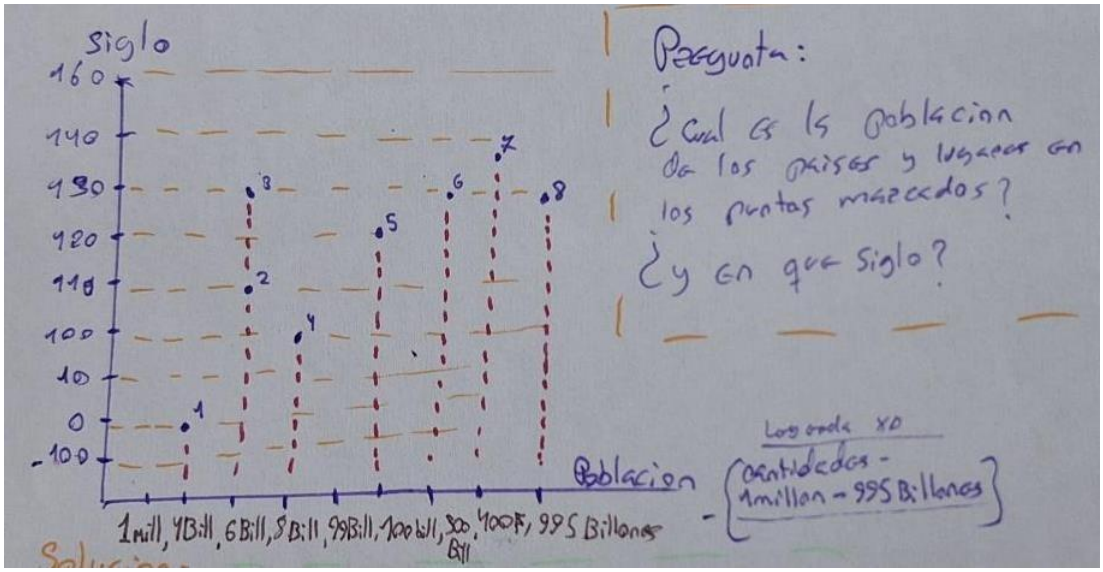
Imagen 8. Respuesta del alumno A-01 a la pregunta 1 de la actividad 1.1. Fuente: elaboración propia.



Cuánto de alto salta cogiendo carrerilla. 7) Corre 1 m y salta 10 cm 6) corre
2 m y salta 20 cm

Imagen 9. Respuesta del estudiante A-02 a la pregunta 4 de la actividad 1.1. Fuente: elaboración propia.

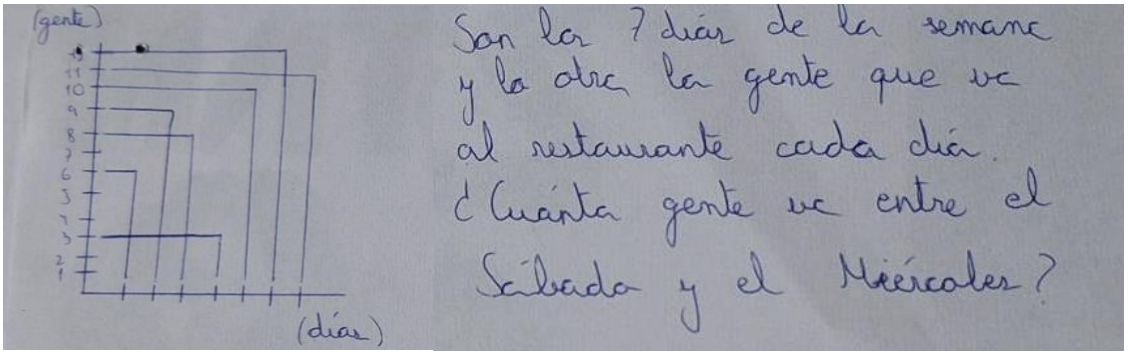
Por otra parte, surgieron contextos futuristas e irreales, en los que se cometen fallos matemáticos. Por ejemplo, en la imagen 11 se muestra como los valores representados en el eje Y no siguen la misma escala y se representan valores negativos en el eje positivo. Además, teniendo en cuenta que la variable asociada al eje Y es el siglo, no tiene sentido hablar de siglos negativos.



Pregunta: ¿Cuál es la población de los países y lugares en los puntos marcados? ¿Y en qué siglo?

Imagen 10. Respuesta del estudiante A-03 a la pregunta 4 de la actividad 1.1. Contextos irreales, escala alterada y siglos negativos. Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, el alumnado también formuló problemas correctos en situaciones novedosas y con objetivos interesantes.



Son los 7 días de la semana y la otra la gente que va al restaurante cada día. ¿Cuánta gente va entre el sábado y el miércoles?

Imagen 11. Respuesta del estudiante A-04 a la pregunta 4 de la actividad 1.1. Fuente elaboración propia.

Se realizaron encuestas anónimas en las que tenían que valorar la actividad realizada durante la sesión. Estas encuestas se realizaron al finalizar la sesión y la pregunta que les realizó fue: ¿Te ha gustado la actividad realizada?

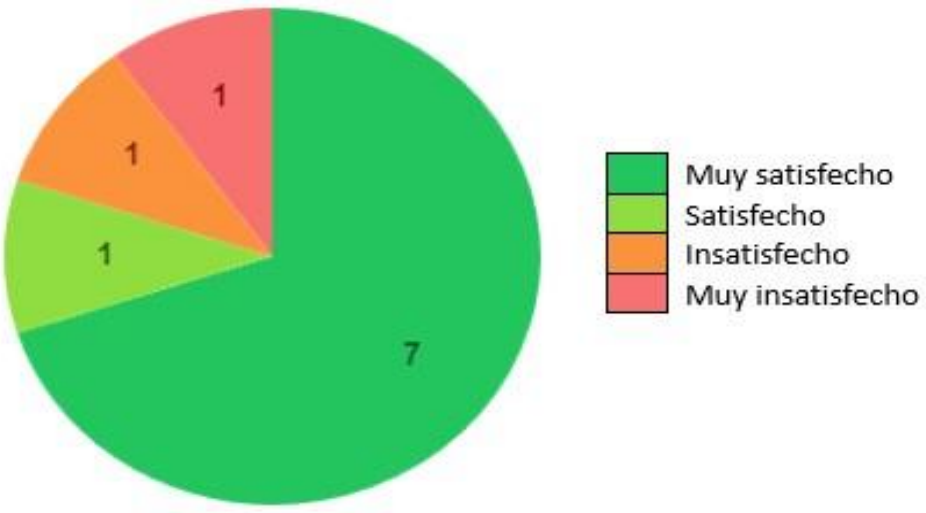


Imagen 12. Respuestas a la encuesta.

En general, los estudiantes expresan que las actividades les hace sentir bien y se mostraban capaces de abordarlas (Imagen 12). Preguntados por las valoraciones

“Insatisfecho” o “Muy insatisfecho” los estudiantes señalaron que este rechazo es a la asignatura y no al desarrollo de la actividad.

A medida que transcurrió la experiencia, se comprobó que los estudiantes fueron incorporando el resto de las estrategias de formulación. Y, a través de este trabajo de formulación se puso de manifiesto que la relación función entre variables no resulta sencilla de entender por los estudiantes de este nivel, mostrando dificultades a las tareas de modificación de datos, por ejemplo, en las que perdían la relación funcional.

Por su parte, la motivación del alumnado y su entusiasmo por la realización de las actividades quedó patente en todas las sesiones en que se desarrolló, modificando su disposición ante la clase de matemáticas, pasando de no querer que llegase la hora a olvidarse de que el tiempo de la clase había concluido.

4. Conclusión

A lo largo de este documento se puede observar que la formulación de problemas es un conocimiento que se debe desarrollar en las aulas de matemáticas de todos los niveles educativos. Aquí se ha presentado una propuesta para trabajar el tema de funciones a través de la formulación de problemas, de forma que los estudiantes adquieran algunas de estas estrategias. Los resultados del aula permiten observar que la formulación de problemas es una actividad “de suelo bajo y techo alto” que facilita el acceso de todos los estudiantes y permite que se modifique su actitud hacia el aprendizaje de esta materia. Por tanto, necesitamos seguir fomentando la formulación de problemas en las clases de matemáticas.

Referencias

Alonso, R., & Soguero, C. (2015). *Funciones (muy) reales. Unidades didácticas. Educación Secundaria. Matemáticas*. Recuperado el 7 de abril de 2024, de https://matematicasentumundo.es/TEXTOS/textosb.htm#:~:text=Funciones%20muy%20reales

Ayllón, M. F. (2005). *Invención de problemas con números naturales, enteros, negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación.*

Universidad de Granada, España.

Ayllón, M. F., & Gómez, I. A. (2015). La invención de problemas como tarea escolar.

Escuela abierta, 29-40.

Brown, S., & Walter, M. (1993). Problem Posing: Reflections and Applications. *Psychology Press*.

Cai, J., Peng, A., Li, M., Lin, L., & Cao, L. (2022). Problem Posing and Its Relationship with Teaching Experience of Elementary School Mathematics Teachers from Ethnic Minority Area in Southwest China. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(2), 1-14.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 1-15. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Univerdidad de Granada.

Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. En F. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Edits.), *Mathematical Problem Posing. From Reaserach to Effective Practice* (págs. 493-511). New York, NY: Springer.

English, L. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 183–217.

Evans, J. (2000). *Adults' Mathematical Thinking and Emotions.* London: Routledge.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the Problem-Posing Abilities of Prospective

Elementary and Middle School Teachers. En F. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Ed.),

Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education. New York, NY: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

INEE. (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español.* Recuperado el 25 de febrero de 2024, de https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/pisa-2022-programa-para-la-evaluacioninternacional-de-los-estudiantes-informe-espanol_183950/

Krutetskii, V. A. (1969). An investigation of mathematical abilities in schoolchildren. En J. Kilpatrick , & I. Wirszup (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. 2, págs. 5-57). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemática en la formación de profesores. *Actas VII CIBEM*, (págs. 129-140). Montevideo, Uruguay.

Ministerio de Educación, F. P. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Boletín Oficial del Estado. Núm 52, 24386-24504.

Ministerio de Educación, F. P. (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado. Núm 76*, 41571-41789.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs.* Shell Centre for Mathematical Education Publications.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics,, 14*(1), 19-28.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education, 27*(3), 293-309.

Diseño de una situación de aprendizaje para la noción de Función en 1º de ESO

Paula Roca Borrallo
paularocaborrallo2000@gmail.com
Universidad de Huelva

Myriam Codes Valcarce
myriam.codes@ddi.uhu.es
Universidad de Huelva

Lorenzo Castilla Mora
lorenzo.castilla@ddc.uhu.es
IES Diego de Guzmán y Quesada (Huelva)

Rocío Pérez Guzmán
rocio.perez@ddi.uhu.es
CEIP Aurora Moreno (Huelva)

Núcleo temático: Procesos, Formación del Profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Esta comunicación tiene una doble finalidad de divulgación. Por un lado, la de un trabajo realizado en el seno de un grupo de docentes en formación continua de la Universidad de Huelva y, por otro, la de una situación de aprendizaje propuesta para introducir la noción de función en 1º de ESO. Una versión de dicha propuesta se

implementó en una clase de una de las profesoras integrantes del grupo de formación continua. Tras un análisis detallado del currículo y de la noción de función, mostramos una situación de aprendizaje en la que un problema real, vinculado con dos objetivos de desarrollo sostenible, es el punto de partida para acercar al alumnado de 1º de ESO a la noción de función lineal. La situación de aprendizaje se propone desde un planteamiento de alta demanda cognitiva, con la idea de que el alumnado construya su pensamiento matemático.

Palabras clave: situación de aprendizaje, función, modelización, representación gráfica, tareas de alta demanda cognitiva.

1. Introducción

La implementación de la nueva ley de Educación nos lleva a los grupos de formación continua a plantearnos las propuestas que diseñamos para innovar en las aulas en aras de mejorar nuestra docencia y el aprendizaje de nuestro alumnado. Las situaciones de aprendizaje etiquetan unas prácticas que están en sintonía con el trabajo que llevamos a cabo en el Proyecto de Investigación Colaborativa, en cuanto a la idea de desarrollar propuestas didácticas que conlleven la construcción de conocimiento del alumnado y le permitan aprender a aprender en un entorno colaborativo. En el último proyecto hemos diseñado una situación de aprendizaje para introducir la noción de función en 1º de ESO.

Esta situación se enmarca en el logro de un objetivo de desarrollo sostenible, siguiendo así las directrices de la ley que demandan un aprendizaje global. Además, se plantea con una metodología investigativa de alta demanda cognitiva en la que, a través de un proceso continuo de trabajo individual o en pequeño grupo, el alumnado gestiona, bajo la supervisión del docente, la construcción de su conocimiento.

1.1 La noción de función

La noción de función es uno de los conceptos matemáticos que se suelen situar en la transición de la matemática elemental al pensamiento matemático avanzado, entendiendo este en el sentido de Tall (1991) cuando considera que “el paso de la

matemática elemental al pensamiento matemático avanzado involucra una transición: de la descripción a la definición, del convencimiento a la demostración lógica basada en las definiciones" (p. 20).

En el currículo español el pensamiento funcional está presente en todos los niveles educativos, desde la Educación Infantil, pero la noción de función no se explicita hasta el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Cañadas y Molina (2016) describen el pensamiento funcional como un "constructo cognitivo" (p. 211) relacionado con los sistemas de representación (simbólico, tabular, pictórico, verbal y manipulativo) y con el razonamiento inductivo (generalización y patrones), que son elementos constitutivos de la noción matemática sobre la que se centra ese pensamiento: la noción de función.

En el primer curso de ESO se hacen explícitos algunos de los saberes básicos vinculados con la idea de función: patrones, variables, relaciones de dependencia y modos de representación de estas relaciones. El abordaje de estos elementos matemáticos es clave para construir una noción de función consistente, capaz de soportar la construcción de otras nociones matemáticas, como la de límite, derivabilidad, integración, etc. Algunas investigaciones sostienen que una de las dificultades en el aprendizaje de conceptos matemáticos que se fundamentan en la noción de función, está causada por una concepción inconsistente o incoherente de ella (Codes, 2010; McDonald y otros, 2000).

1.2 Situación de Aprendizaje

Las situaciones de aprendizaje, la nueva propuesta pedagógica del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, se caracterizan por ser situaciones contextualizadas que engloban una serie de saberes básicos. Estas situaciones, además, se construyen sobre una serie de objetivos que sirven de herramienta para la resolución de retos o tareas de alta demanda cognitiva que guían al alumnado en la construcción de nuevos procesos de aprendizaje. Por otro lado, estas situaciones

deben servir para trabajar la educación en valores, la reflexión crítica, la responsabilidad social y la autonomía, entre otros aspectos.

2. La propuesta

En algunas leyes educativas de las distintas Comunidades Autónomas, se especifica que los saberes básicos que se trabajan en las situaciones de aprendizaje deben pertenecer a distintas áreas del currículo. Los saberes básicos que se trabajan en nuestro diseño son los correspondientes a las áreas de Educación Física, Ciencias Sociales y Matemáticas. En este diseño nos centramos exclusivamente en las actividades que trabajan los saberes básicos del área de Matemáticas.

La situación que diseñamos para trabajar las áreas del currículo mencionadas, es una carrera benéfica cuyo objetivo es recaudar fondos para las familias en riesgo de exclusión social. Dicha propuesta está diseñada para llevarse a cabo en tres sesiones; la primera de contextualización, la segunda donde nos acercaremos a la idea de función; y la tercera donde pasaremos a la representación gráfica y a la forma de la función lineal $ff(xx) = mm \cdot xx + nn$.

Durante el desarrollo de las actividades, trabajaremos con dos tipos de agrupaciones: en pequeño grupo (la clase se divide en cinco grupos de tres o cuatro personas), y en gran grupo (las actividades se realizan a nivel de aula, sin agrupaciones dentro de esta).

A continuación, pasamos a describir las tres sesiones orientadas a trabajar el área de Matemáticas.

2.1.- Objetivos

Los objetivos que esperamos que el alunando alcance son los siguientes:

- Reconocer situaciones de proporcionalidad en situaciones cotidianas.
- Trabajar la representación matemática de situaciones cotidianas, a través de expresiones algebraicas y otras formas de representación, centrándonos en la gráfica lineal.

- Reconocer los patrones de variación entre dos variables de una función lineal.
- Desarrollar la ideade función lineal a través de la ejemplificación, acercándonos a la forma "$ff(xx) = mm \cdot xx + nn$".
- Promover el pensamiento crítico y la comunicación de resultados empleando términos matemáticos.

2.2 Sesión1: Contextualización

La sesión comenzará con la historia de Sara, una historia ficticia sobre una adolescente de quince años de una familia numerosa en riesgo de exclusión social que vive en una zona desfavorecida.

En dicho relato se narra cómo es un día para ella y su familia. Empieza por la mañana, narrando como Sara ayuda a sus hermanos pequeños a vestirse para ir colegio y a la escuela infantil. Se muestra como Sara debe ir desabrigada pues no han podido comprar abrigos nuevos para sus hermanos, y, aunque sus clases empiezan antes, pues está en el instituto, no le supone ningún problema llevarlos al colegio porque no asistirá a clase.

En vez de ir al instituto, Sara va al mercadillo a ayudar a su familia con el puesto de ropa, pues en casa tienen siete bocas que alimentar. Sara se ve obligada a abandonar los estudios para enfocarse en el rol de cuidadora que ha desempeñado hasta ahora, tal y como hace su madre.

En la última escena, una de las hermanas de Sara, le comenta que no irá a la escuela al día siguiente porque está con la menstruación y la falta de recursos económicos provoca una carencia de productos de higiene de primera necesidad.

De fondo, se escucha al padre y a la madre discutir mientras la televisión suena a un alto volumen, de nuevo, Sara y algunos de sus hermanos no pueden conciliar el sueño hasta que el ruido cesa.

2.2.1 Parte 1

Tras la historia, se le planteará al alumnado una serie de preguntas de forma abierta en el aula:

- ¿Qué podemos hacer nosotros para ayudar a familias como la de Sara?
- ¿Cómo podemos recaudar y hacer llegar recursos a estas familias?

Tras la lluvia de idea, se les explicará que el centro educativo va a organizar una carrera solidaria para ayudar a familias como las de Sara. Es entonces cuando se organizarán grupos de cuatro o tres corredores para la recaudación de fondos.

2.2.2 Parte 2

A partir de este momento, se trabaja en grupo pequeño. A cada componente del grupo se le dará un carné de corredor, donde el alumnado apuntarán los patrocinadores y patrocinadoras que haya conseguido. El carné funciona de la siguiente forma: si el grupo se compone de cuatro alumnos y alumnas, cada patrocinador/a ofrecerá una cantidad de dinero por cada vuelta que dé el grupo en total. Poe ejemplo, si el patrocinador o patrocinadora se compromete a dar diez céntimos por vuelta, y entre todos los integrantes del grupo logran dar 30 vueltas, el total que tendrá que aportar al grupo es de 3 €.

Tras repartir el carné se les planteará la siguiente pregunta: Si con 10 € la organización es capaz de ofrecer productos de higiene de primera necesidad a una familia como la de Sara durante un mes, y en la carrera el grupo consigue dar 27 vueltas en total, ¿cuánto dinero deben conseguir por vuelta para ayudar a tres familias durante un mes? ¿Y durante un año entero?

Esta pregunta se discutirá en pequeño grupo y se expondrán en una discusión de gran grupo antes de terminar la sesión.

2.3 Sesión 2: Acercándonos a la idead de función

2.3.1 Parte 1

La sesión comienza con el trabajo en pequeño grupo respondiendo a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas vueltas creéis que podréis dar en total el día de la carrera?
2. Teniendo en cuenta la respuesta a la pregunta uno, ¿cuánto dinero recaudaría el grupo en cada vuelta?
3. Es posible que el día de la carrera estemos más cansados, o más activos. Calculad el dinero que recaudaría el grupo si dieseis las vueltas previstas, tres vueltas menos en total y tres vueltas más en total.
4. Imaginad que tenéis el poder de correr súper rápido, calcula cuánto recaudaría el grupo si dais en total:
    a. 34 vueltas
    b. 43 vueltas
    c. 102 vueltas
    d. Un número cualquiera de vueltas. Expresadlo de forma matemática/ algebraica.

2.3.2 Parte 2

La sesión finalizará con una puesta en común de las preguntas 4 y 5 en el grupo clase.

2.4. Sesión 3: Representación gráfica y reto

Para esta sesión el alumnado deberá emplear los resultados obtenidos en la sesión anterior. Las actividades seguirán el modelo de preguntas de la sesión anterior.

2.4.1 Parte 1: Representación Gráfica

Se le pedirá al alumnado que, en pequeños grupos (los mismos de la sesión anterior), representen gráficamente los datos obtenidos en la sesión anterior, dicha representación se realizará sobre un papel cuadriculado.

Pregunta vinculada de la ficha:

"1.- Representa de forma gráfica el dinero ganado si el grupo diese: Una vuelta; Tres vueltas; Cinco vueltas; Siete vueltas; Nueve vueltas".

Debate y Reflexión: Una vez realizadas las representaciones gráficas, se realizará una puesta en común de las distintas representaciones. El objetivo es debatir sobre qué representación es más acertada en esta situación, haciendo un análisis sobre el tipo de información que aportan y las ventajas e inconvenientes de cada una.

Para agilizar dicha puesta en común, se plantean las siguientes preguntas:

Siguientes preguntas vinculadas de la ficha:

"2.- ¿Qué información aporta vuestra representación? ¿Qué ventajas y desventajas tiene la forma de representación gráfica que habéis utilizado?"

"3.- Viendo las representaciones de tus compañeros, ¿qué grupo tendrá que dar más vueltas para alcanzar los 20 € en la recaudación?"

2.4.2 Parte 2: Reto final

Esta actividad se realizará en pequeño grupo. En la sesión anterior nos acercamos a la forma de la función lineal de proporcionalidad $ff(xx) = mm \cdot xx$. Para llegar a la forma general de función lineal $ff(xx) = mm \cdot xx + nn$ se les plantea el siguiente reto o actividad final de la ficha del anexo:

"Imaginad que aparece un nuevo patrocinador que os da 10 euros por participar de forma grupal, independientemente del número de vueltas que deis, y un euro por cada vuelta de cada componente del grupo. ¿A algún grupo le interesa cambiar todos sus

patrocinadores y quedarse solo con el nuevo? En caso afirmativo, ¿a cuáles y por qué? Justificadlo usando tanto cálculos numéricos como gráficas.

Como hiciste en la sesión anterior, expresa de forma matemática cuánto se ganaría según el número de vueltas que se dé con el nuevo patrocinador. ¿Podríamos representarlo de forma gráfica? En caso afirmativo represéntalo y en caso negativo explica el porqué."

Una vez que los grupos discutan y resuelvan el reto final, se realizará una puesta en común a nivel de aula para obtener una visión más amplia de los beneficios y desventajas de la oferta del nuevo patrocinador.

Reflexión: Al final la sesión se le pedirá al alumnado que conteste unas últimas preguntas de reflexión, las cuáles realizarán de forma individual:

- ¿Qué información has necesitado para calcular las ganancias del grupo?
- ¿Qué has aprendido con estas dos sesiones?
- ¿Para qué crees que puede servir lo que has aprendido?
- ¿Con qué otros elementos matemáticos, no trabajados en las sesiones, crees que puede guardar relación?

3. Análisis de la propuesta

En este apartado realizaremos un breve análisis de los conceptos y procesos de pensamiento matemático que se trabajan en las sesiones de esta propuesta.

Para ello, precisaremos de una división en tres ámbitos: la consecución de los Objetivos de Desarrollo Sostenible, el proceso de modelización y el valor de los distintos modelos de representación.

3.1. Respondiendo a Objetivos de Desarrollo Sostenible

De acuerdo con el currículo (Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria

Obligatoria), las programaciones didácticas contemplarán situaciones de aprendizaje en las que se integren elementos curriculares de las distintas materias para garantizar que la práctica educativa atienda a la diversidad, a las características personales, a las necesidades, a los intereses, a la igualdad efectiva entre hombres y mujeres y al estilo cognitivo del alumnado. En este sentido, nuestra propuesta parte de una problemática actual relacionada, principalmente, con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS): 1 Fin de la pobreza y 10 Reducción de las desigualdades.

Estos dos objetivos, abordables desde diferentes disciplinas, se van a plantear desde la transversalidad de la educación en valores, con una puesta en escena en la que intervienen, en una primera aproximación, las asignaturas de Educación Física, Ciencias Sociales y Matemáticas. Consideramos que el contexto que proponemos y, por ende, la consecución de los objetivos secundarios que se pueden plantear con estos dos ODS, se enriquece notablemente por la intervención de otras materias. Sin embargo, en esta propuesta, y dada la naturaleza de las Jornadas, nos centraremos solo en el trabajo matemático, dejando las cuestiones sociales y las relativas a la educación física para un abordaje más completo en el que el contexto de nuestra situación de aprendizaje derivaría en otras preguntas para cuyas respuestas sería necesario poner en juego conocimientos de esas disciplinas.

3.2. Hacia el proceso de modelización

Modelizar es el germen de la noción de función. Explicar con lenguaje matemático una situación de la vida cotidiana, es lo que da sentido a la idea de función. Las preguntas que cierran la primera sesión (Si ..., ¿cuánto dinero deben conseguir por vuelta para ayudar a tres familias durante un mes? ¿Y durante un año entero?), a pesar de no requerir un proceso completo de generalización, requieren empezar a pensar en el patrón que vincula las vueltas que se dan, con el dinero que aportan los patrocinadores y el obtenido por el grupo tras la carrera. Una discusión apropiada sobre las posibles respuestas deriva en la idea de variables que modelizan situaciones de cambio y de relaciones de dependencia entre ellas.

No hay una única respuesta a estas preguntas, y para responderlas no es necesario emplear el lenguaje algebraico. Sin embargo, prepara la mente para comprender las relaciones de dependencia que se dan entre las variables que intervienen.

Las tres primeras preguntas de la sesión 2, junto con los tres primeros apartados de la pregunta 4, relacionan casos particulares de valores de las variables: dinero aportado por los patrocinadores (euros por vuelta), vueltas dadas por los miembros del grupo y dinero obtenido por el grupo tras la carrera. Estos conforman el espacio de experimentación del que se espera que surja el patrón que generaliza la relación lineal de dependencia $ff(vv) = dd = pp \cdot vv$, siendo pp el valor constante del dinero que aportan los patrocinadores, vv la variable independiente cuyos valores son el número de vueltas, y $ff(vv)$ la función que describe la cantidad de dinero dd que obtiene el grupo al finalizar la carrera, que depende del número de vueltas que dé el grupo.

El final de la sesión 2 requiere del uso del álgebra para explicitar las relaciones entre las variables. La puesta en común permitirá poner en valor el potencial del álgebra al facilitar un modelo, la función de proporcionalidad $ff(vv) = pp \cdot vv$, que sintetiza los cálculos aritméticos que requiere responder a las preguntas que se han ido planteando a lo largo de las sesiones. El pensamiento abstracto que requiere llegar a la generalización de la expresión de esa función lineal deja una impronta en la mente del alumnado que le servirá de guía para situaciones similares, por ejemplo, la planteada en el reto final.

La situación del reto final plantea llegar al modelo de una función lineal cualquiera, más allá de una proporción directa: $ff(xx) = mm \cdot xx + nn$. Para llegar a este modelo es clave que el alumnado haya entendido en profundidad el papel de las diferentes variables en el modelo y las relaciones entre ellas.

3.3. El valor de diferentes sistemas de representación

El último elemento matemático vinculado con la función que se trabaja en esta propuesta es el de los registros de representación, concretamente el registro gráfico, clave en el estudio general de las funciones. La peculiaridad de nuestra propuesta de

mantener un nivel alto de demanda cognitiva, compatible con el papel que se espera del alumnado de constructor de su conocimiento matemático, se refleja nuevamente al no mostrar a priori una única forma gráfica de representación de la información que se ha manejado a lo largo de la actividad. Al contrario, se espera institucionalizar el modo de representación cartesiano en la puesta en común al finalizar la tarea.

Esta puesta en común se presta a visualizar el potencial de la representación gráfica de una función por la cantidad de información que se desprende de este registro que, en cursos posteriores será de gran ayuda.

4. Reflexiones finales

En esta propuesta hemos seguido los procesos de matematización horizontal y vertical propios del trabajo matemático. En la primera sesión, cuando se expone la historia de Sara y se informa de la celebración de la carrera benéfica, se le presenta al alumnado el contexto del que nace la pregunta que requerirá de un modelo matemático para ser respondida. De este modo, hacemos que el alumnado se vea inmerso en el proceso de matematización horizontal en un contexto cercano y realista. En la segunda sesión, el alumnado, sin desvincularse de este contexto, trabaja la función $ff(xx) = mmxx$ con la relación proporcional del dinero obtenido según las vueltas dada. Este proceso de matematización vertical continua en la tercera sesión con la representación gráfica, para terminar de nuevo con un proceso de matematización horizontal para dar respuesta al reto final. Esta respuesta, la aceptación de un patrocinador u otro, vendrá dada por el resultado del análisis del comportamiento de las funciones que modelizan ambas situaciones.

Cuando comenzamos el diseño de este proyecto, debatimos sobre el foco de la planificación: ¿partimos del contenido matemático o de la situación de aprendizaje? Esta pregunta no tiene una respuesta única por la idiosincrasia de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por un lado, debemos ser capaces de ver qué contenidos matemáticos son susceptibles de ser abordados en una situación dada. Por otro lado, debemos tener la capacidad de diseñar buenas situaciones que den sentido a los contenidos matemáticos que se deben abordar según las directrices curriculares.

Dependiendo de las necesidades de cada momento, pondremos en juego una u otra destreza docente.

Lo que no dudamos en la planificación es que la situación didáctica fuera flexible. Consideramos deseable que sea flexible en dos sentidos. Por un lado, flexible para adaptarse a las diferentes realidades, tanto del centro, como del aula, tales como los diferentes niveles de desarrollo cognitivo dentro del aula o los recursos de los que dispone el centro educativo. Por otro lado, flexible para adaptarse al nivel educativo simplificándose o complejizándose, de modo que el diseño evolucione para trabajar los conocimientos previos, o para profundizar en el concepto matemático.

Para concluir, consideramos que el diseño es una parte importante de la labor docente, pero también lo es la toma de decisiones que se lleva a cabo dentro del aula para poner en práctica este diseño, pues es el docente quien realmente conoce al alumnado. De estas decisiones depende, en gran medida, el éxito del diseño y de su implementación.

Referencias

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. Granada.

Codes, M. (2010). Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional. [Tesis doctoral. Universidad de Salamanca]. Repositorio Documental Gredos. http://hdl.handle.net/10366/76452

McDonald, M. A., Mathews, D. M., y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J. Kaput (eds.). Research in Collegiate Mathematics Education. IV. Conference Board of the Mathematical

Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education, 8 (pp. 77-102). American Mathematical Society.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.).

Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). Kluwer Academic Publishers.

12-16: nada más que añadir

Teresa Cepero Fustero
<teresacepero@cpiespartidero.es>
CPI El Espartidero, Zaragoza

Arancha López Lacasta
<mariaaranzazulopez@cpiespartidero.es>
CPI El Espartidero, Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz
<danielsierra@cpiespartidero.es>
CPI El Espartidero, Zaragoza

Núcleo temático: Recursos para el aula; Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

La comunicación pretende transmitir las *sensaciones* de los autores, con respecto al trabajo que están desarrollando en la implementación de una programación de los cuatro cursos de la ESO, al margen de los libros de texto, reutilizando y adaptando materiales “antiguos” (pero no desfasados) y más actuales. Se da una visión general de la puesta en práctica, algunas pinceladas de cada uno de los cursos y se presentan brevemente algunos casos prácticos que intentan dar una idea del tipo de tarea que estamos llevando a cabo.

Palabras clave: Renovación Pedagógica, Currículo, Resolución de Problemas.

1. El título

Aunque parezca extraño, vamos a hablar del título de la comunicación antes de la introducción. Habrá personas (de cierta edad) que al ver en el título “12-16”, les habrá venido a la mente el proyecto que llevó a cabo el Grupo Cero de Valencia hace bastantes años. En efecto, nuestro trabajo parte de ello. De ahí, lo de “nada más que añadir”. Pero, con esa frase, también hemos querido invitar a la reflexión sobre lo que hicieron varios grupos de renovación pedagógica en todo el estadoespañol entre las décadas de los 80 y los 90 del siglo pasado. Es una exageración decir que no hay “nada más que añadir”, pero sí que es cierto que muchas de las cosas que se están diciendo ahora ya lo dijeron entonces; evidentemente todo requiere un progreso y una actualización. Así que sirva esta comunicación a modo de “homenaje” a toda esas personas. Haberla presentado en las JAEM de Valencia le hubiera conferido un carácter especial, máxime teniendo en cuenta el relativamente reciente fallecimiento de Paco Hernán en aquel momento (a quien no conocimos en persona), pero parece ser que las circunstancias no fueron las propicias.

2. Introducción

La presente comunicación surge de nuestra experiencia de trabajo durante estos cuatro últimos cursos. En el primero de ellos (el 20-21), decidimos alejarnos de la *programación* que suelen utilizar los libros de texto y, reutilizando materiales antiguos, crear nuestra propia ruta, nuestra propia programación. Es complicado en el tiempo de una comunicación reflejar todo el trabajo de cuatro cursos, por eso, en esta ocasión hemos optado por intentar transmitir nuestras *impresiones*, contar que *sentimos* como profesores, en qué nos ha hecho mejorar como docentes, cómo hemos readaptado el material… Es posible que no resultemos demasiado objetivos, ni parezca muy serio que no pongamos muchas referencias bibliográficas. No obstante, en la IV Jornada de Educación Matemática de Aragón, que se celebró el 10 y el 11 de marzo de 203, ya hicimos una comunicación de lo que estamos haciendo; en aquel momento habíamos implementado completamente los dos primeros cursos y estábamos “a medias” con el tercero. En aquella presentación, optamos por una versión más teórica, pues nos veíamos obligados a justificar y fundamentar lo que estábamos

haciendo. Por lo tanto, para el “sustento” teórico de lo que aquí diremos remitimos a la publicación de esa comunicación que apareció en el número 54 de *Entorno Abierto* (Cepero, López y Sierra, 2024); en ese artículo se pueden encontrar las referencias bibliográficas que complementan a las dos que ponemos en esta ocasión.

3. Visión general

Sin entrar en detalles, nuestra forma de trabajo (en términos generales) consiste en darle al alumnado el enunciado de una actividad, ellos empiezan a trabajar, opinan, preguntan, duda, cometen errores…, y a partir de ahí nosotros vamos conduciendo la sesión. Puede parecerse a lo que se conoce como enseñanza basada en resolución de problemas (de hecho el Grupo Cero habla de ello en sus libros que referenciamos en nuestro artículo antes citado), pero nosotros no tenemos claro que tengamos un *método,* ya que los tres tenemos estilos diferentes aunque, obviamente, objetivos comunes.

Dar pie al alumnado a que plantee su punto de vista, hace que una misma actividad dé diferentes resultados en los diferentes grupos y en los diferentes años que llevamos trabajando así. Es muy positivo. Es un aprendizaje para el docente, pues le obliga a repensar qué y cómo lo ha contado. Por supuesto, nosotros tenemos claro lo que debemos llegar a trabajar, por decirlo de alguna forma, los contenidos a tratar. En la imagen 1, se puede observar una de nuestras tablas de la programación.

4	Fracciones que crecen	• Clasificación de números decimales ▪ Fracción generatriz 1. Decimal exacto 2. Decimal periódico puro. Proceso y regla. 3. Decimal periódico mixto. Proceso y regla. • Comparar y ordenar números decimales • Comparar y ordenar fracciones. ○ Con igual numerador ○ Con igual denominador ○ Con diferente numerador y denominador
5	Letras al azar	• Relación decimal-fracción- porcentaje. Se trabaja en un nuevo contexto, un problema de azar. • Comparación de números en diferentes formatos. • Concepto de azar. Fenómeno aleatorio. Suceso. • Técnicas de recuento: Tablas de doble entrada. Diagrama de árbol • Frecuencia de un suceso • Regla de Laplace
6	Salto de caballo	• Fracciones equivalentes
7	Tubería	• Lectura del problema y localización de la información necesaria, así como de las posibles carencias. • Concepto de magnitud y proporcionalidad entre magnitudes. • Proporcionalidad directa. • Cálculo de la proporcionalidad directa. ○ Uso de fracciones equivalentes ○ Uso del concepto de razón entre magnitudes • Aproximación de decimales. Redondeo y truncamiento

Imagen 1

La elaboración de este tipo de tablas nos lleva un trabajo intenso de pensar y desarrollar las actividades antes de llevarlas al aula. El Grupo Cero, conscientemente, no hacían una guía del profesor en la que daban “todo hecho” sino que usaban con los profesores las mismas estrategias que con el alumnado: piénsalo tú mismo.

No vamos a mentir; a los alumnos les cuesta empezar a pensar, en algunos momentos se quedan parados. Al principio, cuando se plantea el ejercicio no escriben los resultados, aunque los hayan pensado. Llevamos ya unos años con el mismo material y las respuestas de los alumnos, sus reacciones no son las mismas.

A veces, creen haber acabado: leen el enunciado, contestan algo y se ponen a hablar de otras cosas. Hay que hacerles ver que no es así, buscar que entren en conflicto, ver que el error es bueno, natural…

También es importante respetar sus tiempos de maduración. Retomando la cuestión una segunda vez, evocamos las conclusiones que sacamos, contestamos las cuestiones planteadas al final del ejercicio y continuamos extrayendo conclusiones de forma común.

Como se ha visto en la imagen 1, las actividades dan lugar a conectar las diferentes partes de las matemáticas, que es nada más y nada menos que lo que prescribe el currículo. Pero esto ya había quien lo decía hace más de 30 años. Hemos de reconocer que a nosotros muchas veces nos cuesta reconocer estas conexiones; es decir, el material nos obliga a mantenernos siempre alerta y a bucear en nuestra formación como matemáticos, lo que, obviamente, nos resulta gratificante.

A continuación vamos a dar unas pinceladas sobre cada uno de los cursos, sin poder entrar en detalles. Acabaremos con una muestra de algunas actividades, con la pretensión de que se intuya el potencial que tienen y el tipo de trabajo de adaptación que realizamos.

4. 1.º de ESO, el duro trabajo de empezar

La secuencia de unidades de este curso es la siguiente:

- Unidad 1. Para empezar (aproximadamente 13 sesiones)
- Unidad 2. Números (aproximadamente 32 sesiones)
- Unidad 3. Probabilidad y Estadística (aproximadamente 12 sesiones)
- Unidad 4. Geometría (aproximadamente 7 sesiones)
- Unidad 5. Funciones (aproximadamente 8 sesiones)
- Unidad 6. Álgebra (aproximadamente 26 sesiones)
- Unidad 7. Algoritmos (aproximadamente 12 sesiones)

Si este curso ya suele ser un cambio para el alumnado, con nuestro planteamiento aún les causa más impacto. El alumnado no ha trabajado nunca así la materia, toda su primaria ha sido “editorial y exámenes editorial” (sustitúyase la palabra “editorial” por la que se de dese). Esto hace que las familias se vean apuradas en un primer momento, ya que no saben qué deben hacer para ayudarles. Por otra parte, una ventaja indiscutible es que a esa edad también es más fácil hacerles que se lancen a “conjeturar; en general entran en la dinámica de trabajo al cabo de un mes, mes y medio (no vamos a ser idealistas: también hay “notas discordantes”).

Vemos como muy positivo que la geometría se trabaje de manera manipulativa, y visual. Sorprendentemente, el alumnado viene de primaria sin conocer los cubos multi-link o los libros de espejos, por ejemplo.

A lo largo de todos los cursos el material huye de la enseñanza puramente procedimental, lo que es especialmente significativo en este curso. Se introduce al alumnado en una forma más matemática de trabajar, buscando cadencias o generalizaciones, por ejemplo. También se incide en que se den cuenta de que las cosas que aprendieron (algoritmos) tienen un porqué. En muchas actividades, cuando creen que tienen la "regla" se topan con el "vale, pero ¿por qué funciona?".

5. 2.º de ESO, haciendo camino

La secuencia de unidades de este curso es la siguiente:

- Unidad 1. Para empezar (aproximadamente 13 sesiones)
- Unidad 2. Fracciones decimales y porcentajes (aproximadamente 36 sesiones)
- Unidad 3. Tablas y gráficas (aproximadamente 10 sesiones)
- Unidad 4. Geometría (aproximadamente 28 sesiones)
- Unidad 5. Álgebra (aproximadamente 40 sesiones)

Ni que decir tiene, que a partir del segundo curso, cuando cada día entramos en el aula el alumnado ya tiene claro que la clase no va ir de que nosotros explicamos y ellos copian: se tienen que poner a trabajar.

Es posible que a estas alturas el lector ya haya observado que en los títulos de las unidades faltan algunos "clásicos". Por ejemplo, proporcionalidad. ¿Eso significa que no trabajamos proporcionalidad? Obviamente, no. De hecho, en segundo se podría decir que este contenido vertebra el curso, viéndose a lo largo y ancho del mismo desde diferentes puntos de vista, como no puede ser de otra manera (tampoco ahora vamos a ser idealistas: no podemos impedir que profesores particulares, academias, youtubers…, les cuenten a nuestros alumnos la regla de tres).

Pero esto no ocurre solo con la proporcionalidad, pues las actividades permiten ir asentando contenidos de diferentes formas (visual, manipulativa, escrita,..), lo que favorece el aprendizaje, bajo nuestro punto de vista.

A lo largo de todos los cursos añadimos y complementamos el material original del Grupo Cero otros materiales que nos resultan adecuados a nuestra secuencia. En el caso de 2.º de ESO es en el primero que el "injerto" es más evidente: en la parte de los sistemas de ecuaciones aprovechamos materiales del Grup Vilatzara y del libro de Calvo y otros, *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria* (para las referencias, volvemos a remitir a nuestro artículo ya citado).

6. 3.º de ESO, carrera de obstáculos

La secuencia de unidades de este curso es la siguiente:

- Unidad 1. Para empezar (aproximadamente 10 sesiones)
- Unidad 2. Números (aproximadamente 20 sesiones)
- Unidad 3. Geometría 2D (aproximadamente 9 sesiones)
- Unidad 4. Álgebra (aproximadamente 20 sesiones)
- Unidad 4. Álgebra [cont.] (aproximadamente 19 sesiones)
- Unidad 5. Geometría 3D (aproximadamente 12 sesiones)
- Unidad 6. Algoritmos (aproximadamente 9 sesiones)

El primer problema con el que nos encontramos al planificar este curso es que en Aragón, en 3.º de ESO solo hay tres sesiones de clase por semana. El material original es realmente denso incluso para cursos de cuatro horas por semana. Así que en este curso el trabajo de "poda e injerto" ha sido más intenso. Aunque no es propio de una comunicación comentarlo, hemos de añadir que en nuestro centro, estos dos últimos cursos que llevamos con la implementación de 3.º, los alumnos de ese curso literalmente han desaparecido durante el mes de abril. Por lo tanto, tanto la implantación como la evaluación nos resulta especialmente complicado. La parte del álgebra fue la más perjudicada y la decisión que tomamos fue terminarla dándole un enfoque más "tradicional".

El primer año incluimos, a continuación de la parte de geometría del material original, una actividad con diferentes tipos de envases para tratar el tema de los cuerpos geométricos. Constaba de tres partes, y trabajaron de manera cooperativa. Tanto ellos como nosotros valoramos muy positivamente la actividad. Dado el nivel de implicación del alumnado en este trabajo, para este curso hemos decidido colocarlo en la parte final de la programación, para esos semanas finales en la que todos estamos más cansados y demasiado presionados.

7. 4.º de ESO (opción B), con el álgebra hemos topado

La secuencia de unidades de este curso es la siguiente:

- Unidad 1. Para empezar (12 sesiones)
- Unidad 2. Sucesiones y límites (28 sesiones)
- Unidad 3. Funciones (30 sesiones)
- Unidad 4. Expresiones algebraicas (15 sesiones)
- Unidad 5. Problemas y ecuaciones (25 sesiones)

Las tres primeras unidades seguimos los libros del Grupo Cero, pues dan pie a tratar la mayoría de los conceptos de este curso. Eso sí, como es habitual, los conceptos se enlazan de manera natural, asentándolos y sin caer en prácticas repetitivas. Es difícil encontrar en toda la bibliografía del grupo, una actividad que el alumnado pueda pensar, “ah, este ejercicio se hace como el anterior”.

Pero para el álgebra, el material no nos ofrecía lo que podíamos necesitar. Nuestro “contacto” con el Grupo Cero es Ángel Salar, así que nos fuimos a su “retiro” en Biescas para hablar con él. Y nos confirmó lo que temíamos: no íbamos a encontrar nada en el 12-16 que afrontar el álgebra como necesitábamos. El currículo LOMLOE de Matemáticas de Aragón ha sido citado en muchas ocasiones como ejemplo a seguir. Si miras la parte de álgebra, en ningún sitio encuentras determinado tipo de aspectos que siguen apareciendo en los libros (por poner un ejemplo, un experto en el currículo LOMLOE nos dijo “las fracciones algebraicas activan pocos procesos matemáticos”). El problema que tenemos es que en nuestro centro no hay bachillerato y los centros a los que van a ir el curso que viene sí están siguiendo el guión “viejo”

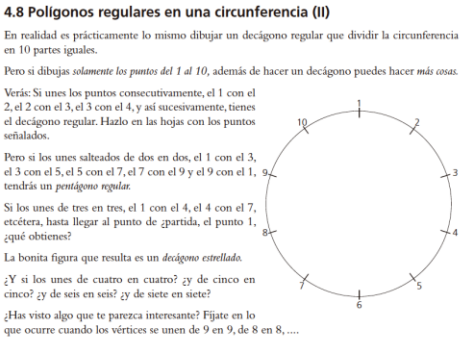
de las matemáticas B. Así que el dilema es si nos plegamos a la corriente dominante o intentamos ser fieles a la filosofía del currículo. El asunto no tiene respuesta, o tiene muchas respuestas y todas equivocadas (o todas acertadas). Nuestra solución ha sido usar un libro editado por el NCTM y escrito por Arcavi y Friedlander (2017).

8. Algunos ejemplos de actividades

Vamos a mostrar algunos ejemplos que hemos seleccionado entre todas las actividades de los cuatro cursos. Cada uno de ellos lo hemos elegido por un motivo u otro, que explicaremos más brevemente, y que será la parte que más tiempo se lleve en nuestra exposición oral.

8.1. Polígonos en una circunferencia (1.º ESO)

El enunciado se ve en las dos siguientes imágenes 2 y 3.



4.8 Polígonos regulares en una circunferencia (II)

En realidad es prácticamente lo mismo dibujar un decágono regular que dividir la circunferencia en 10 partes iguales.

Pero si dibujas *solamente los puntos del 1 al 10*, además de hacer un decágono puedes hacer *más cosas.*

Verás: Si unes los puntos consecutivamente, el 1 con el 2, el 2 con el 3, el 3 con el 4, y así sucesivamente, tienes el decágono regular. Hazlo en las hojas con los puntos señalados.

Pero si los unes salteados de dos en dos, el 1 con el 3, el 3 con el 5, el 5 con el 7, el 7 con el 9 y el 9 con el 1, tendrás un *pentágono regular.*

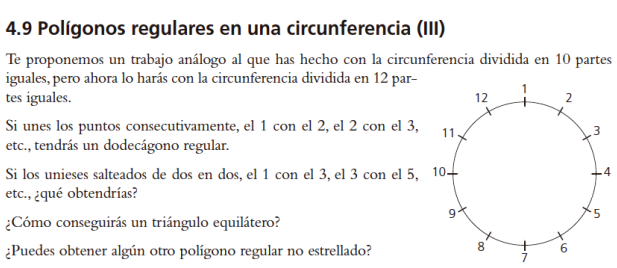
Si los unes de tres en tres, el 1 con el 4, el 4 con el 7, etcétera, hasta llegar al punto de ¿partida, el punto 1, ¿qué obtienes?

La bonita figura que resulta es un *decágono estrellado.*

¿Y si los unes de cuatro en cuatro? ¿y de cinco en cinco? ¿y de seis en seis? ¿y de siete en siete?

¿Has visto algo que te parezca interesante? Fíjate en lo que ocurre cuando los vértices se unen de 9 en 9, de 8 en 8, ...

Imagen 3



4.9 Polígonos regulares en una circunferencia (III)

Te proponemos un trabajo análogo al que has hecho con la circunferencia dividida en 10 partes iguales, pero ahora lo harás con la circunferencia dividida en 12 partes iguales.

Si unes los puntos consecutivamente, el 1 con el 2, el 2 con el 3, etc., tendrás un dodecágono regular.

Si los unieses salteados de dos en dos, el 1 con el 3, el 3 con el 5, etc., ¿qué obtendrías?

¿Cómo conseguirás un triángulo equilátero?

¿Puedes obtener algún otro polígono regular no estrellado?

Imagen 4

Estamos en la unidad de geometría y la incluimos para mostrar cómo aparecen conexiones con otras partes de la materia. La actividad es agradable para el alumnado y, además, incluso puede ser conocida porque han hecho polígonos estrellados en Plástica. Pero van surgiendo pequeños obstáculos y cuestiones para reflexionar. La primera cirunferencia se la damos en papel, pero las otras, desde el segundo año ya les proporcionamos un applet.

El primer pequeño problema con el que se encuentran es cuando no se cierra el polígono a la primera vuelta. Cuando ya entienden que tienen que seguir hasta que se cierre chocan con la aritmética modular. Inicialmente es fácil porque estamos en

aritmética módulo 10 (aunque a algunos ya les empieza a dar problema), pero si dividimos la circunferencia en 12 partes los problemas crecen (y ya no digamos si las partes son 14, 16…, que con GeoGebra es muy rápido hacerlo).

Lo siguiente es la sorpresa de que con determinados saltos sale lo mismo (3 y 7, 4 y 6…). Claro, la pregunta de rigor, ¿y por qué pasa esto?

Pasamos a las fracciones… Ponemos como numerador el número de partes y como denominador el salto. Buscamos la fracción irreducible y a partir de ahí a obtener conclusiones. Esto nos permite generalizar y contestar a preguntas del tipo, ¿si divido la circunferencia en 120 partes y voy de 4 en 4, de 7 en 7, de 110 en 110, etc., que polígono obtengo? ¿Es estrellado o no? (por supuesto, hasta aquí no llegamos en 10').

Pero podemos darle la vuelta y preguntar, por ejemplo, si tenemos una circunferencia dividido en 24 partes, ¿qué salto debemos usar para obtener un pentágono estrellado? Partimos de denominador 5, y estamos "obligados" a poner numerador 6, porque nuestra circunferencia está dividida en 24 partes. Por tanto, la fracción "original" ha de ser 24/20, por lo que para hacer un pentágono estrellado tenemos que usar el salto 20. ¡¡¡¡No!!!! Con salto 20 sale lo mismo que con salto 4, y 24/20=6, y eso es un hexágono regular. Nuevo conflicto, nuevo debate, nuevas conclusiones…

Y salen más cosas. Por ejemplo, si divido la circunferencia en 36 partes y uno los puntos de diez en diez, 36/10=18/5, obtengo un pentágono estrellado después de 18 vueltas. ¿Pero qué tienen que ver estos números con el resultado? En la explicación, surge que multiplicando medios y extremos de esa igualdad obtenemos el mínimo común múltiplo de 36 y 10; es decir, aprendemos otra manera de calcularlo.

En la imagen 5 se puede ver una parte del cuaderno de una alumna con la lista obtenida entre toda la clase de los conceptos que trabajamos en esa actividad.

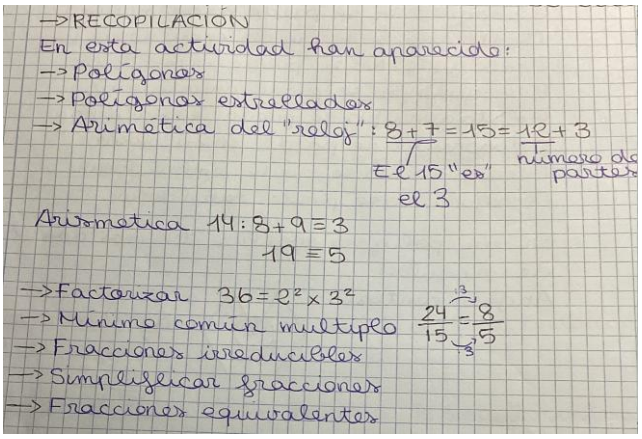


Imagen 5

8.2 La caja registradora (1.º ESO)

6.1 La caja registradora

En algunos comercios tienen cajas registradoras que, además de las teclas con los números tienen otras teclas que pueden programarse para que escriban el precio de los productos que venden con más frecuencia. Esto facilita mucho el trabajo del camarero. Por ejemplo, si el camarero tiene que escribir el precio de una ración, no tiene que acordarse de lo que vale y apretar las teclas de los números, solo tiene que apretar la tecla «Ración».

Pincho	Agua	Refresco	1	2	3
Ración	Postre	Pan	4	5	6
			7	8	9
				0	=

Un grupo de amigos han pedido 3 aguas, 2 refrescos, 4 pinchos, 1 ración, 3 porciones de pan y 5 postres. Escribe la secuencia de teclas que tiene que presionar el camarero para obtener la cuenta.

Invéntate lo que piden otro grupo de amigos (cinco amigos, por ejemplo) y escribe la correspondiente secuencia de teclas.

Imagen 6

El álgebra de 1.º la empezamos con esta actividad y creemos que nuestros alumnos comprendan mucho mejor el lenguaje algebraico y su interpretación. En ella se pretende que a el alumnado empiece a desarrollar una de las habilidades básicas como es:

"*codificar y descodificar*, esto es, utilizar símbolos que sustituyen a objetos con el fin de representar una situación y comunicar información sobre ella.

Esta situación proporciona un contexto rico que opcionalmente puede explotarse más de lo que aquí se propone haciendo que los alumnos diseñen cajas registradoras adecuadas para distintos tipos de comercios (restaurantes, tiendas de discos, bares)

o que investiguen cómo funcionan otras cajas registradoras más sofisticadas (las de los supermercados y grandes almacenes, por ejemplo).

Las teclas programables son un modelo físico de las letras de las expresiones algebraicas: una vez se haya representado la tecla «Refresco» con la letra *r*, esta letra representa un objeto (la tecla), un número determinado —y desconocido hasta que no se aprieta la tecla— (el precio) y una variable (puede volver a programarse si el precio varía). Los alumnos pueden así pasar de una a otra interpretación de las letras con ese modelo como soporte.

La escritura de la expresión algebraica comienza por una expresión vernacular al contestar a las primeras preguntas: agua, más, ración, más, pan, más, postre, total; y se traduce a una «forma breve y resumida»: $a + r + p + P$, por ejemplo, una vez se haya decidido con qué letra se va a representar cada tecla. Al sacar la cuenta después, las letras se reinterpretan como números.

Es interesante que distintos alumnos den precios distintos para que se pueda discutir que la expresión algebraica sirve para representar los cálculos que hay que hacer, sea cual sea el valor de las letras.” (Grupo Cero, 1988)

8.3 Máxima área (2.º ESO)

4.4 Máxima área

¿Cuál es el área máxima que se puede rodear con un perímetro de 24 cm?
Utiliza el siguiente applet de GeoGebra para resolverlo
https://www.geogebra.org/m/bk56pzrg

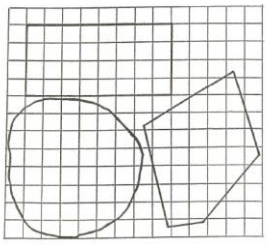


Imagen 7

Esta la presentamos como ejemplo del reto que nos supone adaptar algunas actividades. En la versión original solo aparecían el dibujo y la pregunta. Luego, en las indicaciones para el profesor, hablaba de preparar unas maderas con clavos, cordeles… Algo complicado, para nosotros. Lo intentamos con algún material preparado por nosotros pero no funcionó. También lo intentamos con un applet de GeoGebra, pero no fuimos capaces de hacerlo funcionar bien.

Así que rediseñamos la actividad. De entrada, nos restringimos a polígonos regulares. Así calcular el área del triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono es sencillo hacerlo a mano y sirve para aplicar Pitágoras. A partir del pentágono, la cosa se complica salvo que les demos la apotema, lo que no aporta nada nuevo. Así que optamos por dibujar en GeoGebra los diferentes polígonos regulares de perímetro 24 y usamos la herramienta correspondiente para hallar las áreas. Esto da la posibilidad que en unos pocos minutos obtengan un montón de áreas de polígonos de cualquier número de lados (dicho sea de paso, también podemos utilizar GeoGebra para hallar la apotema, ir al papel, calcular el área, cotejar el resultado con GeoGebra, etc.).

Luego les hicimos dibujar en GeoGebra los puntos (número de lados, área) lo que les da para visualizar una “asíntota” (muy informalmente, claro) y darse cuenta de que parece que va a haber un número del que no pase el área, al que cada vez se acercan más los puntos (haciendo cada vez más zoom).

Pero, nos fallaba el aspecto manipulativo… que tanto nos gusta a nosotros y a ellos; nos gusta tanto como los libros de espejos. Así que lo que planteamos fue calcular la apotema (de cualquier polígono) con el libro de espejos, y, de esta forma, tenemos otra vía para calcular las áreas (que podemos cotejar…).

Las imágenes 8, 9 y 10 ilustran parte del proceso, que se puede ver algo más completo en este pdf: *enlace*.

Imagen

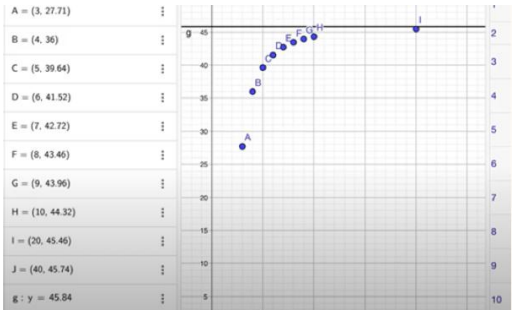


Imagen 9

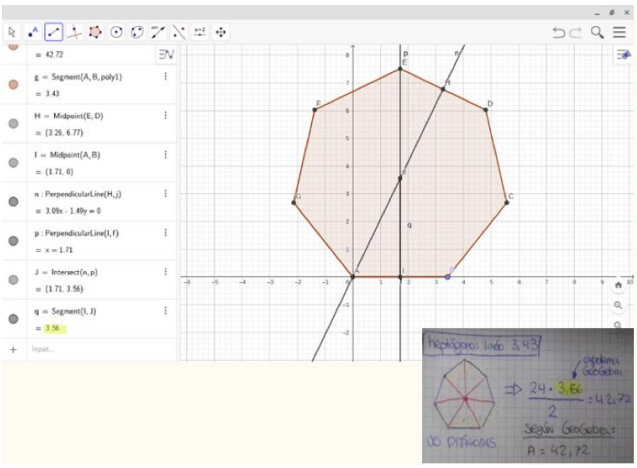


Imagen 10

8.4 Cuadrado (3.º ESO)

3.3 Cuadrados

Vamos a construir tres cuadrados de las tres siguientes formas:

(1) El lado mide 5 cm.
(2) El área es doble que la del cuadrado de lado 5 cm.
(3) La diagonal mide 10 cm.

Lo primero que debes hacer es explicar cómo lo vas a dibujar. Puedes hacer un dibujo a mano, inexacto. No es necesario hacerlo con reglas. Cuando los tengas todos explicados los dibujaremos en clase con GeoGebra.

Imagen 11

La versión original acaba en el apartado (3). Aunque hay alguna cosilla más, de lo que se trata esta actividad es de construir un número irracional usando el teorema de Pitágoras (aunque para llegar a esa conclusión necesitan algo de reflexión). Nosotros añadimos el párrafo final porque nos parece importante que se sepan expresar y que lo hagan utilizando la terminología matemática de manera adecuada. De entrada, empiezan escribiendo poco más que “dibuja un cuadrado que mida 5 de lado”. Cuando les *apretamos* un poco más es cuando se obligan a dar más detalles. Les cuesta bastante, a pesar de que trabajan en grupos. Nosotros en la pizarra dibujamos lo que ellos nos dicen y siguiendo al pie de la letra sus instrucciones lo que sale es cualquier cosa menos un cuadrado. Resulta un momento bastante *divertido.*

Lógicamente, cuando les pedimos que lo hagan en GeoGebra tienen “prohibido” usar la herramienta de polígono regular. Tienen que buscar las herramientas para trasladar a la pantalla el texto que han escrito, lo cual les ayuda, entre otras cosas, a profundizar en el manejo de las herramientas del software.

8.5 Resuelve y plantea retos (4.º ESO)

Traemos estas actividades aquí como ejemplo de lo que importamos de otros materiales ajenos a nuestra principal fuente. En este caso las actividades están tomadas del libor ya citado de Arcavi y Friedlander.

4.3 Resuelve un reto

Cada uno de los siguientes apartados tiene más de una respuesta correcta: marca todas las correctas.

1. $\boxed{3\,(x\cdot 5)=}$

a) $5x\cdot 3$ b) $3x+15$ c) $15x$
d) $5\cdot(3x)$ e) $3x\cdot 5$ f) $3x\cdot 15$

2. $\boxed{\frac{3x}{4}=}$

a) $\frac{3}{4}\cdot x$ b) $3\cdot\frac{x}{4}$ c) $(3x)\div 4$
d) $3\div(4\cdot x)$ e) $\frac{3}{4x}$ f) $3\div\frac{4}{x}$

3. $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=}$

a) $\frac{2}{4}+\frac{x}{4}$ b) $\frac{2+x}{4}$ c) $\frac{1+x}{8}$
d) $\frac{1+x}{2+4}$ e) $\frac{4+2x}{8}$ f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x$

4. $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=}$

a) $\frac{x}{6}$ b) $\frac{1+x}{2+3}$ c) $\frac{1}{6}\cdot x$
d) $\frac{1\cdot x}{2\cdot 3}$ e) $\frac{3\cdot 2x}{6}$ f) $3\div(2x)$

5. $\boxed{\frac{a+b}{3}=}$

a) $\frac{1}{3}(a+b)$ b) $1\div\frac{3}{a+b}$ c) $(a+b)\div 3$
d) $\frac{a}{3}+b$ e) $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}$ f) a+b ÷ 3

Imagen 12

4.4 Plantea un reto

Ahora te toca a ti. Escribe dos respuestas correctas para cada una de las siguientes expresiones algebraicas y otros dos distractores (respuestas que parecen que pueden ser correctas, pero que no lo son; «a mala leche» para que pique el que lo quiera resolver).

Ejemplo: $6-3\cdot(7x-1)=$

a) $3(7x-1)$ *b*) $21x-9$ *c*) $6-21x+3$ *d*) $-21x+9$

1. $\frac{x}{2}+2x=$
2. $10-\frac{1}{4}x+\frac{x}{2}=$
3. $1-x-\frac{2}{3}=$
4. $1-\frac{x-7}{2}=$
5. $1-\frac{2}{3}(6+x)=$

Imagen 13

Cualquier persona que haya dado clase de matemáticas varios años acaba viendo los mismos errores en las manipulaciones algebraicas un año tras otro y en diferentes alumnos. Estas dos actividades trabajan este aspecto, pero de tal forma que el alumno es el sujeto activo, no el mero espectador que escucha qué está prohibido y qué no. La 4.3 ya es interesante de por sí, pero realmente está preparando para la 4.4. Se les permite utilizar Graspable Math para comprobar sus afirmaciones. Al ser el primer año que lo usamos solo tenemos la experiencia de dos clases. En cada una de ellas solo dos personas hicieron bien el ejercicio, es decir, plantearon dos respuestas correctas y dos incorrectas. Del resto, todas resultaron incorrectas. Obviamente, los errores nos dieron mucho juego para hacer patente las carencias que tienen y para *forzarles* a ver qué es lo que estaban pensando mal. Antes de que nosotros diéramos las soluciones, fueron sus propios compañeros los que resolvieron los retos, lo que provocó auténticas discusiones algebraicas *encendidas.*

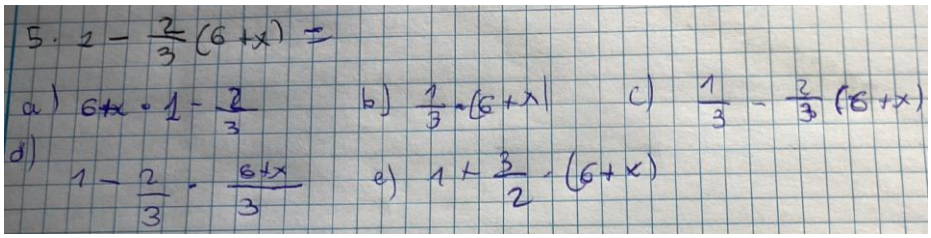


Imagen 14

Para la persona que planteó las expresiones de la imagen 14, la b) es correcta… Un error muy básico, que se basa, creemos, en que no son conscientes de que la jerarquía es la misma que utilizan con números naturales.

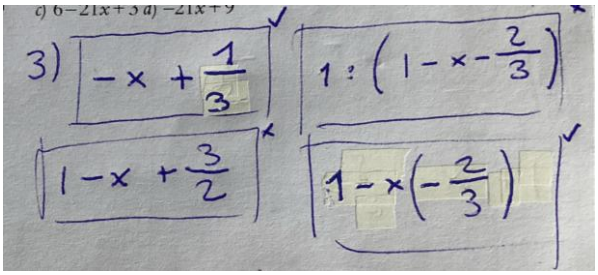


Imagen 15

El error que aparece en la esquina inferior derecha es que la persona interpreta que entre *x* y 2/3 hay una resta en lugar de una multiplicación de *x* y –2/3.

8.6 Actividades transversales (estrella mudéjar y lauburu)

Los tres firmantes empezamos a trabajar juntos en el curso 20-21. Un curso complicado. Y nos sentíamos obligados a planificar actividades “diferentes”. En ese contexto, en los primeros días de septiembre, mientras preparábamos el curso, observamos que la estrella mudéjar (muy típico del mudéjar aragonés) se podía “construir” con dos tipos de triángulos rectángulos. Además, de un A4 se podían obtener varios de estos triángulos sin desperdiciar papel; es decir, nos iba aparecer √2 por todas partes. Esto nos abrió un montón de posibilidades a la hora de plantear actividades de todo tipo (geométricas, proporcionalidad, manejo de radicales, uso de la calculadora…). Así, decidimos trabajarlo a lo largo de ese curso en 3.º de ESO. A medida que iban pasando las unidades didácticas íbamos lanzando un tipo de actividad u otra. En la imagen 16 se puede ver una muy pequeña muestra, que se amplia en *este pdf*.

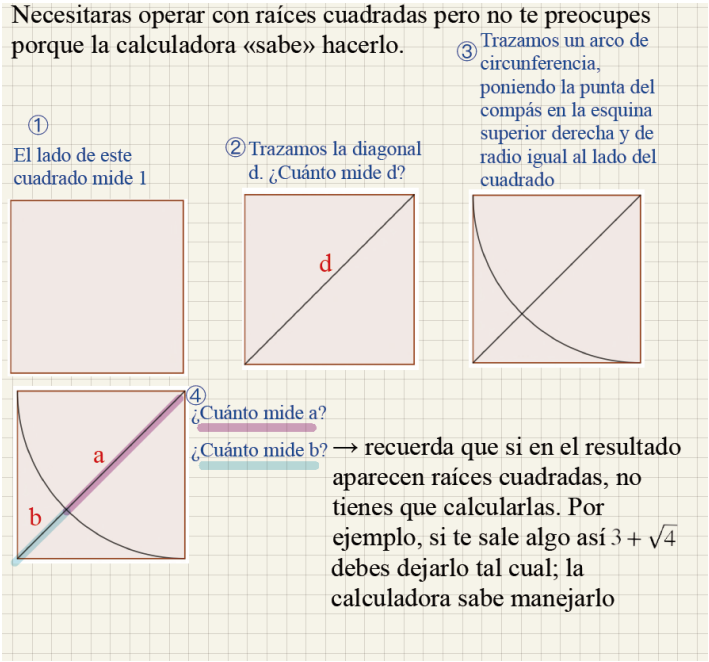


Imagen 15

Tanto nos gustó la estrella mudéjar, que en modo puzzle la tenemos como imagen de nuestro grupo de Whatsapp.

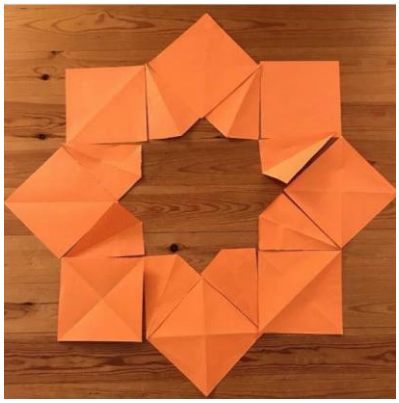


Imagen 16

Y tanto, tanto nos gustó, que al año siguiente, en 4.º hicimos algo parecido con el lauburu. Pero esto será para otra ocasión, que ya no nos cabe en esta comunicación

Referencias

Arcavi, A. y A. Friedlander (2017), *Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra,* National Council of Teacher of Mathematics, Reston.

Cepero, T., López, A. y Sierra, D. (2024). “Espartidero S. L.: Cero ideas”, *Entorno Abierto,* n.º 54, 24-29, http://sapm.es/EntornoAbierto/EntornoAbierto-num54/EA54_24-29.pdf .

Grupo Cero (1988). De 12 a 16. *Un proyecto de currículum de Matemáticas,* Generalitat Valenciana, Valencia.

Aritmética, Álgebra y Geometría en 1º ESO desde la *é-dub-ba* y la *pr-nh*

Ana María Pérez Cubillo

rana_pc@yahoo.es

IES Lancia / Fundación Instituto Bíblico y Oriental (IBO)

Núcleo temático: Recursos para el aula. Conexiones

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

La presente comunicación recoge una manera atrayente de acercarse al currículo oficial de 1º ESO desde las culturas orientales fundantes, Egipto y Mesopotamia. Es en estas tradiciones donde surgen las más grandes innovaciones de la humanidad de manera sincrónica, la aparición de la escritura y la creación de los sistemas de numeración que permiten la evolución de las matemáticas según las necesidades a las que se va enfrentando el hombre que las va resolviendo de una forma práctica y brillante.

La metodología utilizada en el aula será la presentación de las fuentes primarias, muchas de ellas problemas que los niños sumerios y egipcios resolvían en la *é-dubba* y la *pr-anx*, sus escuelas. En ellas se descubrirán los sistemas de numeración, la resolución de problemas aritméticos, algebraicos y geométricos que servirán como sustento y pilar de los seis sentidos en los que se estructura el saber matemático en 1º ESO.

PALABRAS CLAVE: Escuela, fuente primaria, Aritmética, Álgebra y Geometría.

1. Presentación

1.2. Introducción

La comunicación que se presenta, *Aritmética, Álgebra y Geometría en 1º ESO desde la é-dub-ba y la pr-anx*[13], parte de la necesidad de entender los orígenes de los conceptos matemáticos que se exponen en el aula de 1º ESO cimentando su comprensión desde la historia antigua. En las tradiciones del Oriente Fértil, Egipto y Mesopotamia, se sitúan dos de las más grandes invenciones de la humanidad en torno al 3300 a.C., el nacimiento de la escritura y la aparición de los sistemas de numeración como elementos primordiales para la fundamentación de la ciencia matemática de la Grecia helenística, que marcará los inicios de la Matemática moderna.

Esta comunicación invita a reposar en los orígenes del hombre, frente al atropellamiento que vivimos en el proceso de enseñanza-aprendizaje donde priman los medios tecnológicos y audiovisuales que nos invitan e incitan a apreciar únicamente aquello que tiene un mero carácter práctico y acuciadamente inmediato. Estos orígenes nos asientan en nuestras raíces y nos retrotraen a formular las preguntas esenciales para fundamentar el devenir de la exposición de los contenidos matemáticos que constituirán el basamiento del educando, en defensa de un conocimiento poderoso y una escuela ambiciosa[14].

Pero no nos podemos olvidar que, por suerte o desgracia, tenemos un currículo bien establecido[15]. Este nos estructura la materia en seis sentidos a desarrollar: numérico, de la medida, espacial, algebraico, socioafectivo, ampliamente desarrollados desde la innovación con el proyecto que se presenta, como supone la lectura de fuentes

[13] Agradezco a la Fundación Instituto Bíblico y Oriental, a su director D. Jesús García Recio y al profesor D. Alfonso Vives Cuesta, la pasión que me han trasmitido por Egipto y Mesopotamia junto a los conocimientos que de esas civilizaciones me han enseñado, así como el apoyo para iniciarme en esta aventura de investigar en el saber de las Matemáticas en Egipto y Mesopotamia a través de sus fuentes textuales escolares.

[14] Luri, 2020.

[15] **DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León**

textuales antiguas o la creación de útiles de conteo en el aula. Y el sentido estocástico, trabajado desde la recogida de datos.

Es así, como nos adentramos en este viaje por el Oriente Antiguo para descubrir desde la *é-dub-ba* "la casa de las tablillas" mesopotámica y la *pr-anx* "la casa de la vida" egipcia, el aprendizaje de los números, la incursión en el Álgebra y el descubrimiento de relaciones numéricas en diversas figuras geométricas.

1.1. Objetivos

El pilar sobre el que se asienta este trabajo es el de trasladar a los alumnos el amor por la búsqueda en los orígenes del sentido de la escuela y de sus estudios, en concreto, de la materia de Matemáticas. Este objetivo primordial se puede dividir en otros más concretos:

- Integrar la historia de la Matemática antigua de manera coherente y eficaz en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Mostrar la parte humanística de toda enseñanza científica pura.
- Encontrar la participación del estudiante en el descubrimiento de estos saberes.
- Fomentar la interdisciplinariedad en la enseñanza de los contenidos matemáticos.
- Reproducir el proceso evolutivo en la historia de las Matemáticas con el proceso de aprendizaje en 1º ESO.
- Resurgir el interés y la motivación del alumnado y del profesor, con el fomento de nuevas metodologías, la gestión del aula, la codocencia y la gamificación.
- Facilitar el paso del pensamiento concreto a la abstracción.

2. Las matemáticas escolares egipcia y mesopotámica en la escuela actual (1º ESO)

2.1. Fundamentación

Tomando como guía el currículo oficial de 1º ESO, la labor de este proyecto es la de integrar en él los problemas escolares resueltos por aprendices de escriba egipcios y mesopotámicos a modo de elementos clarificadores para conseguir un gratificante proceso de enseñanza-aprendizaje, intentando trasladar a los estudiantes la pasión por estas tradiciones fundantes y el aprecio por sus grandes logros en la evolución de la humanidad.

De los seis sentidos se tomarán como referencia los cuatro primeros, aquellos que incluyen contenidos relativos al campo de la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. Se elegirán para su desarrollo diversas fuentes arqueológicas egipcias y mesopotámicas que iluminen el devenir de los contenidos detallados en el currículo y den hondura al proceso de aprendizaje.

Estas fuentes primarias seleccionadas se tratarán de una manera multidisciplinar y tomando como referencia los contenidos matemáticos a desarrollar. En general, se realizará una pequeña introducción de la fuente y su contexto, haciendo referencia tanto a la lengua en la que están escritas, a la geografía de las localizaciones donde se han encontrado como a las características de estas sociedades, intentando que los estudiantes desarrollen la sensibilidad y aprecien lo bello y, a la vez, perciban la importancia del formalismo y el rigor propios de la Matemática.

2.2. Estructuración

El trabajo que se presenta se puede desarrollar en el aula de 1º ESO de manera continuada durante todo el curso académico, pero de manera preeminente durante las dos primeras evaluaciones y el inicio de la tercera.

A continuación, se muestra la selección de documentos textuales pertenecientes a ambas tradiciones agrupados por sentidos:

✓ Sentido numérico:

• Tratamiento de la aparición del número:
  - Fichas, burbujas y tablillas mesopotámicas.
  - Etiquetas egipcias.

• Los sistemas de numeración en la antigüedad:
  - Cabeza de maza del rey Narmer.
  - Tablilla mesopotámica: flete de un barco de la ciudad de Dilmun[16].
  - Tablilla mesopotámica: registro de un almacén de Drehem.

• Operaciones simples:
  - *Papiro Rhind* Plancha 36 problema 4.
  - Tablillas mesopotámicas: tablas de recíprocos, como *IM* 58446 + 58447.

• Números racionales. Las fracciones utilizadas para realizar repartos:
  - Tablilla mesopotámica: flete de un barco de la ciudad de Dilmun.
  - *Papiro Rhind*: Tabla del recto.
  - Tablillas mesopotámicas: tablas de recíprocos, como *IM* 58446 + 58447.

• Números irracionales. $\sqrt{2}$ y π:
  - Tablilla *YBC* 7289.
  - Tablilla *YBC* 7302.
  - Tablilla *YBC* 11120.
  - Tablilla *Haddad* 104.
  - *Papiro Rhind* Plancha 70 problema 48.
  - *Papiro Rhind* Plancha 72 problema 50.
  - *Papiro Rhind* Plancha 63 problema 41.

✓ Sentido algebraico. Introducción al Álgebra, el paso de lo concreto a la abstracto:
  - *Papiro Rhind* Planchas 47 y 48 problemas 24 y 25.
  - Tablilla *IM* 53957.

✓ Sentido de la medida y espacial:
  - Tablilla *YBC* 7289.

[16] Agradezco a D. Pedro Blanco Rubio, catedrático del cuerpo de Profesores de Educación Secundaria de Lengua y Literatura y colaborador con el IBO, como autor de algunas de las reproducciones utilizadas.

- Tablilla *YBC* 7302.
- Tablilla *YBC* 11120.
- Tablilla *Haddad* 104.
- *Papiro Rhind* Plancha 70 problema 48.
- *Papiro Rhind* Plancha 72 problema 50.
- *Papiro Rhind* Plancha 63 problema 41.

✓ Sentido estocástico y socioafectivo:

- Tablillas que contienen problemas escolares.
- Problemas del *Papiro Rhind* que contienen procesos lógicos implícitos o explícitos para su resolución.

2.3. Fuentes textuales. Transcripción, traducción y comentario

Una vez seleccionadas las fuentes textuales que dan sentido y sustento a esta comunicación, es el momento de iniciar un análisis pormenorizado de estas, mostrando fotografías de los artefactos, su transcripción y traducción, junto a un pequeño comentario contextualizado y cómo realizar su exposición en el aula. Por cuestiones de espacio no se podrán detallar todas las referencias, por lo que se realizará una selección entre ellas.

2.3.1. Fuentes textuales egipcias

a) **Etiquetas egipcias**: constituyen la primera escritura numérica del antiguo Egipto, datándose en el 3250 a.C. Fueron descubiertas por Günter Dreyer[17], en la tumba U-j de la parte U del complejo funerario de *Umn el-Qabb* "la madre de los fragmentos de cerámica" en la ciudad de Abidos, en un contexto funerario y con una clara asociación a las ofrendas realizadas.

Estas etiquetas constituyen el estadio inicial tanto de la lengua egipcia como de su escritura jeroglífica. Son piezas fabricadas en hueso o marfil, miden entre 1 y 4 centímetros de lado, contando cada una de ellas con entre uno y cuatro signos

[17] Dreyer, 2011.

escriturarios[18]. Todas tienen un agujero en la parte superior que se podría haber utilizado para sujetar la etiqueta a la ofrenda correspondiente, designando, aquellas que tienen escritura jeroglífica, los lugares originales de estas ofrendas o, aquellas que poseen signos numéricos, la cuantificación de estas ofrendas:

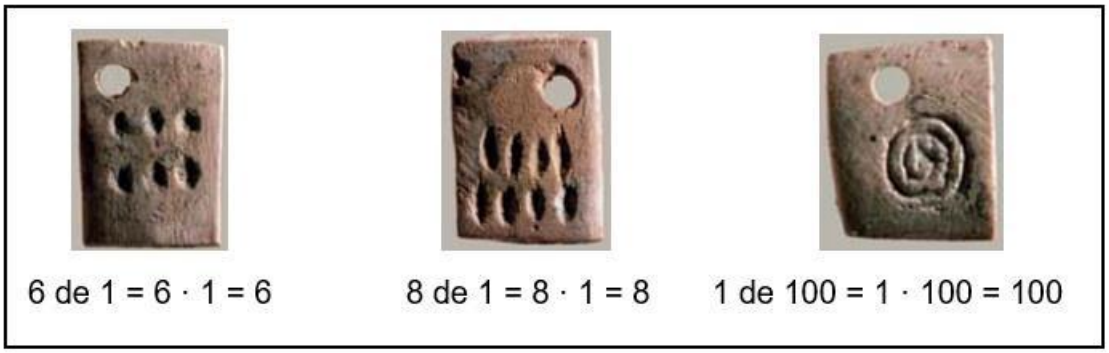


Imagen 1. Imágenes de varias etiquetas (Dreyer, 2011)

b) **Cabeza de maza del rey Narmer**: constituye uno de los primeros restos arqueológicos que contiene signos numéricos junto a escritura pictográfica jeroglífica. Data de la Dinastía I, con un Egipto unificado en las puertas de lo que conocemos como Reino Antiguo (*ca*. 3100 a.C.).

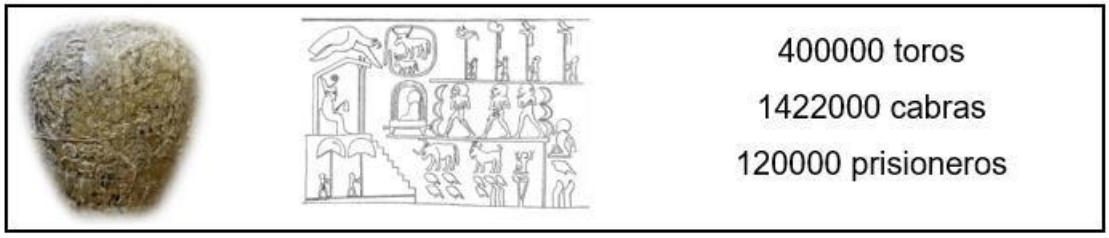


Imagen 2. Cabeza de maza del rey Narmer, Dinastía I (Ifrah, 2002)

Los números que aparecen tienen la función de contabilizar el botín en cabezas de ganado y el número de prisioneros tras las expediciones victoriosas de este primer rey del Egipto unificado.

c) ***Papiro Rhind***[19]: la interpretación de este documento, al auspicio del estudio lingüístico y matemático, nos permite afirmar que es una guía de estudios de la *casa de la vida*, *pr-anx*. Está datado en el 1650 a.C., siendo el documento una copia, como

[18] Cervelló, J., 2015.
[19] Buffum, A., 1979.

indica el escriba que la realiza, Ahmes. Como si de un libro de texto actual se tratase, encontramos en las primeras planchas una serie de herramientas, tablas multiplicativa, del recto o de divisiones, a modo de útiles para resolver los problemas aplicados a la realidad propuestos en la segunda gran parte constituyente de este papiro.

Esta segunda parte del papiro se encuentra estructurada según el tipo de herramientas utilizadas para resolver los problemas planteados[20]: aritméticos (del 1 al 23, divisiones en partes iguales, multiplicaciones de expresiones fraccionarias por expresiones con sumas de fracciones unitarias, sumas de fracciones unitarias), algebraicos (del 24 al 38, cálculo de la cantidad desconocida sola, *aHa* 'montón', [21]sumada a partes de ella o asociada a unidades de medida), progresiones aritméticas (del 39 al 40), geométricos (del 41 al 60, volúmenes cilíndricos y paralelepípedos, el ojo de Horus, problemas de áreas, relacionados con pirámides y relaciones entre triángulos), miscelánea (del 61 al 84, cuestiones aritméticas variadas) y los últimos problemas, del 85 al 87 sin relación con las herramientas y problemas matemáticos anteriores. Son contenidos perfectamente comparables con los que desarrollamos durante un curso escolar de 1º ESO. Comentamos las herramientas y problemas seleccionados:

c.1) **Plancha 36 Problema 4**:

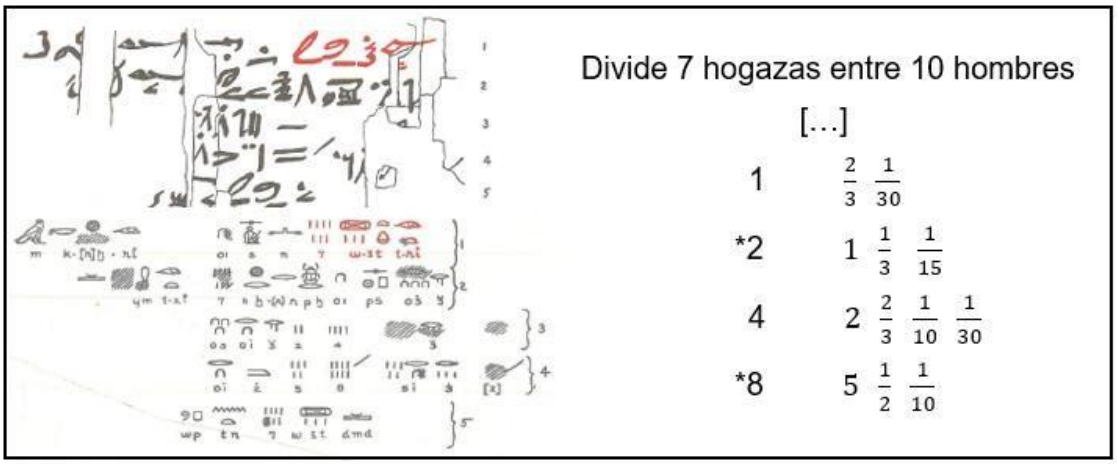


Imagen 3. Plancha 36, problema 4 (Buffum, 1979)

[20] Imhausen, A., 2003.

[21] Gardiner, 1957 y Faulkner, 1996.

Constituye un problema de escuela sobre repartos en partes iguales, al repartir 7 hogazas entre 10 hombres. En la parte detallada se nos muestra la comprobación aplicando el método de las duplicaciones, utilizado para multiplicar dos números.

c.2) **Plancha 70 Problema 48**: resuelve un problema asociado al círculo, haciéndose presente, de manera implícita, el número irracional π, con la aproximación al número racional $2^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 4 \cdot \frac{64}{81} = \frac{256}{81}$. Pero no solamente encontramos esta primera aproximación al número π, sino también un algoritmo aplicado para calcular el área de un círculo a partir de la longitud de su diámetro, que podríamos generalizar con la siguiente expresión: $\left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2$.

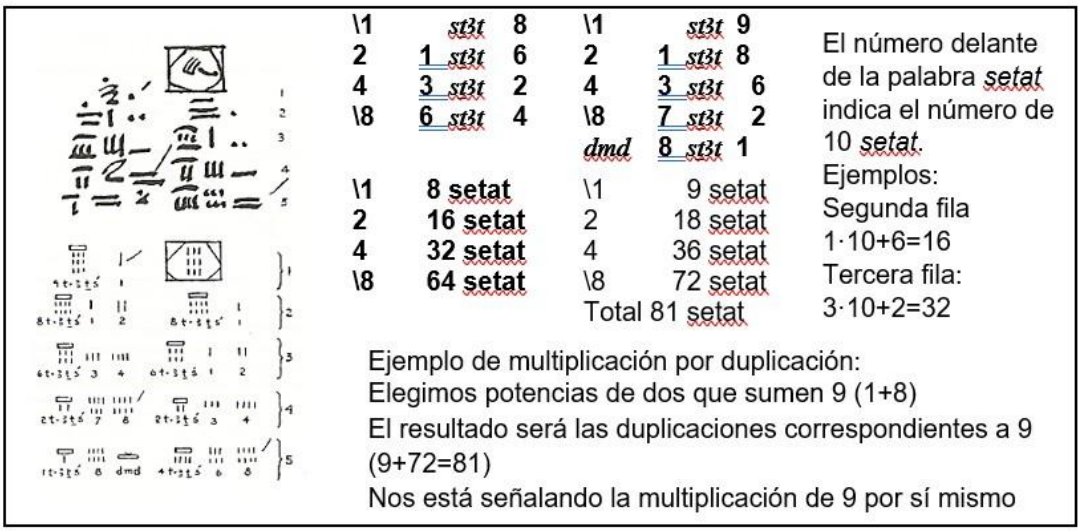


Imagen 4. Plancha 70, problema 48 (Buffum, 1979). Comentario elaboración propia

c.3) **Plancha 47 Problema 24**: es un problema que hoy en día incluiríamos en el ámbito algebraico y que podríamos resolver mediante una ecuación lineal del tipo $x + ax = b$.

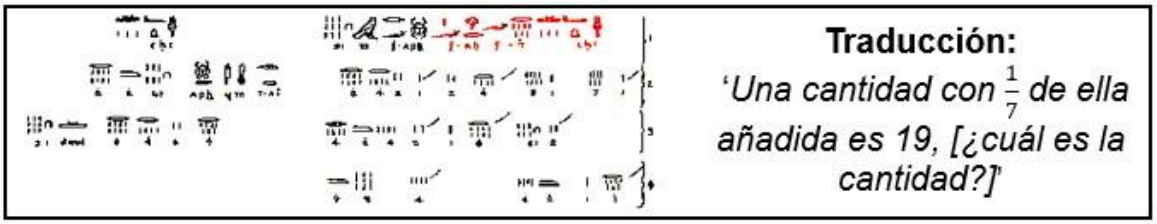


Imagen 5. Plancha 47, problema 24 (Buffum 1979)

El aprendiz a escriba designa aquello que no sabe como *aHa* ‘montón’ y resuelve este problema con el método de la falsa posición.

Resolución actual: Procedimiento algebraico de ***TRASPOSICIÓN***

$$x + \frac{1}{7} \cdot x = 19$$
$$7 \cdot \left(x + \frac{x}{7} = 19\right)$$
$$7 \cdot x + x = 133$$
$$8 \cdot x = 133$$
$$x = \frac{133}{8}$$

Resolución Antiguo Egipto: Procedimiento ***FALSA POSICIÓN***

- Valor inicial: $h = 7 \rightarrow$ comprobación: 8
- Corrección error: proporcionalidad $\frac{19}{8} = \frac{¿?}{7}$

▪ Cálculo de $\frac{19}{8}$ por el método de las duplicaciones

1	8
*2	16
$\frac{1}{2}$	4
*$\frac{1}{4}$	2
*$\frac{1}{8}$	1

▪ Multiplicar por 7: $7 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

- Dividir cantidad total, 19, entre cantidad total falsa, 8, multiplicar por hipótesis falsa,7.

Tablas 1 y 2. Comparativa entre el proceso de resolución de un problema algebraico actual y el método de falsa posición egipcio. Elaboración propia

2.3.2. Fuentes textuales mesopotámicas

a) Fichas, burbujas y primeras tablillas numéricas[22]:

Las **fichas**, o *calculi*, son los primeros objetos arqueológicos que representan sistemas de contabilización y, por tanto, un procedimiento aritmético. Constituyen la primera presentación del número como entidad concreta en la evolución del hombre, describiendo el primer proceso de correspondencia entre la cantidad y la representación pictográfica del objeto. Los primeros vestigios datan de la época comprendida entre los milenios IX y VII a.C., encontrados en la región de Tepe Asiab en Mesopotamia.

Fichas de formas diversas en función del objeto representado:
Conos, junto a las esferas, representaban números.
Discos, representaban diversos animales.

Imagen 6. Diversos calculi, (Maza, 2007)

[22] Ifrah, G., 2002.

Encontramos fichas con distintas formas geométricas en un intento de representar los objetos que contabilizaban de manera concreta:

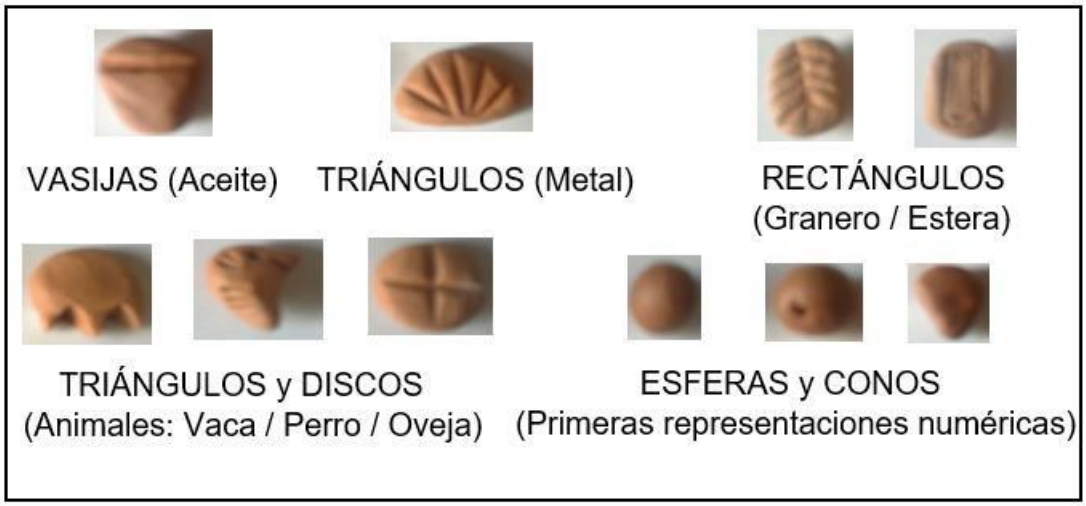


Imagen 7. Diversos caluci. Elaboración propia

Una característica fundamental de estas representaciones iconográficas es la diversidad de tamaños, que muestra la cantidad de objetos diferenciados pero representados con una misma forma, en lo que podría ser el primer paso para la formación del concepto de base de un sistema de numeración.

Las **burbujas**, o *bullae*, suponen un nuevo paso hacia la abstracción del número. Son bolsas de arcilla que se utilizaban como contenedores de las fichas, indespensables por la evolución de la sociedad en el ámbito económico y la necesidad de desplazarse para realizar los intercambios. En estos objetos vemos también un proceso evolutivo:

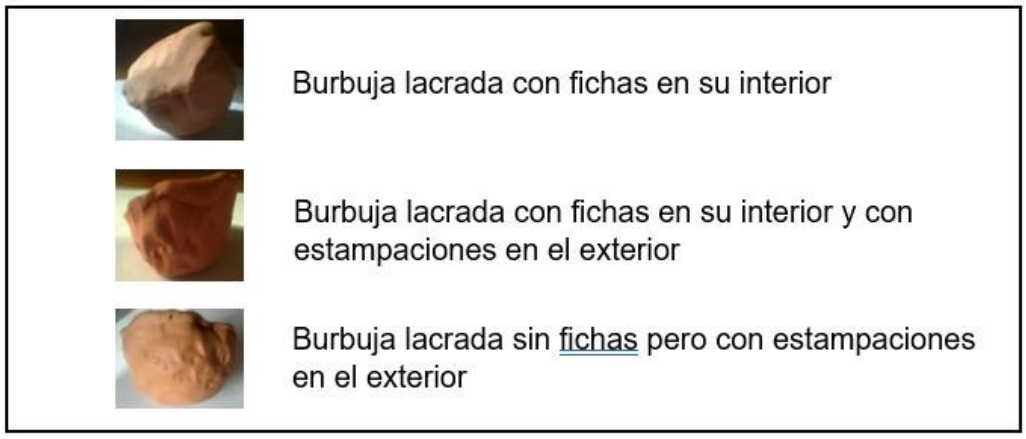


Imagen 8. Proceso evolutivo burbujas, elaboración propia

Las primeras burbujas datan del S. IV a.C., fueron encontradas en Uruk, Nínive y Nuzi. Las burbujas con estampaciones y fichas, suponen los primeros pasos hacia un sistema escriturario, la escritura pictográfica. El último eslabón son las burbujas solo con estampaciones de las fichas que representan los números aún sin caracteres propios. Harían innecesarias las fichas y el propio contenedor en los trueques, que se aplastará y nos conducirá a la aparición de las tablillas.

Las primeras **tablillas numéricas**: las primeras fuentes datan del 3200 – 3000 a.C. y en ellas se descubren los dos grandes logros de la humanidad, la aparición de la escritura y los sistemas de numeración, representando la expresión visual y simbólica del pensamiento humano. Podemos analizar tres estadios en la evolución de las tablillas que nos conducen del carácter concreto del número como mero útil para contabilizar al concepto abstracto del mismo.

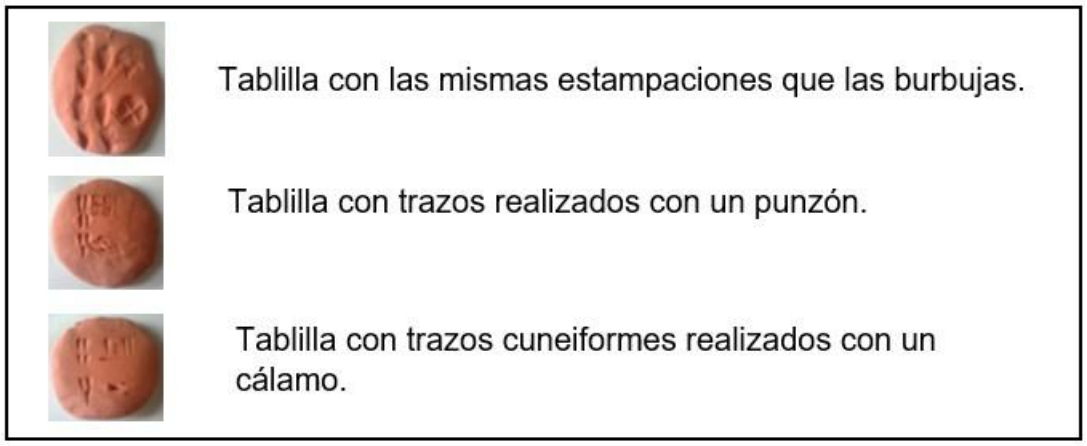


Imagen 9. Proceso evolutivo tablillas. Elaboración propia

Las tablillas numéricas incluidas en un primer estadio hipotético contendrían las estampaciones de las propias fichas, representando números y objetos contabilizados. El segundo estadio queda marcado por el uso del punzón como útil de escritura, transformando estas estampaciones en dibujos trazados con líneas y la última fase, que marcará el inicio de la escritura cuneiforme, lo determina el uso del cálamo, que producirá unas incisiones en la arcilla en forma de cuña, de ahí el nombre definitorio de la escritura sumeria.

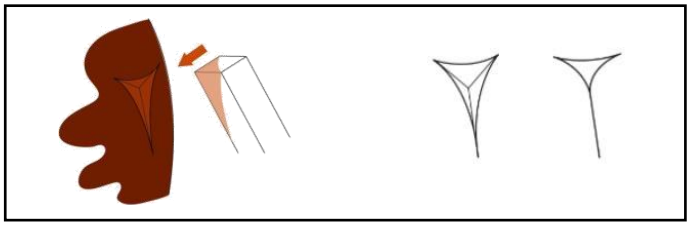


Imagen 10. Arcilla, cálamo y cuñas (Pérez, 2021)

b) Tablilla con el flete de un barco mesopotámico de la ciudad de Dilmun[23]: Tablilla datada en el S. XXI a.C. y conservada en el Museo del IBO, transcrita y traducida por D. Jesús García Recio, su director.

[23] Las siguientes tablillas son reproducciones realizadas por D. Pedro Blanco Rubio

Transcripción	Traducción
5 ésir hád gú	150kg de asfalto seco
25 ésir é-a-gur	6.300 litros de asfalto doméstico
nì-sa$_{10}$ $\frac{1}{2}$ kù ma-na	El precio de compra de $\frac{1}{2}$ de mina de plata
24 munu$_8$ gú	72 kg de malta
2 kú gín-kam	(y) 16 gramos de plata.
Ur-^{d}Inanna gàraš	Al comerciante Ur-^{d}Inanna
Ur-zu ì-na-sum	Ur-zu le compró.
má Dilmun	Barco de Dilmun

Imagen 11. Tablilla de un flete de un barco de Dilmun. Museo IBO

La tablilla contiene los objetos transportados por este barco de la ciudad de Dilmun para poder realizar un flete. Lo más interesante de este documento es que en una misma tablilla conviven diversos sistemas de numeración, dependiendo de la región o del objeto o líquido a medir, hasta converger todos ellos en el sistema de numeración sexagesimal cuneiforme, un sistema de base 60, posicional y que utiliza únicamente dos signos para expresar cualquier cantidad, 𒁹 y 𒌋.

c) Tablilla que contiene el registro de un almacén de Drehem: Tablilla que proviene del almacén de Drehem, en la antigua región de Puzhirs-Dagen, cercano a Nippur. Data de la segunda dinastía de Ur, hacia el 2000 a.C. y forma parte de las tablillas de carácter administrativo, representando una gestión local como es el reconocimiento y venta de animales[24].

[24] Agradecimiento a Dra. Silvia Nicolás Alonso, veterinaria y colaboradora del IBO.

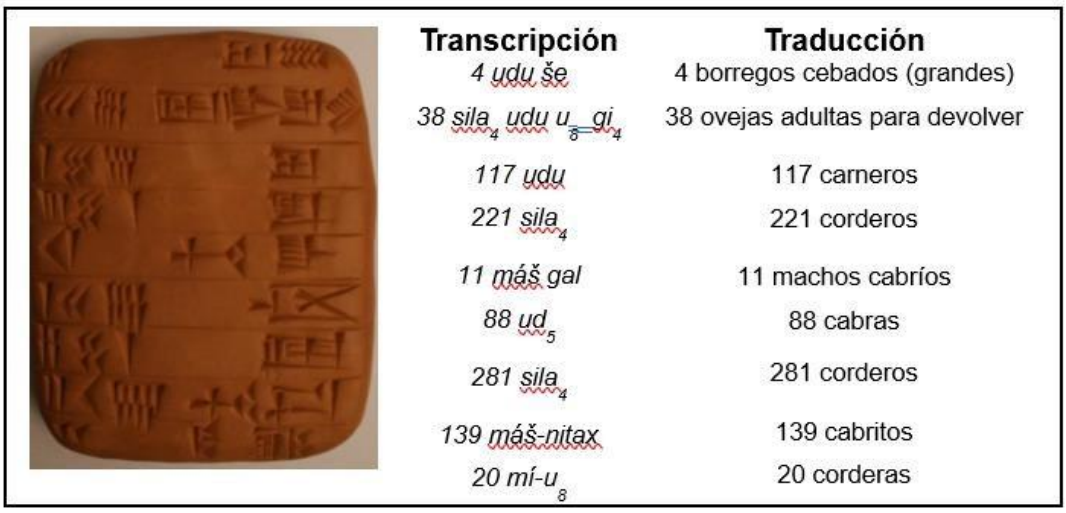


Imagen 12. Tablilla de un registro de Drehem.

En la columna de la izquierda de la tablilla se pueden observar diversos números expresados en sistema de numeración cuneiforme, en los cuales se pueden analizar las características de este sistema y su simbología.

d) Tablilla *YBC* 7289[25]: Tablilla perteneciente al periodo paleobabilónico, (ca. 1500 a.C). Contiene un problema escolar encuadrado en el ámbito geométrico.

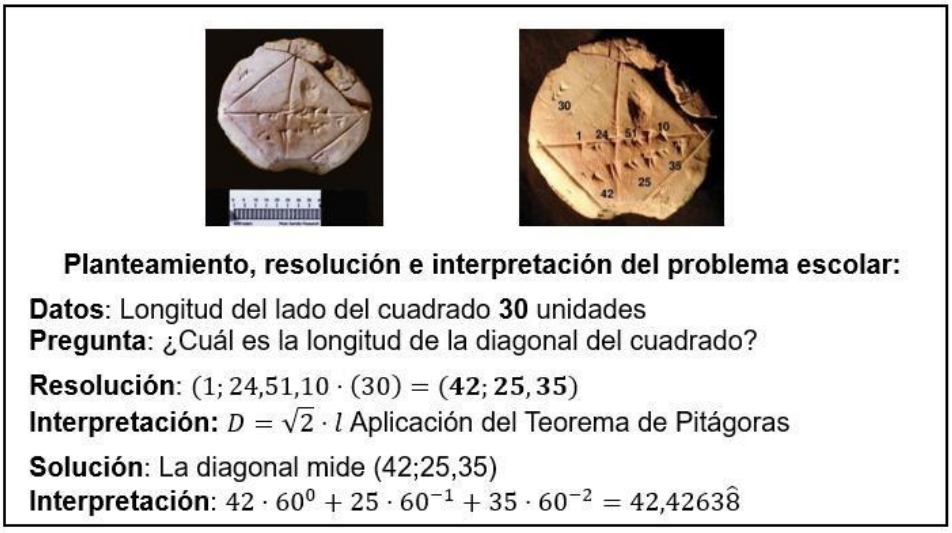


Imagen 13. Tablilla de Yale Collection Babylonian[26]

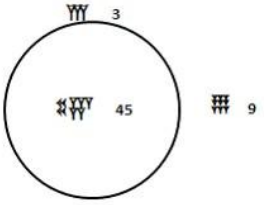
e) Tablilla *YBC* 7302[27]: Tablilla perteneciente al periodo paleobabilónico, (ca.

[25] Pérez, A.M. (2011)

[26] https://collections.peabody.yale.edu/search/Record/YPM-BC-021354

[27] Yuste, 2013.

1500 a.C). Es un problema escolar encuadrado en el ámbito geométrico.



Planteamiento, resolución e interpretación del problema escolar:

Datos: Longitud de la circunferencia **3** unidades

Pregunta: ¿Cuál es el área del círculo?

Resolución: $(0;5)\cdot 3^2 = (0;5)\cdot 9 = (\mathbf{0;45})$

Interpretación: $A = \frac{1}{12}\cdot l^2$ Relación entre el área de un círculo y la longitud de su circunferencia. Presencia implícita de una aproximación del número π.

Solución: El área mide $(0;45)$ **Interpretación:** $\frac{45}{60} = 0{,}75$ (SMD)

Imagen 14. Tablilla de *Yale Collection Babylonian*[28]

3. Planificación, descripción, desarrollo y metodología en el aula de 1º ESO El trabajo se desarrollará durante todo el curso escolar, asociado a los contenidos relacionados con Aritmética, Álgebra y Geometría. Se presentarán las fuentes primarias de manera progresiva y ordenada según los sentidos que estructuran el currículo:

I) **Sentido numérico**.

a) Los **números naturales**: Se muestra el origen del número como entidad concreta y su evolución hasta conformar una entidad abstracta expresada mediante los sistemas de numeración. Para este fin se utilizarán una multiplicidad de metodologías:

✓Presentación sobre **el origen del número y su evolución**, con la conformación de los diversos sistemas de numeración. La presentación tiene una actividad final que los alumnos realizarán por parejas en la que practiquen el uso de los diversos sistemas de numeración expuestos. Dos sesiones de aula.

[28] https://collections.peabody.yale.edu/search/Record/YPM-BC-021367

✓**Muestra y producción de útiles para la contabilización**: las fichas y las burbujas mesopotámicas. Para la fabricación de las reproducciones de estos vestigios arqueológicos se trabaja por parejas, aprendiendo a amasar el barro y a dar la forma propicia. Se crean los útiles necesarios para dramatizar un trueque contextualizado en la granja de la región Drehem. Dos sesiones de aula.

✓Utilidad de los objetos de conteo como entidades concretas: **teatralización de una transacción económica**[29] en la antigua Mesopotamia con los materiales producidos en la actividad anterior. Una sesión de aula.

✓**Enigma matemático**: se repasan los contenidos sobre números naturales, desde el origen de los sistemas de numeración hasta las destrezas para resolver operaciones combinadas y su aplicación en la resolución de problemas. Se trabaja en grupos de cuatro alumnos de manera cooperativa. Dos sesiones de aula. Esta actividad tiene asociada una fase de investigación: encontrar el porqué de los nombres de los grupos e investigar la figura de Fibonacci de manera grupal y las múltiples relaciones con las distintas materias que cursan de manera individual. Cada investigación se realiza durante una semana diferente. Posteriormente se expone, durante una sesión, la primera de ellas y, durante dos sesiones, la segunda, en 5 minutos por parte de cada alumno.

b) **La semana de la Ciencia en León. *Los sistemas de numeración de ayer y de hoy***. Se mostró, a profesores y demás participantes, parte de este proyecto, con la inestimable ayuda de tres alumnos de 1º ESO que participaron de la exposición. Actividad extraescolar.

c) **Fracciones, números decimales y proporcionalidad**: se presentan reproducciones de fuentes primarias para analizar la aparición de este tipo de números en la Antigüedad:

✓**Primera fracción en la historia de la escritura**: presentación de la tablilla que contiene un flete del barco de la ciudad de Dilmun. Aparece la fracción $\frac{1}{2}$ en el

[29] Agradezco a la Dra. Silvia Nicolás Alonso la idea de reproducir un trueque mesopotámico en el aula, tras haberlo realizado en las clases de Historia de la Veterinaria en la UCM.

recuento del listado de bienes que transporta el barco, primer número racional en la historia de las Matemáticas.

✓**Uso de tablas para repartir**: Presentación de la Tabla del Recto contenida en el *Papiro Rhind* a modo de herramienta para la realización de repartos al modo de nuestras tablas de multiplicar para realizar divisiones. Se expone un ejemplo de repartos contenido en el *Papiro Rhind*, Plancha 36 Problema 4. Media sesión de aula.

✓**Inverso de un número**: presencia de tablas de recíprocos en Mesopotamia para calcular el inverso de un número, como un algoritmo que podemos generalizar con nuestro lenguaje matemático actual para el cálculo de recíprocos con la tablilla *IM* 58446 – 58447. Media sesión de aula.

Sistema métrico decimal:

✓La **búsqueda de la unidad**: se analiza cómo para los antiguos egipcios y mesopotámicos la medida, es decir, la comparación de una determinada cantidad de una magnitud respecto a otra tomada como unidad de esa misma magnitud, fue expresado desde el origen de la contabilización, pero también fue un problema, cuando esas relaciones no eran enteras. Media sesión de aula mostrando ejemplos de unidades de medida de diversas magnitudes:

• *Papiro Rhind*: Problema 41 encontramos las unidades de medida *khar* y *hekat*, medidas de superficies. En el Problema 48 aparece el *setat* como medida de capacidad, que también se utiliza en el Problema 50 junto al *khet,* una medida de superficie.

• Tablilla del flete del barco de Dilmun: aparece el *ésir* como unidad de medida de la masa con referencia al asfalto doméstico y el *ésir* como unidad de medida de la capacidad en el caso de asfalto líquido.

II) **Sentido algebraico**:

a) Ecuaciones de primer grado: se muestran diversos problemas de la antigüedad que hoy consideramos algebraicos y que resolvemos con las técnicas propias del álgebra, pero que en la antigüedad fueron problemas aritméticos.

✓*El montón*, *aHa*: Se presentan dos problemas del *Papiro Rhind*, el problema 24 y el problema 25. Con ellos se intenta construir el lenguaje algebraico para poder modelizar ejercicios cotidianos. Posteriormente se resolverá el problema con nuestros métodos, indicando el método de falsa posición utilizado por los egipcios.

Una sesión para la introducción del lenguaje algebraico y otra media sesión para investigar la resolución de las ecuaciones de primer grado con fracciones por parte de los alumnos.

III) **Sentido geométrico y de la medida**:

Aparecen en el aula los números irracionales asociados a las figuras geométricas del triángulo y el círculo, muy próximos a ellos tanto en su definición como en su resolución. Esta afirmación se va a demostrar en el contexto de la matemática egipcia y mesopotámica a través del uso de constantes que aproximan relaciones entre longitudes de lados, perímetros y áreas para acercarse de manera implícita a los números irracionales $\sqrt{2}\ y\ \pi$.

a) **Triángulos. El *teorema de Pitágoras***: tanto en tablillas como en papiros matemáticos observamos el trazo de figuras como el círculo o el triángulo para modelizar problemas cotidianos, de la misma manera que procedemos en la escuela actual. Analizamos los siguientes problemas, su planteamiento, formulación y resolución. Se dedican dos sesiones de aula.

✓Tablilla *Yale* 7289: contiene la aplicación del primer teorema de Pitágoras de la historia (mil años antes del nacimiento de Pitágoras). Un profesor plantea a un alumno un problema práctico dibujando un cuadrado, sus dos diagonales e indicando la longitud del lado, 30. El alumno es capaz de averiguar la longitud de las diagonales, mostrándonos aquello que le ayuda a resolver el problema planteado, solo esta herramienta: $(1; 24, 51, 10) = 1{,}414212963 \sim \sqrt{2}$.

✓Los egipcios también utilizaron la aplicación del teorema de Pitágoras a través del uso constantes para diversas prácticas, entre ellas, la triangularización de tierras a repartir tras la crecida del Nilo o el cálculo del volumen de un granero o de una pirámide.

b) **Polígonos. Circunferencia y círculo**. Perímetros y áreas de figuras planas: como hemos indicado en el caso del triángulo, también encontramos tablillas y papiros escolares donde se calculan longitudes o áreas y volúmenes de figuras dependientes en su formación del círculo. Se dedican dos sesiones de aula.

✓En las tablillas mesopotámicas escolares aparece un problema de manera recurrente: calcular el área de un círculo sabiendo la longitud de su circunferencia. Lo apreciamos en dos ejemplos de cálculo explícito del área y otro implícito para calcular el volumen y capacidad de un espacio cilíndrico:

- Tablilla *YBC* 7302: La longitud de la circunferencia es de 3 unidades. El proceder mesopotámico para calcular el área del círculo, como el egipcio, es el de usar una constante, que multiplicada por la longitud de la circunferencia al cuadrado da lugar a una aproximación del área. La constante utilizada en este caso es $(0;\ 5) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$. Esta constante nos lleva a una aproximación implícita de π~3.

- Tablilla *YBC* 11120: Mismo problema siendo ahora la longitud de circunferencia es (1,30) = 1 · 60 + 30 = 90 unidades[18].

✓ En el *Papiro Rhind* también encontramos un tipo de problemas asociados al círculo, similares en planteamiento: calcular el área de un círculo a partir de su diámetro, resueltos por el mismo procedimiento: $A = (\frac{8}{9} \cdot d)^2$. De nuevo nos lleva a una aproximación implícita del número irracional.

- Problema 50: El problema nos muestra un círculo de diámetro 9 *khet*. Entonces el área será 64, aplicando el procedimiento explicado. Este procedimiento se pudo reconstruir gracias al problema 48 del *Papiro Rhind*, que nos muestra el procedimiento.

- Problema 41: describe un problema cotidiano, el cálculo del volumen y capacidad de un granero redondo de 9 unidades por 10 (de altura).

[18] Tenemos que decir que se han encontrado nuevas tablillas en Susa que indican una aproximación mejor al número irracional π. Como $A = \pi \cdot r^2$ y el método egipcio nos dice que $A = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} \cdot (2 \cdot r)^2 = \frac{256}{81} \cdot r^2$. Luego: $\pi \sim \frac{256}{81} \sim 3{,}16$.

4. Propuesta de ampliación

Tras disfrutar de la puesta en práctica en el aula de este proyecto, es viable la posibilidad de ampliación. A continuación, se exponen una serie de ideas que podrían hacer más completo el trabajo en torno a los orígenes:

- Intervención de otros departamentos para el tratamiento interdisciplinar:

✓ Motivación a la lectura: leer el libro *Kengi y la magia de las palabras*.

Acompañar a la lectura por capítulos de diversas explicaciones sobre el origen y la evolución de la escritura cuneiforme en paralelo a la formación del sistema de numeración. Departamento de Lengua y Literatura.

✓Introducción a la escritura jeroglífica y comprensión de la lengua egipcia utilizando el procesador de textos *JSesh*. Departamentos de Lengua y Literatura y Tecnología.

✓Contextualización del entorno geográfico del Oriente Fértil: Egipto y Mesopotamia. Departamentos de Geografía e Historia, Biología y Geología.

✓La Música en la Antigüedad y los procesadores de textos *JSesh*: realizado dos cursos académicos consecutivos con 2º Bachillerato, se podría ampliar a otros niveles, como 2º E.S.O. dando continuidad al proyecto iniciado en 1º E.S.O. Departamentos de Música, Lengua y Literatura, Tecnología.

✓Tratamiento del barro para realizar tablillas y construcción de cálamos con el estudio de la madera. Departamentos de Educación Plástica, Visual y Audiovisual y Tecnología.

✓Construcción de un triángulo con cuadrados adosados a sus lados que permitan el paso de agua, de manera que se pueda demostrar que el agua que cabe en el cuadrado de la hipotenusa es equivalente a la que cabe en los dos cuadrados asociados a los catetos. Realizar el proyecto con la impresora 3-D. Departamento de Tecnología.

- Actividades extraescolares y complementarias:

✓Ya realizadas: Ponencia sobre la Música en la Antigüedad y el procesador de textos *JSesh*, participación en la Semana de la Ciencia de León.

✓Propuestas: Participación en jornadas culturas con una diversidad de actividades: creación de un imán cuneiforme, abalorios en escritura cuneiforme, tintura de pañuelos con motivos egipcios y sumerios, escritura de nombres propios en serej, escritura del año de nacimiento …

✓Coordinar con otros centros proyectos de innovación e investigación en torno al humanismo de las ciencias tomando como referencia la Antigüedad.

5. Conclusiones

Este proyecto es la materialización de una ilusión hecha realidad. El trabajo y estudio de casi una vida, compartido con los alumnos en el siempre grato y estimulante proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se ha introducido en la escuela los saberes egipcios y mesopotámicos, gracias a fuentes textuales primarias que contienen, entre otros, problemas escolares resueltos en la Antigüedad, de gran actualidad en nuestras aulas. Con ellos estudiamos el número como un ente concreto representado en esas fichas que contabilizaban animales en las fértiles tierras del Tigris y el Éufrates. Hasta descubrir los primeros signos numéricos en las etiquetas asociadas a ofrendas en Abidos, en la orilla izquierda del Nilo, que nos llevan a la abstracción del número con la fundamentación de los primeros sistemas de numeración.

Algunas tablillas escolares y papiros a modo de guías didácticas nos enseñan otras cantidades, los primeros números racionales de la historia de las Matemáticas insertos en problemas de repartos y cómo no, los inconmensurables griegos conocidos como constantes en el Oriente Fértil y que no son más que nuestros $\sqrt{2}$ y π en triángulos y círculos.

Ha sido un increíble viaje a lugares recónditos, desconocidos para nuestros alumnos, pero imprescindibles para entender las Matemáticas que año tras año repetimos entre nuestros pequeños acompañantes en el día a día.

Y por delante quedan muchas ilusiones por hacer posible la ampliación del proyecto con la colaboración de compañeros de otros departamentos didácticos que sientan la misma pasión por estas tradiciones fundantes esenciales en nuestro devenir.

6. Bibliografía

Buffum, A. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Reston. Virginia: Mathematical of America.

Cervelló, J. (2015). *Escrituras, lengua y cultura en el antiguo Egipto*. El espejo y la lámpara. Bellaterra.

Dreyer, G. (2011). Tomb U-j: A royal burial of dynasty 0 at Abydos, en Teeter, E., *Before the Pyramids*, pp. 127-136. The Oriental Institute. Chicago.

Faulkner, R. (1996). *Diccionario conciso de egipcio medio*. Publicaciones Lepsius. Londrés.

Gardiner, A. (1957). *Egyptian gramar. Being an introduction to the study of hieroglyphs*. Griffith Institute. Oxford.

Ifrah, G. (2002). *Historia universal de las cifras*. Espasa Calpe. Madrid.

Imhausen, A. (2003). *Ägyptische Algorithmen. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathemastische Aufgabentexten*. Wiesbaden: Harrassowitz Verlag.

Luri, G. (2020). *La escuela no es un parque de atracciones*. Ariel. Barcelona.

Maza, C. (2003). *Las matemáticas en el Antiguo Egipto*. Universidad de Sevilla. Sevilla

Pérez, A.M. (2011). *Las matemáticas en la escuela mesopotámica*. XV Jaem Gijón.

Pérez, A. M. (2021). *Las matemáticas escolares egipcia y mesopotámica en la escuela actual*. Proyecto de funciones y competencias del Cuerpo de Catedráticos.

Yuste, P. (2013). *Matemáticas en Mesopotamia: Álgebra, Geometría y Cálculo*. Dykinson. Madrid.

Spira Mirabilis

Carlos Luna Mota
carlos.luna@mmaca.cat
Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

Núcleo temático: Recursos para el aula / Conexiones

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria / Bachillerato

RESUMEN

En esta comunicación se propone un nuevo material para trabajar la proporcionalidad mediante el uso de espirales logarítmicas. Se trata de un material diseñado en el seno del Museu de Matemàtiques de Catalunya que es fácilmente reproducible i adaptable a las necesidades de cada aula.

El proyecto parte del compás áureo, un material conocido y ampliamente divulgado, y busca alternativas para solventar sus principales carencias (no poder comprobar las proporciones de rectángulos de manera directa).

La solución encontrada se basa en el uso de espirales logarítmicas especialmente diseñadas para actuar como computadoras analógicas (en el mismo sentido que actúa el compás áureo) y permite llevar al aula diversas actividades relacionadas con la proporcionalidad con un material barato y fácil de producir y almacenar.

Palabras clave: Proporcionalidad, Razón Áurea, Espiral Logarítmica.

1. El compás áureo como base de una actividad STEAM

Un compás áureo es un caso particular de pantógrafo calibrado para que la constante de proporcionalidad sea la razón áurea φ ≈ 1.618... (Rey y Udina, 2015, Brasó 2023).

Imagen 1. Compás áureo del MMACA.

El funcionamiento básico del compás áureo consiste en abrir sus brazos de manera que dos de sus puntas queden separadas por una longitud dada (BC) y a continuación «leer» el resultado de multiplicar esa longitud por la razón áurea en la separación de otro par de puntas (AB = BC·φ).

De manera análoga se pueden realizar divisiones por esa misma constante e incluso multiplicaciones y divisiones por esa constante al cuadrado (AC = BC· φ^2)

Todas estas propiedades se deducen a partir del Teorema de Tales, teniendo en cuenta que el punto E divide en razón áurea el segmento AG y EDFG es un paralelogramo.

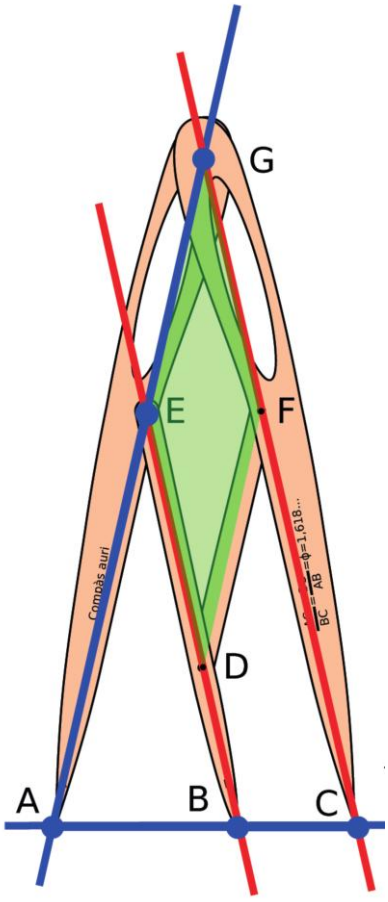


Imagen 2. Funcionamiento del compás áureo.

La simplicidad del material y de los principios de funcionamiento de los pantógrafos permiten a alumnos de diversas edades entender, usar e incluso fabricar sus propios compases áureos y, más en general, crear pantógrafos que multipliquen por diferentes constantes como herramientas para trabajar la proporcionalidad.

Podemos, por ejemplo, verificar la proporcionalidad en diferentes obras de arte, incluyendo las proporciones áureas de buena parte de la arquitectura clásica:

Imagen 3. Dos ejemplos de proporciones áureas de la arquitectura ateniense.

Podemos, también, descubrir razones áureas en animales y plantas:

Imagen 4. Dos ejemplos de proporciones áureas de la arquitectura ateniense.

En denitiva, se trata de una herramienta muy interesante para plantear situaciones de aprendizaje en el contexto de un proyecto STEAM:

- Razones biológicas para la aparición de la razón áurea en la naturaleza
- Usos tecnológicos del pantógrafo, incluyendo el grabado de joyas y monedas
- La ingeniería requerida para construir un compás áureo.
- La proporción áurea en arte y arquitectura

Y, a diferencia de muchos proyectos STEAM, donde la M es prácticamente muda, en

el estudio del compás áureo se dan cita muchos conceptos matemáticos interesantes que están al alcance del alumnado de secundaria:

- Proporcionalidad
- Teorema de Tales
- Propiedades de los paralelogramos
- ...

Lamentablemente, no todo son ventajas. Resulta muy complicado medir las proporciones de un rectángulo con el compás áureo a menos que tengamos más de una copia del mismo, o que estemos dispuestos a mover el compás.

Imagen 5. Resulta difícil comprobar las proporciones de rectángulos con el compás áureo

Ambas soluciones son poco satisfactorias e invitan a buscar alternativas. A continuación exploraremos algunas de dichas alternativas desde la óptica de diseño de materiales que usamos en el MMACA.

2. Otras computadoras analógicas

La solución más sencilla y evidente para comprobar si un rectángulo es áureo consiste en dibujar un rectángulo áureo mayor y trazar una de sus diagonales. Si al ajustar el rectángulo que queremos comprobar a una de las esquinas del rectángulo mayor,

vemos que su esquina opuesta también queda sobre la diagonal, sabremos que ambos rectángulos son proporcionales:

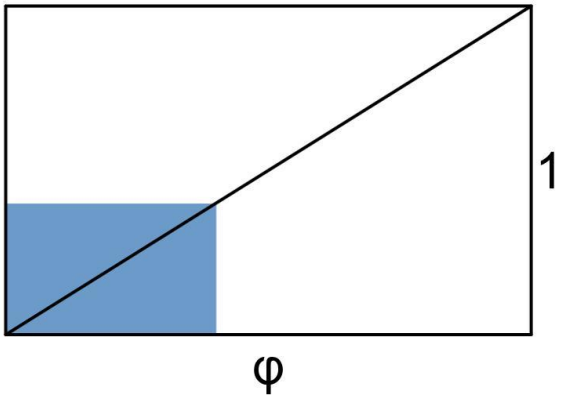


Imagen 5. El rectángulo azul es áureo

Podemos afirmar, siendo generosos, que se trata de una solución poco emocionante. Difícilmente nuestro alumnado se sorprenderá con esta propiedad de los rectángulos y difícilmente podremos «estirar» este material para trabajar cualquier otro contenido que no sea el de la proporcionalidad de rectángulos.

Así pues, pese a que la solución es perfectamente válida, y podría enriquecerse un poco enlazándola con el temario de funciones lineales, es necesario seguir buscando alternativas que vayan más en la línea del propio compás áureo.

En la literatura hay muchos ejemplos de computadoras analógicas capaces de hacer multiplicaciones y divisiones. Sin embargo, la mayoría de esos aparatos hacen uso de una escala numerada para realizar la entrada y la lectura de datos, cosa que los diferencia del compás áureo, que funcionaba de manera totalmente geométrica.

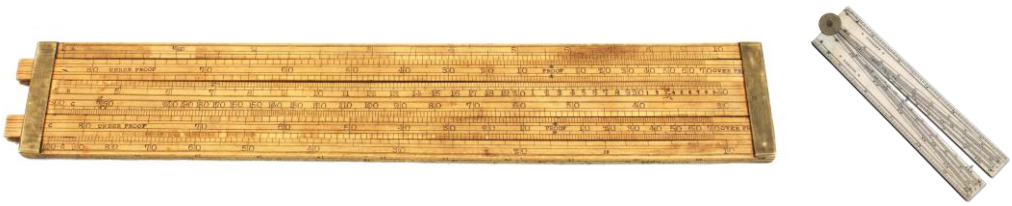


Imagen 6. Regla de cálculo (izquierda) y sector de Galileo (derecha) dos conocidos computadores analógicos.

Un ejemplo notable de computador analógico lo constituyen los nomogramas. Un nomograma consiste en una gráfica en la que aparecen tres o más ejes de

coordenadas, generalmente curvados. El cálculo se realiza marcando el segmento que une puntos concretos de dos de esos ejes y leyendo el resultado donde dicho segmento corta el tercer eje.

En el ejemplo que acompaña este párrafo, puede verse un nomograma basado en la parábola $Y=X^2$ mediante el cual se pueden realizar productos y divisiones. En los ejes rojo y azul se ha marcado la coordenada horizontal de cada punto, mientras que en el eje negro se han marcado la coordenada vertical de cada punto (los ejes están escalados en proporción 1:10 para facilitar su uso).

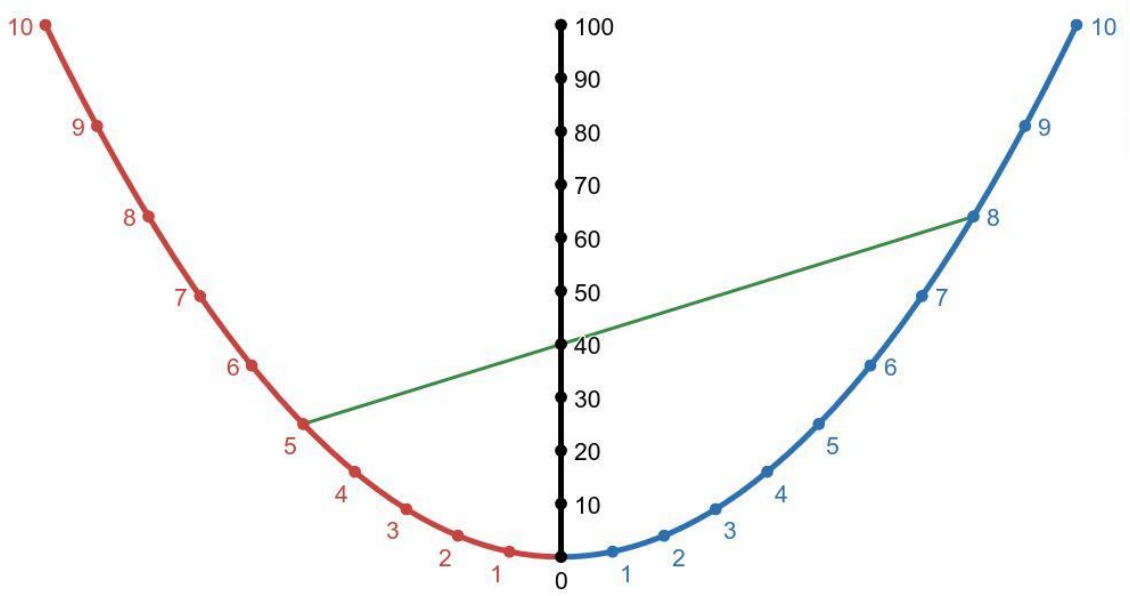


Imagen 7. Nomograma para realizar multiplicaciones con el ejemplo 5 · 8 = 40 destacado.

Se trata de un ejemplo especialmente interesante para el aula de secundaria al trabajar rectas, parábolas y cálculos en coordenadas de manera atractiva y original.

A partir de la idea de nomograma no resulta difícil encontrar otras curvas que realizan cálculos, como por ejemplo la espiral de Arquímedes (al radio se le suma una constante K cada 360º) y la espiral logarítmica (el radio queda multiplicado por una constante K cada 360º).

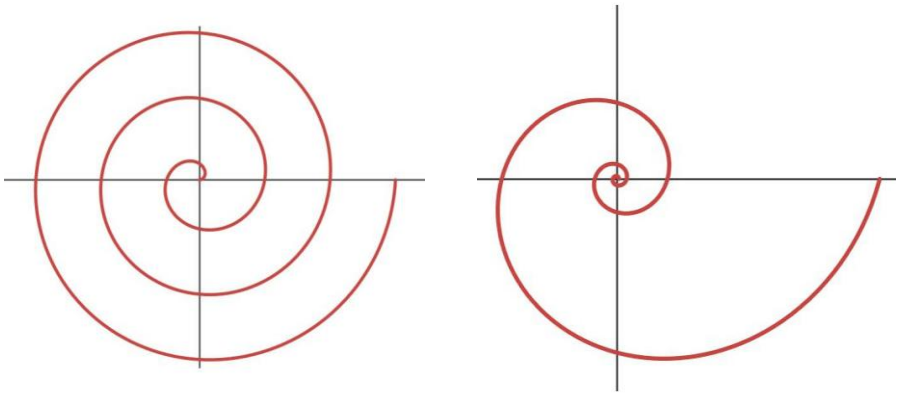


Imagen 8. Espiral de Arquímedes (izquierda) y espiral logarítmica (derecha)

Si bien no es habitual hablar de espirales en secundaria, lo cierto es que se trata de curvas muy sencillas y fáciles de explicar, dada su ubicuidad en nuestro entorno. También son una excelente introducción a las coordenadas polares.

Imagen 9. Ejemplos cotidianos de la espiral de Arquímedes (izquierda) y de la espiral logarítmica (derecha)

En el siguiente apartado veremos cómo podemos usar las propiedades multiplicativas de la espiral logarítmica para trabajar la proporcionalidad en el aula.

3. Espirales logarítmicas para trabajar la proporcionalidad

La espiral logarítmica fue descrita por Albrecht Dürer (1525), fue estudiada por, entre otros, René Descartes (1638) y fue bautizada como «Spira Mirabilis» por Jakob Bernoulli (1692) en honor a sus notables propiedades.

Además de la propiedad que hemos citado antes (el radio queda multiplicado por una constante cada 360º), la espiral logarítmica se caracteriza por alargarse de manera indefinida en ambos sentidos, manteniendo siempre un ángulo constante entre sus rectas tangentes y el radio que pasa por los correspondientes puntos de tangencia. También es destacable que girarla respecto al origen de coordenadas es equivalente a realizar una homotecia desde ese punto.

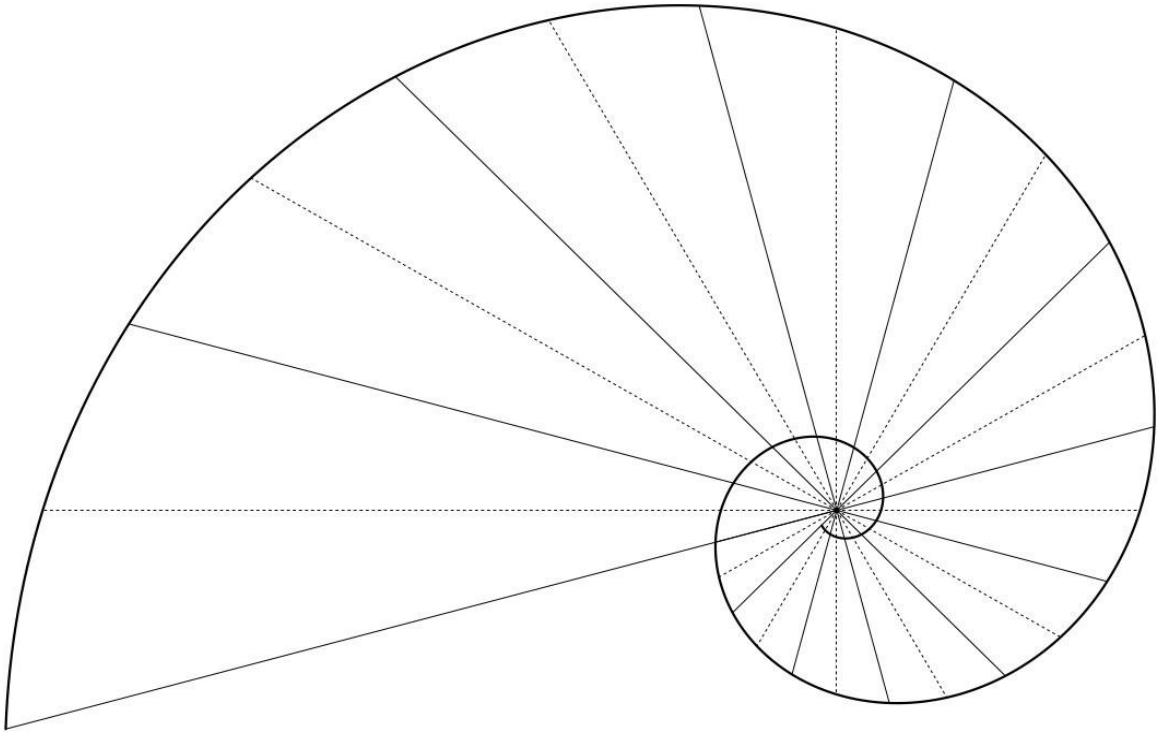


Imagen 10. Espiral logarítmica con 24 radios marcados para facilitar su uso en el aula.

Diferentes constantes de proporcionalidad dan lugar a diferentes espirales logarítmicas de manera análoga a los diferentes tipos de pantógrafos. Así, llamaremos a la espiral que multiplica por K cada αº simplemente: «espiral K/αº».

Así, las espirales φ/180º y φ/360º permiten substituir al compás áureo:

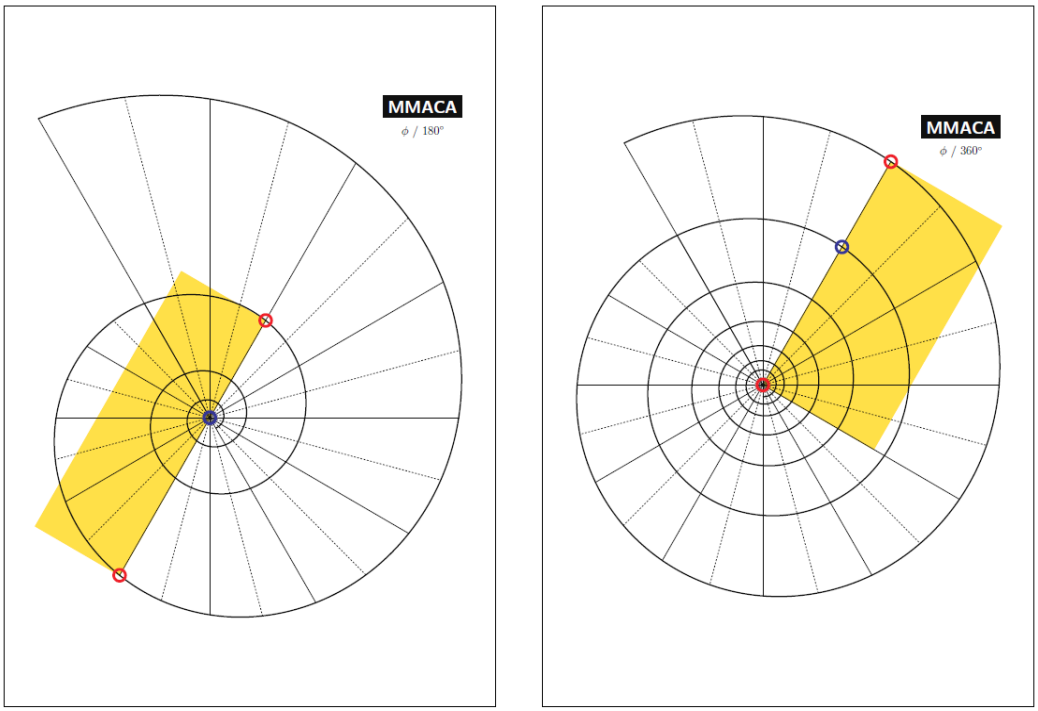


Imagen 11. Espirales φ/180º (izquierda) y φ/360º (derecha), equivalentes al compás áureo.

Mientras que las espirales φ/90º y φ/270º permiten medir si un rectángulo es áureo:

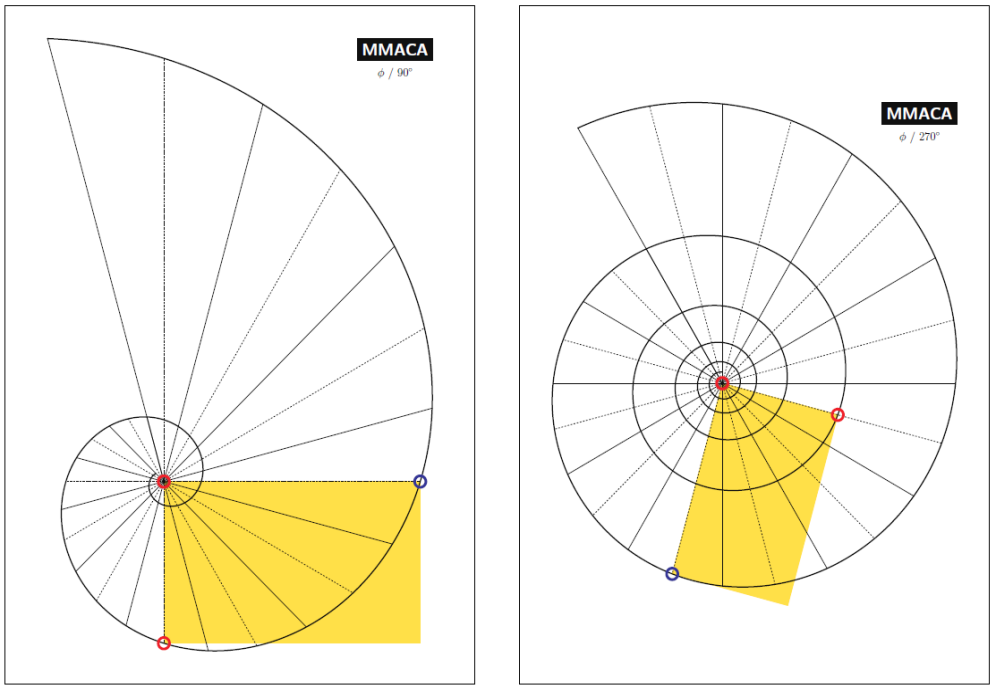


Imagen 12. Espirales φ/90º (izquierda) y φ/270º (derecha), permiten comprobar si un rectángulo es áureo.

Eligiendo diferentes constantes también podemos trabajar las proporciones del papel de la serie A (A3, A4, A5, …) con la espiral √2/270º o estudiar el tamaño relativo de los catetos de un cartabón con la espiral √3/270º:

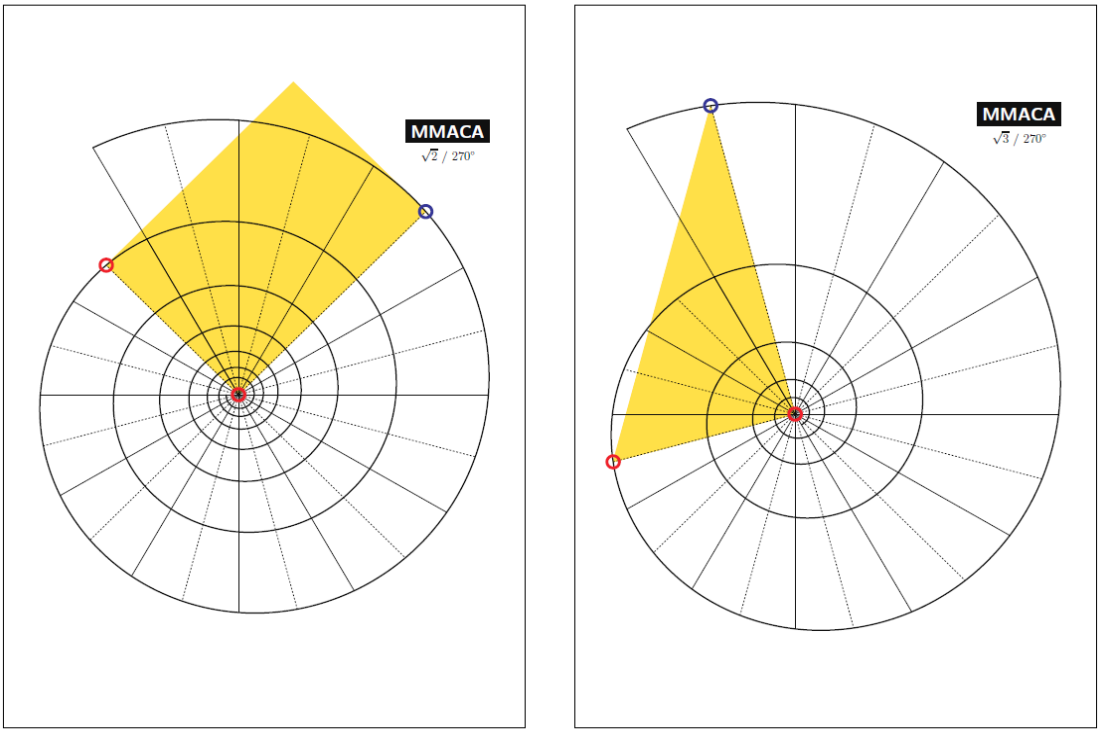


Imagen 13. Espirales √2/270º (izquierda) y √3/270º (derecha).

También podemos plantear a nuestros alumnos por qué las espirales √2/90º, 2/180º y 4/360º parecen iguales:

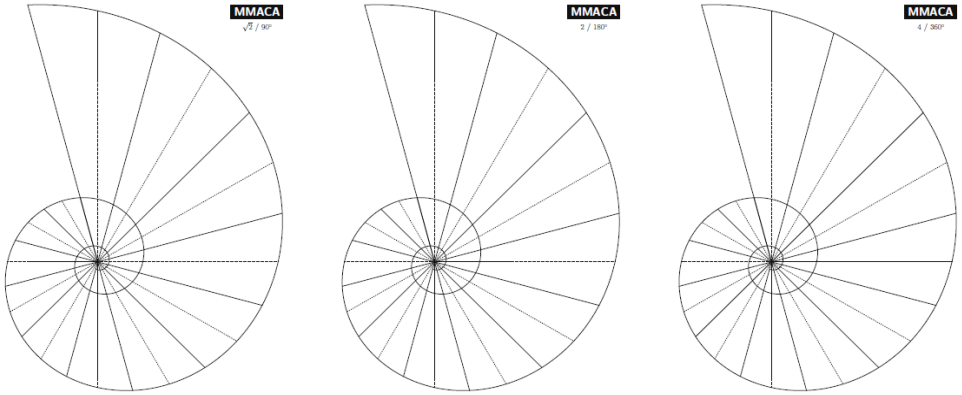


Imagen 14. Espirales √2/90º (izquierda), 2/180º (centro) y 4/360º (derecha).

A partir de este material se puede trabajar el concepto de proporcionalidad en profundidad, llegando incluso a la simplificación de expresiones con radicales (*marca en cada uno de los 24 radios de la espiral 4/360º, la constante correspondiente, simplificando la expresión tanto como sea posible*).

A pesar de su simplicidad, las espirales logarítmicas permiten hacer operaciones sofisticadas y resolver problemas que otros instrumentos de medida o dibujo no son

capaces de resolver. Por ejemplo, resulta interesante ver cómo añadiendo la espiral 2/270º a la regla y el compás es posible resolver el problema clásico de la duplicación del cubo (¡en la antigüedad estuvieron a una fotocopia de conseguirlo!).

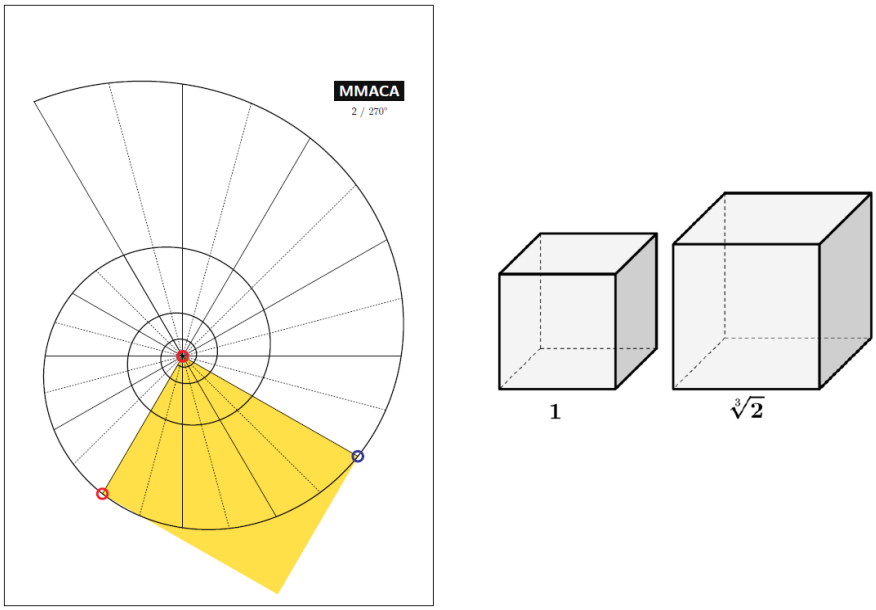


Imagen 14. La espiral 2/270º (izquierda) permite resolver el problema de la duplicación del cubo con regla y compás (derecha).

4. Conclusiones

Este material de aula (disponible en libre descarga en Luna, 2024) es barato y fácil de reproducir (al no tener una escala graduada, puede imprimirse a cualquier tamaño en blanco y negro).

Pese a su simplicidad conceptual, da lugar a actividades de aula interesantes y permite trabajar el temario de matemáticas de diversas etapas de secundaria y bachillerato, abarcando el concepto de proporcionalidad en profundidad, pero también trabajando las expresiones con radicales, la geometría de las espirales, las coordenadas polares, la semejanza y el concepto de computador analógico.

Es, por lo tanto, una herramienta útil a la par que poco explorada. Les invitamos a usarla y a hacernos llegar sus experiencias.

Referencias

Brasó, E. (2023). *El nombre d'or*. https://mmaca.cat/moduls/nombre-or/

Luna, C. (2024). *Spira Mirabilis*. https://github.com/CarlosLunaMota/Spira-Mirabilis

Rey, J. y Udina, M. (junio 2015). *Variacions sobre Fibonacci i el nombre d'or*. Nou Biaix, n.º 36.

¿Por qué no hay mujeres matemáticas?

Episodios matemáticos

Mª del Pilar Sabariego Arenas (1)

sabariego0@educantabria.es (1)

Consejería de Educación, Formación Profesional y Universidades del Gob. de Cantabria (1)

Núcleo temático: Recursos para el aula, comunicación y divulgación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

A pesar de ser tan antiguas como el ser humano, y por tanto contar con una historia paralela a la de la humanidad, las matemáticas suelen presentarse separadas de su contexto histórico, dando prioridad a su carácter instrumental y aplicado, sin tener en cuenta la importancia que tienen en sí mismas ni su evolución.

En los currículums de la educación secundaria se recomienda utilizar la historia de las matemáticas como un recurso didáctico para favorecer el acercamiento del alumnado a situaciones reales planteadas en diferentes momentos, que han perdurado a lo largo de los siglos como base del desarrollo matemático posterior. Siguiendo esta indicación metodológica se presentan una serie de actividades que relacionan la historia de las matemáticas con el currículum de 3º de ESO.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, visibilización de mujeres matemáticas, actividades con contexto histórico.

1. Introducción

Desde la reforma de las matemáticas que comenzó a forjarse a finales de los años 70, cuando se abandonaron las prácticas introducidas por la “matemática moderna”, cada vez han sido más los profesores de diferentes niveles educativos que se han interesado por la introducción de la perspectiva histórica en la enseñanza de las matemáticas. Muestra de ello son las numerosas publicaciones que podemos encontrar en revistas como Enseñanza de las Ciencias, Suma, Números y Épsilon (Sierra, 2000). No obstante, no cabe duda de que la historia de las matemáticas ha sido y es la gran ausente de la educación matemática. Su aparición normalmente está vinculada a la narración de anécdotas o biografías desvinculadas de la construcción de conocimientos matemáticos.

Cuando profundizamos en la historia de las matemáticas aparecen debates, disputas y controversias que supusieron avances o retrocesos en el desarrollo de teorías; aceptaciones, modificaciones y evoluciones de conceptos; conjeturas, demostraciones y refutaciones que necesitaron varios siglos para ser realizadas y que supusieron el desarrollo de nuevas teorías y, en general, el avance de las matemáticas. Su conocimiento da sentido a la labor de los matemáticos y a su contribución al desarrollo de la humanidad, puesto que se dota de contexto a las teorías que, la mayoría de las ocasiones, se estudian de una manera abstracta y desvinculada de la realidad. Por tanto, no sólo debemos contar la anécdota, sino ahondar en la evolución de los conceptos y en el proceso seguido hasta llegar a lo que se encuentra en los libros. (Vidal Cortés, Quintanilla Gatica, 2008).

1.1 Ventajas para la introducción de la historia de las matemáticas en el aula

Además de las características y motivaciones expuestas antes, diversos autores han tratado de mostrar las ventajas que tiene la introducción de la historia de las matemáticas en la práctica docente. Por ejemplo, Meavilla (2008) en *Algunas razones para introducir la Historia de las Matemáticas en las Aulas de Secundaria* nos da diez razones que legitiman su uso como herramienta beneficiosa para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: La historia de las matemáticas

1. Facilita al profesor materiales y recursos didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de sus alumnos y alumnas.
2. Permite descubrir el lado ameno de las Matemáticas y puede influir favorablemente en la motivación de los estudiantes.
3. Ayuda a inculcar en los alumnos y alumnas valores como el esfuerzo, la constancia, el trabajo, la humildad, la disponibilidad, …
4. Contribuye a valorar la aportación de las mujeres en la construcción y el desarrollo de dicha disciplina.
5. Permite aprender con la ayuda de unos profesores muy especiales: los grandes sabios de otros tiempos.
6. Muestra que dicha disciplina es una ciencia viva y que sus conceptos y procedimientos suelen cambiar con el tiempo.
7. Permite dar una visión más humana de dicha ciencia (la Matemática no es obra de los dioses, es el resultado del trabajo de hombres y mujeres que suelen equivocarse). Este hecho puede contribuir a que el alumno no se sienta frustrado ante sus errores y pueda aprender de ellos.
8. Los profesores (alumnos) pueden aprovecharse especialmente de la perspectiva histórica de las Matemáticas, descubriendo métodos alternativos para la resolución de problemas, distintos de los que generalmente enseñan (aprenden) en clase y que pueden ser beneficiosos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
9. Puede contribuir a apreciar la utilidad de esta disciplina en la resolución de problemas prácticos.
10. Permite mostrar a los estudiantes el papel capital de las Matemáticas en la construcción de la cultura humana.

2. Nacimiento de la idea y actividades

Siempre es difícil empezar de cero cuando se intenta dar un nuevo enfoque a la enseñanza o cuando se quieren introducir aspectos didácticos distintos a los que uno usa habitualmente y a los que se está acostumbrado. La idea de introducir la historia

de las matemáticas en mis clases llevaba bastante tiempo rondándome, más aún desde que hace unos años comencé a impartir la asignatura Desarrollo Histórico y Reciente de las Matemáticas y del Conocimiento Escolar en el Máster de Formación del Profesorado, pero no tenía muy claro cómo hacerlo. Las diez razones que menciona Meavilla (2008) me parecían importantes, pero excesivas para tratarlas todas a la vez. No obstante, no fui yo quien dio el primer paso, sino que todo surgió de manera casual durante el primer trimestre del curso 2019-2020 en una de las clases de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Una alumna preguntó que por qué no había mujeres matemáticas. Mi sorpresa fue mayúscula y me señalé a mí misma. Ella sonrió y dijo: “Pero conocidas, mujer. Hay una que se llama Hipatia o algo así ¿no?” Mi primera intención fue soltarle una ristra de nombres: Dido, Maria Gaetana Agnesi, Sofía Kovalevskaya, Sofie Germain, Florence Nightingale, Emmie Noether, Maryan Mirzakhani, Karen Uhlenbeck, … (en el mismo master mencionado anteriormente había dirigido un TFM al respecto (Posadas, 2018) y tenía muchas referencias), pero en ese mismo instante me callé, me vinieron muchísimas ideas a la mente y les dije que durante el curso les iba a ir hablando de mujeres matemáticas y que, para empezar, al día siguiente les llevaría una serie de datos.

Esa fue la primera actividad, aprovechando que estábamos en la semana en la que se estaban fallando los Premios Nobel, mostrarles con números la cantidad de mujeres galardonas con Premios Nobel, Medallas Fields y Premios Abel y que así se hicieran una idea de por qué las mujeres matemáticas y científicas, en general, no son tan conocidas. Una actividad en línea con los puntos 2 y 4 del decálogo de Meavilla (2008).

A partir de esa exposición, en cada tema preparé una actividad relacionada con la historia de las matemáticas, procurando, aunque no siempre fue posible por cuestiones sociales y culturales, elegir la historia de una mujer matemática que estuviese relacionada con el tema.

En un principio las actividades se planteaban (mediante un cartel que colgábamos encima de la pizarra) con un reto propuesto al inicio del tema, que se resolvía cuando

este finalizaba. Durante ese tiempo el alumnado, de manera voluntaria, podía trabajar en el problema y preguntar las dudas que les surgieran. El día de la resolución, se aprovechaba para contar la historia relacionada con el reto y con la unidad trabajada en clase. Hechos relacionados (según la actividad y la parte de la historia) con casi todos los beneficios señalados por Meavilla (2008), aunque destacan el 1, el 2, el 3, el 4, el 7, el 8, …

Conforme el curso fue avanzando, el alumnado cada vez mostraba más interés por la "historia", como ellos y ellas decían, y menos por resolver los retos, así que las actividades fueron cambiando, llegando a proponer exámenes pseudocontextualizados históricamente. Es decir, proponer exámenes donde el hilo conductor fuera la historia de algún matemático, relacionando los contenidos de la prueba con detalles de su vida. Este tipo de actividad se relaciona directamente con las razones 2, 3, 4, 7, 9 y 10 propuestas por Meavilla (2008).

A continuación, se muestran algunas de las actividades realizadas con el alumnado y su evolución.

En la página de mi blog dedicada a las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO, se pueden consultar todas las actividades y cómo han ido evolucionando, las reseñas históricas y las reacciones del alumnado: *https://pilarsabariego.com/categoria/cursos/3o-eso-matematicas-academicas/*

2.1 Actividad 1. Algunos datos

Como he explicado antes la actividad consistió en presentar los datos acerca del número de hombres y mujeres que han ganado los Premios Nobel, las Medallas Fields y los Premios Abel (ver Figura 1), pero, además, aproveché para contarles su historia, explicarles las distintas versiones (incluidas las relaciones amorosas) que existen sobre la no existencia de Premio Nobel de Matemáticas y hacer énfasis en el matemático Mittag Leffler porque iba a aparecer más adelante vinculado con la primera mujer que consiguió una plaza en la universidad: Sofía Kovalevskaya.

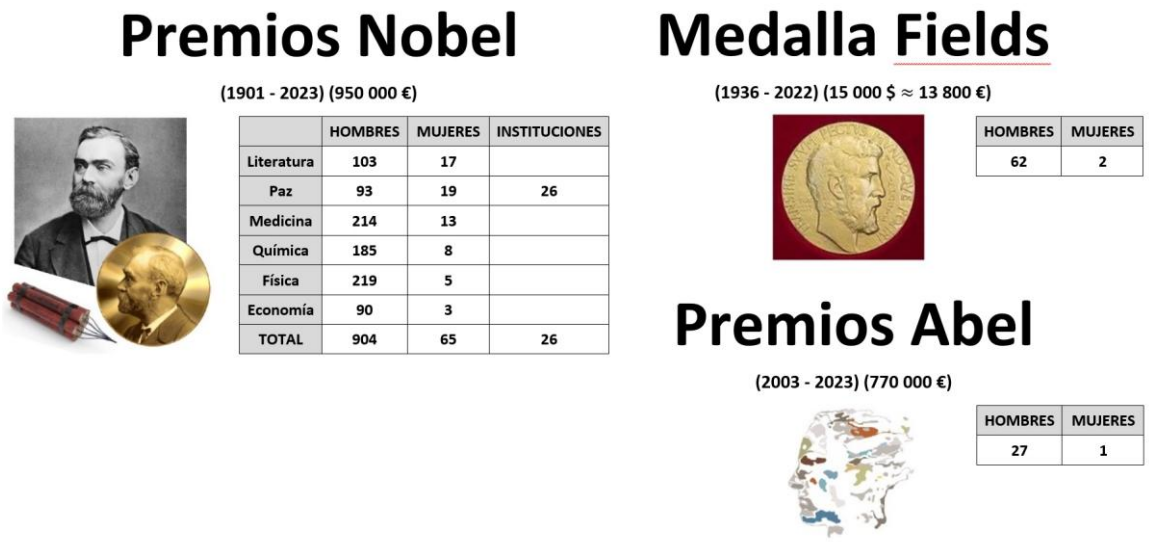


Figura 1. Algunos datos a fecha de 2023.

La reacción del alumnado fue de sorpresa, no sólo por los datos históricos (incluida la crónica rosa), como que Alfred Nobel decidiese dejar su fortuna a establecer los Premios Nobel, debido a su sentimiento de culpabilidad por el mal uso que se le estaba dando al su invento: la dinamita; o que Marie Curie es la única mujer que tiene dos premios Nobel (y una de las únicas cuatro personas que tienen ese honor), sino porque vieron, con datos, la gran diferencia que hay entre hombres y mujeres.

Las preguntas que flotaron en el aire fueron: ¿de verdad que no hay más mujeres? ¿Por qué? La respuesta la dieron ellos mismos también: discriminación. Incluso llegaron a hablar de que los jurados eran injustos, cosa que, evidentemente, no podemos decir, aunque sí es un hecho que en su mayoría han estado formados siempre por hombres y tal vez eso haya influido en sus decisiones.

Con esta actividad se provocó la reflexión de los alumnos en cuanto a la igualdad y al vínculo que existe entre cualquier ciencia y el contexto social en el que se desarrolla, mostrando la necesidad de la existencia de unos valores éticos y morales por encima de egocentrismos y protagonismos. Todo ello ligado con el beneficio 3 de Meavilla (2008).

2.2 Actividad 2. Dido

La segunda actividad (desarrollada durante la unidad dedicada a números racionales y con la intención de hablar de la primera mujer de la que se conoce que usó las matemáticas para resolver un problema real) ya contaba con un reto para que lo resolviesen los alumnos (ver Figura 2). Todo el alumnado participó y las respuestas fueron dos: un grupo dijo que cualquier forma era válida puesto que la cantidad de cuerda no variaba y otro dijo que la mejor forma era un círculo porque no tenía esquinas.

Como sabemos la forma geométrica con la que se abarca la mayor cantidad de superficie para una cantidad de cuerda fijada es el círculo y para que el alumnado lo viera les preparé un archivo de GeoGebra (*https://www.geogebra.org/classic/p56wwghg*) en el que moviendo el deslizador podían ver como aumentando el número de lados de los polígonos cada vez nos acercamos más al círculo y, además, cada vez abarcamos más superficie: el método de exhaución

Figura 2. Dido.

Una vez resuelto el reto, les conté la historia de Dido: *la fundadora de Cartago. Dido, o Elisa de Tiro, era hija de Matán I, el rey de Tiro, y tenía dos hermanos: Pigmalión, el heredero del reino, y Ana, la hermana pequeña.*

Pigmalión era un hombre egoísta y ambicioso que no contento con heredar el reino de su padre, ansiaba tener cada vez más riqueza y poder. Un día se enteró de que había un sacerdote llamado Siqueo que tenía muchos tesoros escondidos, así que obligó a su hermana Elisa a casarse con él, con el fin de conseguir su fortuna.

Elisa obedeció a su hermano y se casó con Siqueo, a pesar de no estar enamorada de él. Tras convivir con él y conocerlo mejor, esto cambió y Elisa terminó amando a su marido.

Con el tiempo, Pigmalión reveló sus verdaderas intenciones a Elisa y esta averiguó dónde guardaba su marido su tesoro, pero se lo ocultó a su hermano. Es más, le engañó y le dijo que se encontraba bajo el altar del templo, cuando en realidad estaba enterrado en el patio de su casa.

Pigmalión creyó a su hermana y por la noche envió a unos esbirros a matar a Siqueo y a robar sus riquezas. Cuando Elisa encontró a su marido muerto corrió a desenterrar el tesoro del patio y huyo con su hermana y unas doncellas.

En su huida Elisa llegó a las costas de África donde encontró el reino de Jarbas, a quien pidió cobijo y un trozo de tierra. El rey Jarbas, pensando que podría engañar a Elisa, le dijo que le daría tanta tierra como pudiese ocupar con la piel de un buey. Entonces, Elisa, que no se iba a rendir ante el reto propuesto, comenzó a hacer tiras lo más finas que pudo con la piel del buey, se fue a la orilla del mar y rodeó un trozo de tierra con la superficie más grande posible. (Elisa construyó un semicírculo con diámetro la orilla del mar.) Jarbas tuvo que darle la tierra que abarcó y en ella Elisa mandó construir una fortaleza que con el tiempo se convertiría en Cartago, y más tarde en Túnez.

Una vez instalada en su castillo como reina del terreno, los lugareños comenzaron a llamarla Dido, y es con ese nombre con el que la conocemos hoy en día.

Además, ya como reina, Dido protagonizó una de las historias de amor más dramáticas de las epopeyas latinas, al vivir un tórrido romance con Eneas, el protagonista de la Eneida, pero para profundizar en ese suceso continuar leyendo en *https://pilarsabariego.com/historia-dido/.*

En esta actividad se muestra una visión humana de las matemáticas, como resultado del trabajo de una mujer, beneficios señalados por Meavilla (2008) en los puntos 4 y 7. Además, muestra la utilidad de las matemáticas para resolver un problema práctico (punto 9).

2.3 Actividad 3. Escuela Pitagórica

La tercera actividad fue propuesta en la unidad didáctica dedicada a radicales. En esta ocasión el reto consistía en representar en la recta real los números $\sqrt{2}$ y Φ. El alumnado sabía que todos los números pueden ser representados en la recta real, pero sólo conocía el método para representar los números racionales. Se trataba de ver si a alguien se le ocurría o encontraba cómo representar los números irracionales. En esta ocasión ninguno dio con la solución y cuando se mostró en clase, comentaron que tampoco hubiesen llegado a ella por ellos mismos.

Una vez resuelto el reto, les conté la historia de Hipaso de Metaponto y para ello les expliqué quién era Pitágoras, situándolos en la Escuela Pitagórica de los siglos VI y V a.C. Además, les conté el triste final de los Pitagóricos y que en esos últimos momentos la directora de la Escuela era una mujer: Teano, la esposa de Pitágoras, quien le sucedió tras su muerte. También les mostré la demostración que le costó la vida a Hipaso de Metaponto.

Esta actividad está relacionada con las ventajas 6 y 7 de Meavilla (2008), puesto que se muestra una visión de las matemáticas como ciencia viva, cuyos conceptos cambian con el tiempo, puesto que los Pitagóricos creían que todo era número y se negaban a creer que $\sqrt{2}$ fuese irracional. Estaban equivocados y todas las personas (incluso los matemáticos y matemáticas profesionales) cometen errores. Lo importante es aprender de ellos.

Para conocer más detalles de esta historia continuar leyendo en: *https://pilarsabariego.com/historia-escuela-pitagorica/*

2.4 Actividad 4. Duelos matemáticos del s. XVI

Cuando llegamos a la unidad de ecuaciones estaba claro que había que contar la historia de los algebristas italianos del s.XVI.

En clase se explicó cómo se deduce la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado y el reto propuesto era encontrar la fórmula para resolver las ecuaciones de tercer grado. En esta ocasión en el cartel anunciador ya se les indicaba que podían buscarla en Internet, porque evidentemente es difícil de deducir, y más para alumnos de 3º de ESO.

Nadie intentó el reto, así que les remití a mi web donde podían encontrar la respuesta e incluso la deducción de la fórmula. Aunque su implicación en la "parte matemática" fue nula, el interés por la "parte histórica" aumentó, preguntando en numerosas ocasiones cuándo les contaría la historia.

En esta ocasión esta actividad está relacionada con los beneficios 2, 5, 7 y 8 de los propuestos por Meavilla (2008).

La historia puede leerse con detalle en: *https://pilarsabariego.com/historia-duelos-matematicos-del-s-xvi/* (entrada que resultó ganadora de la septuagésimo novena edición del Carnaval de Matemáticas).

2.5 Actividad 5. Hipatia

Para celebrar el Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia la actividad propuesta consistía en estudiar las propiedades de la elipse de manera manipulativa y con GeoGebra.

En ese momento estábamos en la primera época de exámenes de la segunda evaluación, así que casi nadie intentó realizar la actividad, que realmente forma parte del currículum de Matemáticas I de 1º de Bachillerato. Pero teniendo en cuenta el día

que celebrábamos y que era la única mujer matemática que les sonaba cuando comenzamos a realizar estas actividades, era justo dedicarle un tiempo a conocer lo poco que sabemos de su vida.

En la actividad de Hipatia están presentes las ventajas 2, 4 y 9 de Meavilla (2008). Basta poner como ejemplo cómo se rompen las piedras del riñón con ultrasonidos, para conocer una utilidad práctica de las elipses, sin tener que recurrir al movimiento de los planetas.

Para profundizar en la vida de Hipatia leer: *https://pilarsabariego.com/historia-hipatia/*

2.6 Actividad 6. Matemáticas Indias (s. V – XII)

La unidad dedicada a la resolución de problemas de ecuaciones y sistemas era evidente que había que relacionarla con las matemáticas indias puesto que del libro Lilavati, que Bhaskara Acharia dedica a su hija, haríamos algunos problemas. Por tanto, como reto motivador les propuse uno de esos problemas (ver Figura 3), en esta ocasión, alcanzado por todo el alumnado. No obstante, teniendo en cuenta los antecedentes igual la motivación vino por el examen de problemas y no por la actividad histórica.

En cualquier caso, esta actividad me sirvió para comprobar que no reconocían la importancia del número 0, ni conocían cómo se introdujo en nuestro sistema de numeración. De hecho, sabían que nuestro sistema es el indoarábigo, pero no sabían en qué momento cambiamos de los números romanos (sistema no posicional aditivo) a nuestro sistema posicional, ni por qué lo hicimos. Tuve que plantearles en la pizarra la suma IV+X en vertical para que se hiciesen una idea de la dificultad que tiene sumar utilizando un sistema no posicional aditivo.

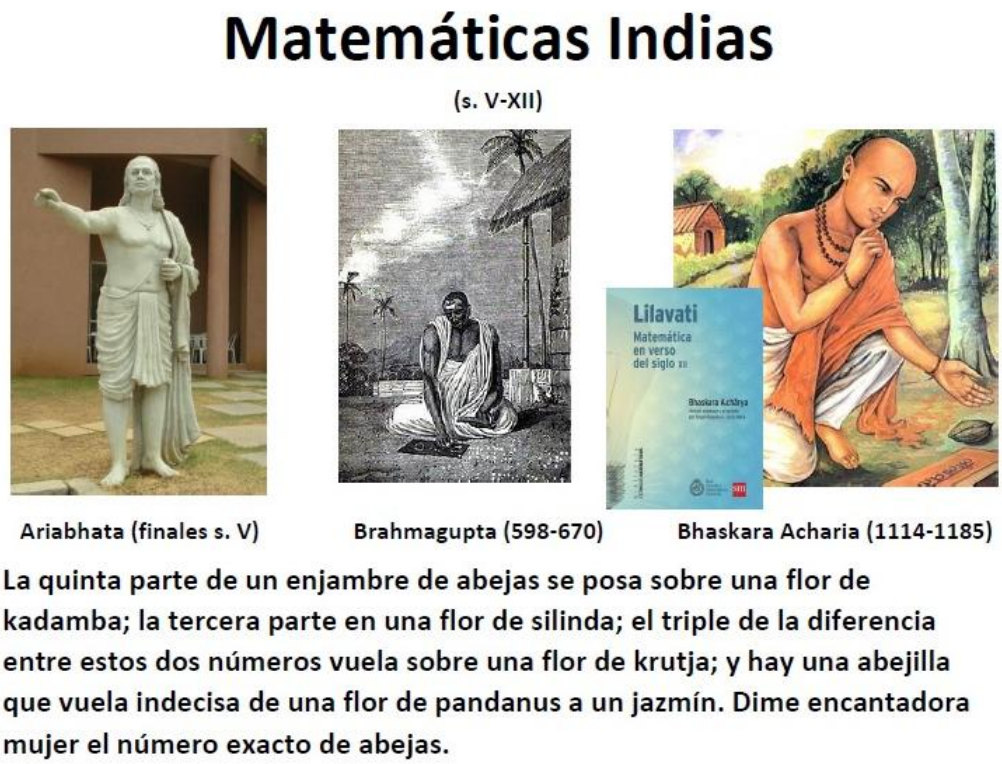


Figura 3. Matemáticas Indias. s. V-XII

Aquí volvemos a ver cómo las matemáticas son una ciencia viva cuyos conceptos cambian con el tiempo, con lo cual esta actividad está relacionada con el beneficio 6 de Meavilla (2008).

Para conocer más sobre la historia de las matemáticas indias leer: *https://pilarsabariego.com/historia-matematicas-indias-s-v-xii/*

2.7 Actividad 7. René Descartes

Como ya insinué antes, al realizar la actividad 6 y ver que la implicación del alumnado había aumentado, seguramente debido a que el reto propuesto les servía de repaso para el examen de problemas de ecuaciones y sistemas, decidí cambiar el tipo de actividad.

La siguiente unidad sería la de funciones lineales y cuadráticas, donde es imposible no hablar de René Descartes, puesto que las representaciones gráficas se realizan sobre unos ejes cartesianos.

La prueba final escrita que les propuse tuvo como hilo conductor la historia de Descartes, sus vicisitudes y sus estudios matemáticos.

El examen completo puede verse en una entrada que apareció en *https://pilarsabariego.com/categoria/cursos/3o-eso-matematicas-academicas/*, pero aquí se muestran algunos ejercicios para mostrar cómo se desarrolló esta idea:

> Cuentan los estudiosos, aunque tal vez sea una leyenda, que una vez estaba el filósofo y matemático René Descartes enfermo y desde su cama comenzó a observar el vuelo de una mosca intentando buscar algún patrón que le permitiera saber el rumbo que iba a seguir su amiga voladora. Se preguntó si habría alguna manera de determinar en cada instante que posición tenía la mosca y tras pensarlo muy bien llegó a la conclusión de que, si supiera la distancia de la mosca al techo, a una pared y a otra pared contigua a la anterior, tendría la respuesta. Acababa de descubrir o inventar los ejes de coordenadas o ejes cartesianos (que reciben este nombre en su honor).

Ejercicio A. Desde su cama Descartes observa que la mosca se posa en la ventaba y se imagina los ejes cartesianos de la ventana con el origen en el centro de la misma y paralelos a los listones que forman el marco de la ventana. En esa situación la mosca está en el punto $A\,(-5{,}4)$ y comienza a moverse por la ventana hasta llegar al punto $B(1{,}0)$. En ese momento levanta el vuelo y al rato vuelve a posarse en el punto $C(3,-2)$. Entonces Descartes se pregunta si este punto estará alineado con los otros dos puntos. ¿Podrías ayudar al pobre René a resolver su dilema y que así pueda descansar tranquilo y recuperarse de su enfermedad?

En septiembre de 1649 Descartes recibió una invitación de la reina Cristina de Suecia para que le ayudara a montar una academia en Estocolmo. Quería que se encargara de dar las clases de ética y teología. Descartes estaba encantado con la oferta y no dudó en aceptarla, sin preguntar las condiciones de trabajo ni el horario del mismo. ¡Error! Él, que siempre había sido una persona enfermiza y que solía pasar casi todas las mañanas metido en la cama, tuvo que comenzar a levantarse a las cuatro y media de la mañana porque la reina Cristina insistía en iniciar las clases a las cinco, incluso en invierno. Y aquel invierno fue especialmente duro. Tanto como para que en enero Descartes hubiese cogido una neumonía a consecuencia de la cual falleció el 11 de febrero de 1650, a los 53 años de edad. Antes de morir, Descartes aplicó sus conocimientos de medicina en la elaboración de un brebaje a base de vino y tabaco con la esperanza de que le curase su enfermedad. Su cometido era hacerle vomitar las flemas, aunque realmente sólo lo empeoró.

Por cierto, Descartes era católico y Suecia un país protestante, así que fue enterrado en un cementerio para niños no bautizados: el Cementerio de los Inocentes.

Ejercicio B. Según la receta de Descartes cada centímetro cúbico del vino contenía 200 unidades curativas, y cada mg de tabaco 300. Si Descartes requería 2400 unidades curativas y se le administran v centímetros cúbicos de vino y t mg de tabaco,

a. ¿Cuál es la función que relaciona v y t? (Variable independiente el tabaco.)

b. Representa en una gráfica la función anterior.

c. ¿Cuántos centímetros cúbicos de vino tomará si toma 6 mg de tabaco?

d. ¿Cuántos mg de tabaco tomará si toma 6 centímetros cúbicos de vino?

e. ¿Por qué no tiene sentido representar en la gráfica valores negativos?

Ejercicio C. Como sabemos a la reina Cristina de Suecia le gustaba comenzar a trabajar muy temprano, pero eso no significa que estuviese dormida y que plantease problemas nimios. Una de esas madrugadas le preguntó a Descartes: ¿podrías determinar qué cantidad de dinero debo dar a mis primera y segunda sirvientas de manera que sus sueldos sumen 32 riskdaler (moneda sueca del s. XVII) y que el producto de ellos sea máximo? Ayuda a Descartes a resolverlo y que pueda volver a la cama a pasar la mañana.

En esa ocasión los beneficios que aporta esta actividad están relacionados con los puntos 2, 3, 9 y 10 del decálogo de Meavilla (2008).

3. Conclusiones

Si hacemos un repaso de todas las actividades planteadas se puede ver una evolución en las mismas fruto de del desconocimiento con el que se comenzaron a realizar.

Aunque no puede negarse que la anécdota histórica o biográfica es lo que más llama la atención de cualquier persona que se acerque a la historia en general, en el caso de las matemáticas quedarnos sólo con eso nos priva de la oportunidad de motivar a los alumnos, aprender de los grandes matemáticos, valorar el esfuerzo y la constancia de los mismos, humanizarlos, …

Para mí ha supuesto un revulsivo, que me ha permitido comprender mejor los contenidos matemáticos y el momento en el que surgieron. Además de obligarme a idear metodologías que me permitieran profundizar más en la historia y no quedarme sólo en la anécdota.

Para mi alumnado ha supuesto un cambio de visión de las matemáticas y de las personas que trabajamos en ellas, descubriendo que somos seres humanos con emociones, que cometemos errores y que conseguimos retos, gracias al esfuerzo y a la constancia.

Referencias

Meavilla, V. (2008). Algunas razones para introducir la historia de las matemáticas en las aulas de secundaria. *Sigma: revista de matemáticas*, nº 33, 221-237.

Posadas Ruiz, A. (2018). Trabajo de Fin de Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. *Mujeres y Matemáticas*. Universidad de Cantabria. Obtenido el 8 de marzo de 2024 de UCREA: *https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/14498*

Sierra Vázquez, M. (2000). El papel de la historia de la Matemática en la enseñanza. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas. (Ejemplar dedicado a: Las Matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos)*, nº 43-44, 93-96.

Vidal Cortés, R., Quintanilla Gatica, M. (2008) *La historia de la Matemática y su incorporación en el aula. Una síntesis de algunas propuestas*. Actas del XII Simposio de la SEIEM. Obtenido el 8 de marzo de 2024 de:

http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXII/hmem/VidalYQuintanilla.pdf

https://pilarsabariego.com/categoria/cursos/3o-eso-matematicas-academicas/

El distanciamiento físico. ¿Colocaciones o teselaciones?[30]

Eugenia Torres Martín[1], Jordi Deulofeu Piquet[2]

eugetor@gmail.com[1], jordi.deulofeu@uab.cat[2]

[1]Instituto de Secundaria Serra de Miramar de Valls (Tarragona, España)

[2]Dept. de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra (Cerdanyola del Vallès, España)

Núcleo temático: Recursos para el aula. Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

El aprendizaje basado en situaciones supone un buen contexto para relacionar las Matemáticas con situaciones de la vida cotidiana cercanas a las vivencias del alumnado[31]. ¡Y qué mejor situación que las medidas de distanciamiento físico propuestas por el gobierno en el 2020 después del primer confinamiento vivido a causa del covid19! Un excelente contexto para plantear en el aula una actividad rica, de suelo bajo y techo alto. La experiencia fue llevada a cabo con alumnos de 3ESO en el curso 2022-23. El análisis de los trabajos realizados por los alumnos ha mostrado que la actividad puede adaptarse a distintos niveles de profundización y que puede enriquecerse con las propuestas de los alumnos, ampliando así su horizonte matemático.

Palabras clave: Situación de Aprendizaje, Justificación Matemática, Conexiones, Generación de preguntas y Comunicación.

[30] En esta comunicación se presenta el contenido del artículo que con el mismo título está pendiente de publicación en la revista “Números”.

[31] Se utiliza mayoritariamente el término alumnado para hacer referencia a un conjunto de alumnos con independencia de su género. En el mismo sentido se utilizan los términos alumno, alumnos y profesor.

1. Introducción

La normativa sobre distanciamiento físico establecida por el gobierno español el 19 de junio de 2020 exigía que en espacios cerrados y abiertos debía haber una distancia de 1,5m entre personas o una superficie de 2,5m^2 por persona. En este contexto se realizó una actividad de aula con alumnos de 3ESO durante el curso 2022-23.

El principal objetivo de esta actividad era justificar si mantener una distancia de 1,5m entre personas es equivalente o no a que cada persona ocupe una superficie de 2,5m^2. También se invitaba al alumnado a plantearse nuevas preguntas relacionadas con la situación del problema, preguntas que se volvían a proponer en el aula a modo de “revisitación” del problema. Las investigaciones recientes muestran las transferencias que se dan entre las tareas de inventar y resolver problemas (Singer, 2015) puesto que son dos quehaceres que se relacionan de manera natural ya que en el proceso de resolución de un problema el alumnado puede generar nuevas cuestiones. La reflexión sobre la solución de un reto puede poner en duda las acciones realizadas y conducir a nuevas preguntas que reformulen el reto original (Silver, 1994).

Generar nuevas preguntas supone, por un lado, enriquecer la actividad, y por el otro, promover la participación de los estudiantes independientemente de sus capacidades, por lo que se trata de una tarea que, siendo inclusiva, produce al mismo tiempo caminos que tienen como objetivo ayudarlo a desarrollar habilidades de pensamiento como "ser sistemático", "generalizar", “visualizar” o “usar analogías” (Piggot, 2004).

Si bien “revisitar” algunas actividades enriquecidas con las propuestas del alumnado permite fortalecer competencias matemáticas como la de saber comunicar y representar conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando el lenguaje y la terminología matemática apropiada, queda mucho trabajo por hacer, sobre todo en lo que respecta a las preguntas que generan los alumnos, para que estas no se limiten exclusivamente a “replicar” las cuestiones que ya han surgido previamente (Torres, 2022).

La gestión de la clase ha mostrado, por una parte, que la actividad resulta rica y abierta, que estimula la curiosidad del alumnado y fomenta su iniciativa. Por otra parte, la actividad puede adaptarse a distintos niveles de profundización y enriquecerse con las preguntas que proponen los alumnos, ampliando así su horizonte matemático. Sin embargo, también se han puesto en evidencia las carencias del alumnado respecto a ciertos conceptos geométricos, así como la falta de recursos para explicar con claridad y precisión lo que hacen. Todo ello invita a un análisis en profundidad por parte del profesor para revertir estas dificultades y ofrecer al alumnado herramientas que mejoren su expresión y comunicación matemáticas.

2. Contexto y metodología

La actividad que se presenta es una experiencia de aula que se llevó a cabo en el Instituto Serra de Miramar de Valls (Tarragona) con 64 alumnos de 3ESO durante el curso 2022-23. El alumnado es diverso en cuanto a procedencia, nivel intelectual y social.

En cuanto a la metodología, se trabajó en grupos de 3-4 estudiantes, durante 3 semanas, dentro de las sesiones de resolución de problemas que se planifican semanalmente en el aula. Se realizó también una sesión de puesta en común en grupo clase.

3. Competencias matemáticas

Las actividades presentadas en esta comunicación pretenden profundizar en las competencias específicas siguientes de la materia de Matemáticas recogidas en el DOGC-A-22270097-2022 de Cataluña:

- Dentro de la dimensión de resolución de problemas, construir y expresar con coherencia ideas y razonamientos que permitan justificar la validez de las soluciones, así como **generar preguntas** (n.2).
- Dentro de la dimensión de razonamiento y prueba, formular conjeturas sencillas o problemas, utilizando el razonamiento y la argumentación (n.3).

- Dentro de la dimensión de comunicación y representación, comunicar y representar conceptos, procedimientos y resultados matemáticos **usando el lenguaje y la terminología matemática apropiada** para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas (n.7).

4. Enunciado de la actividad de aula y observaciones

La actividad se presentó con la siguiente formulación:

El 19 de junio de 2020 se podía leer en el periódico La Vanguardia el titular siguiente: "El gobierno dicta las normas para la nueva etapa, con la distancia como eje. En espacios cerrados y abiertos debe haber una distancia de 1,5m entre personas o una superficie de 2,5m^2 por persona".

1. ¿Cómo se pueden colocar las personas para mantener una distancia de 1,5m entre ellas? Piensa en más de una forma y dibújalas. Cuantas más formas encuentres, mejor.
2. A partir de las colocaciones que has encontrado en el apartado anterior, encuentra la superficie que ocupa cada persona.
3. Volviendo al enunciado "debe haber una distancia de 1,5m entre personas o una superficie de 2,5m^2 por persona", ¿son equivalentes estas dos expresiones? Justifica la respuesta (significa que deben verse escritos los procedimientos y/o cálculos hechos para justificar tu respuesta).
4. Explica por qué crees que en el periódico se dice que una distancia de 1,5m entre personas y una superficie de 2,5m^2 por persona es lo mismo. ¿Qué han supuesto?
5. ¿El cálculo del área mínima que ocupa una persona para poder garantizar la distancia de 1,5m se puede hacer de más de una forma? Justifica la respuesta.

Tabla 1: Enunciado actividad de aula

Se presenta en lo que sigue cada apartado seguido de algunas observaciones y/o reflexiones surgidas a partir del trabajo del alumnado.

4.1. Observaciones y reflexiones apartado 1

A la pregunta de cómo se pueden colocar las personas para mantener una distancia de 1,5m entre ellas, la respuesta más frecuente es que las personas se pueden situar en los vértices o centros de un cuadrado de lado 1,5m. Además de esta disposición, algunos alumnos indican que las personas se pueden colocar en los vértices de triángulos equiláteros de lado 1,5m, o en hexágonos de 1,5 m de lado o también en círculos de 1,5m de radio (imágenes 1 y 2).

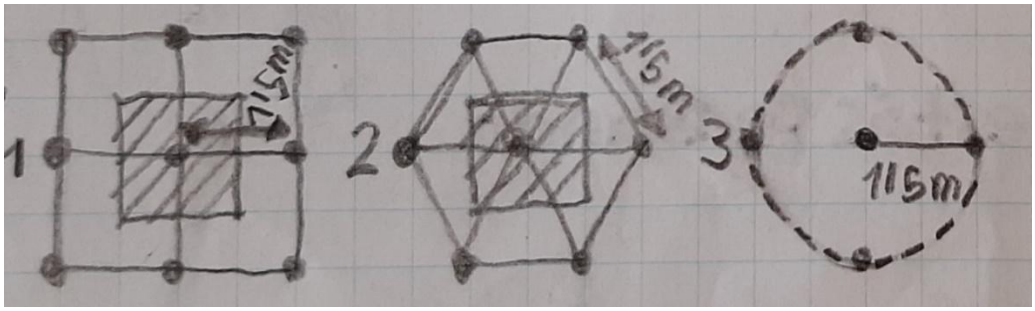


Imagen 1

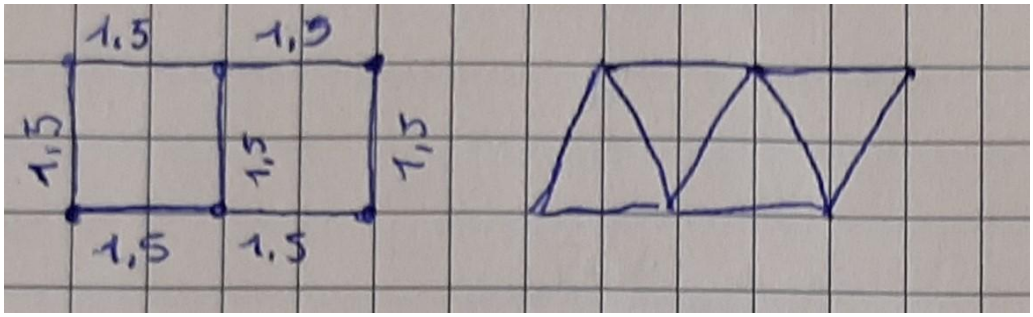


Imagen 2

Hay quien considera que la colocación en círculos o en cuadrados es la misma (imagen 3).

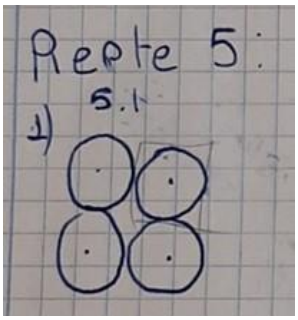


Imagen 3

Otras propuestas disponen a las personas en una combinación de cuadrados y triángulos o de semicircunferencias y cuadrados (imagen 4).

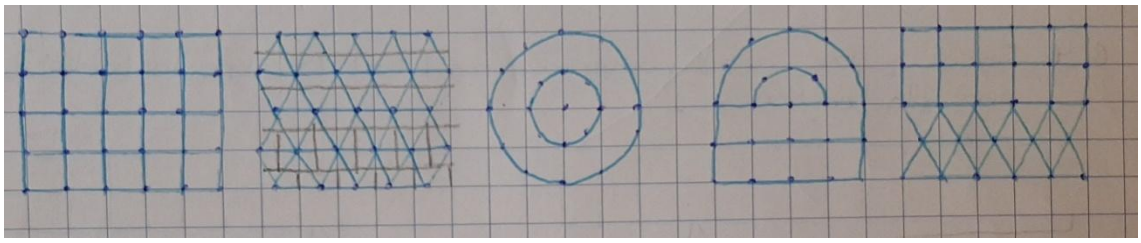


Imagen 4

A su vez, se pueden encontrar respuestas curiosas en la que no figura la disposición cuadrada, aunque sí la lineal, como en una cola (imagen 5).

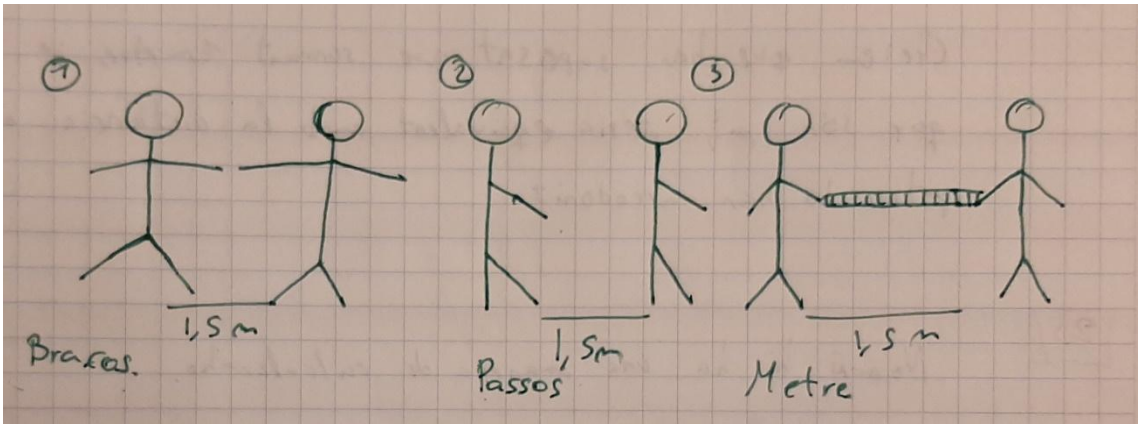


Imagen 5

Si bien no se les ha dado a los alumnos ningún dato sobre la superficie en la que se deben disponer las colocaciones, algunos han supuesto que era en un espacio rectangular limitado, como por ejemplo una clase, en el que caben 60 personas. Esto

puede deberse a la experiencia que se tiene del distanciamiento físico en la desescalada del confinamiento. El contexto más cercano para el alumnado fue el centro educativo, por lo que el alumno ya localiza la situación del problema en un contexto concreto, un aula, y éstas acostumbran a ser rectangulares. El hecho de que el enunciado sea abierto y no se especifique nada respecto a dónde o cómo se colocan a las personas enriquece la propuesta.

Este tipo de propuestas en la que aparecen las personas situadas en un espacio rectangular en el que caben 60 personas invita a ampliar la pregunta del apartado con cuestiones como: ¿Cuál es el número máximo de personas que pueden colocarse a 1,5m de distancia? Y la respuesta a este primer apartado ¿depende o no de la superficie en la que vayan a disponerse las personas? E incluso dar un paso más y formular: ¿Y si se tratase de un plano ilimitado? Se constata aquí que la pregunta de este primer apartado puede ser una buena muestra de propuesta de suelo bajo (disposición cuadrada o triangular) y techo alto (disposiciones que sean combinaciones de las anteriores y espacio no rectangular o incluso infinito).

Asimismo, se ofrecen respuestas en las que no queda suficientemente claro lo que el alumno quiere expresar o que resultan incoherentes. Por ejemplo, fijémonos en la segunda disposición de la imagen 6. ¿Qué ha querido decir el alumno con esta respuesta? No sabemos si se trata de una disposición de las personas en cuadrados o en hexágonos. Y en el caso de la tercera disposición, si bien el alumno coloca a las personas en un círculo, en realidad se trata de una colocación poligonal. Estas consideraciones fueron aprovechadas en la puesta en común del grupo clase para dirimir si eran adecuadas o no a la pregunta formulada y corregir errores.

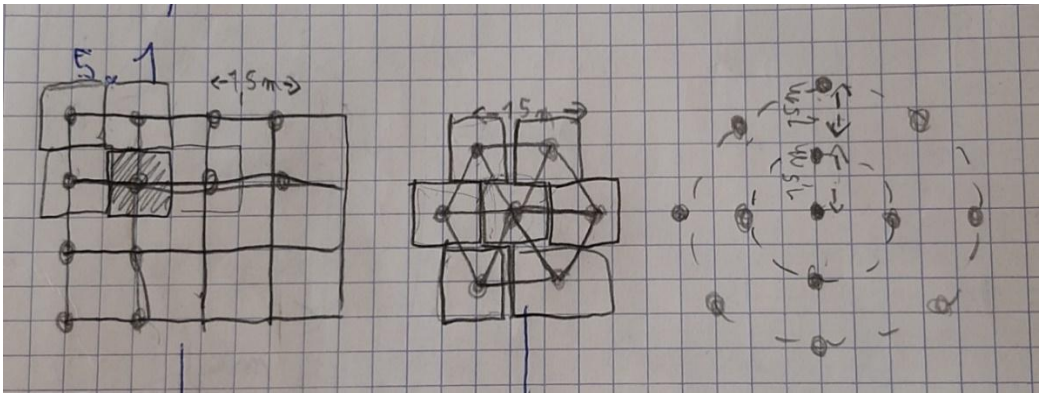


Imagen 6

4.2. Observaciones y reflexiones apartado 2

Recordemos lo que se planteaba en el apartado 2: a partir de las colocaciones que has encontrado en el apartado anterior, encuentra la superficie que ocupa cada persona.

En primer lugar, el alumnado entiende bien que cada persona ocupará una superficie sin intersecciones con las áreas de las personas que se encuentran a 1,5m de distancia de ella. Como resumen de las resoluciones que se ofrecen, tenemos las siguientes:

- Si la disposición es en cuadrados, la superficie es de $1{,}5^2=2{,}25m^2$.
- Si la disposición es en un hexágono de 1,5m de lado, cada persona ocupa un área correspondiente a un hexágono de lado 0,75m. La apotema es $\sqrt{0{,}75^2-(0{,}75/2)^2}=\sqrt{3\cdot(0{,}75/2)^2}=0{,}65m$; y, por tanto, el área es $(6\cdot0{,}75\cdot0{,}65)/2=1{,}46m^2$.
- Si la disposición es en triángulos equiláteros de 1,5m de lado, la altura del triángulo es $\sqrt{1{,}5^2-0{,}75^2}=\sqrt{1{,}69}=1{,}3m$; y, por tanto, el área será $(1{,}5\cdot1{,}3)/2=0{,}98m^2$. Aquí el alumno no ha reflexionado lo suficiente para ver que, en este caso, el área que ocupa cada persona es la de un hexágono, porque en realidad la disposición triangular y hexagonal es la misma (imagen 7). El alumno supone primero que las personas se colocan en vértices de triángulos equiláteros, pero en el cálculo del área que ocupa cada individuo cambia la colocación de las personas y supone que se encuentran en el centro de un triángulo equilátero. Se trata de un error frecuente que resulta de suponer, en el caso de disponer a las personas en los vértices de un hexágono de lado 1,5m, que el área que ocupa cada persona es la de un hexágono de 1,5m de lado. Este error puede deberse a que en el caso del cuadrado sí que pasa que, si las personas están colocadas en los vértices del mismo, el cálculo del área que ocupan es equivalente a situar a

las personas en el centro del cuadrado y el alumno extrapola esta circunstancia a otros polígonos regulares.

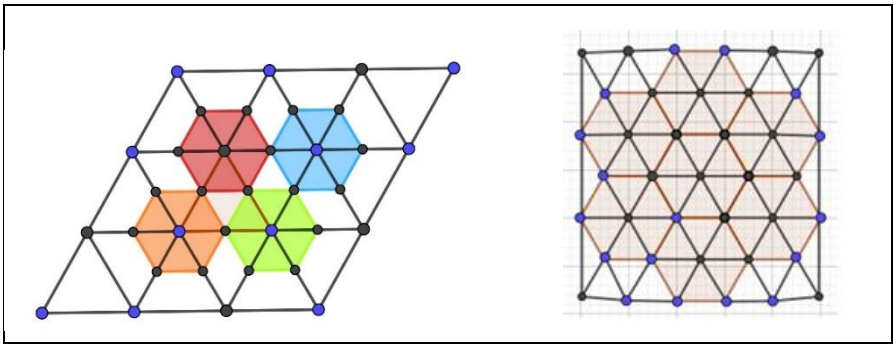


Imagen 7

- Finalmente, si la disposición es circular, cada individuo ocupará una superficie de $3{,}14 \cdot 1{,}5^2 = 7{,}07 m^2$ o ¿de $3{,}14 \cdot 0{,}75^2 = 1{,}77 m^2$? Se acuerda redondear los resultados a las centésimas.

El alumnado que ha respondido a la tarea del primer apartado según se muestra en la imagen 4 de más arriba, al responder a esta cuestión abandona las colocaciones "combinadas" (las dos de la derecha) y se centra en las disposiciones cuadrangular, romboidal y circular. Entienden que en las tres combinaciones de la derecha no todo el mundo ocupará la misma superficie, y aunque el enunciado no limite nada al respecto, se supone que la respuesta ha de ser única.

En la puesta en común del grupo clase se puede aprovechar esta circunstancia para enriquecer el problema y "revisitarlo". Es interesante que el alumnado trabaje con problemas "abiertos" que le planteen preguntas nuevas a las que dar respuestas. Por ejemplo, a partir de la imagen 8, ¿Qué representa este esquema? Vemos una disposición de las personas en rombos (izquierda) y en cuadrados (derecha) ¿Es lo mismo? En un área rectangular dada, ¿dónde caben más personas? Se insiste en hacer las suposiciones o particularizaciones necesarias (por ejemplo, situar a los individuos en un rectángulo de 10x6 metros) y en realizar los cálculos adecuados para justificar la respuesta.

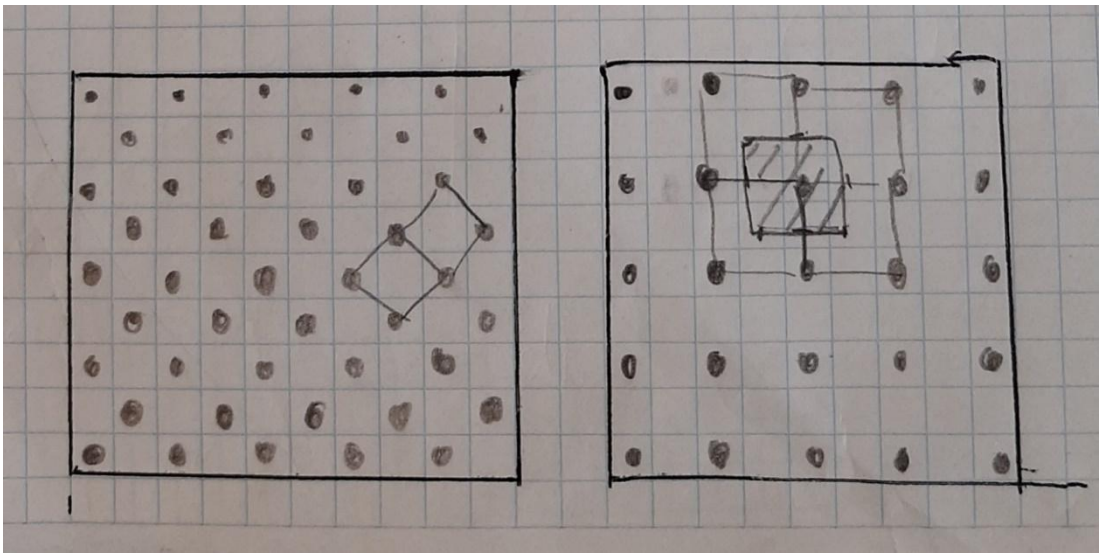


Imagen 8

En la disposición romboidal cada persona ocupa un área de 2 triángulos equiláteros: $2 \cdot 0{,}98 = 1{,}96 m^2$. A este respecto algunos alumnos propusieron una variante de esta disposición romboidal donde las personas respetan la distancia “tanto en vertical como en diagonal, suponiendo que están en medio del espacio [del rombo]” (imagen 9).

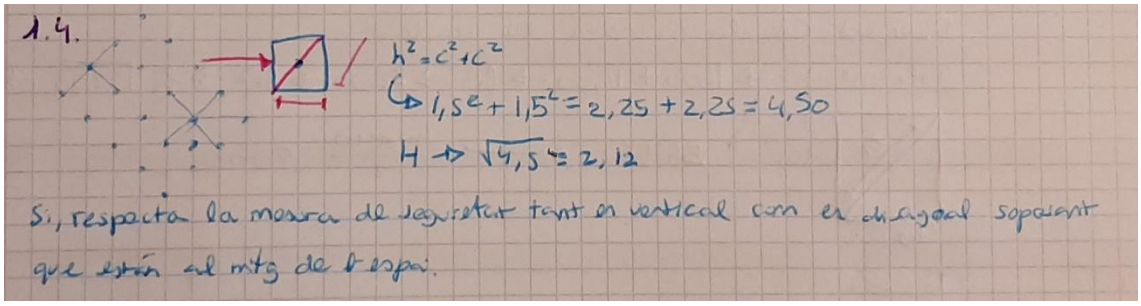


Imagen 9

4.3. Observaciones y reflexiones apartado 3

A la cuestión de si mantener una distancia de 1,5m entre personas es equivalente a que cada persona ocupe una superficie de $2{,}5 m^2$, los alumnos concluyen, en general, que no. En primer lugar, deducen que la normativa parece suponer que la disposición de los individuos es en cuadrados, puesto que, de todos los cálculos de áreas realizados en el apartado 2, el que más se aproxima a $2{,}5 m^2$ es el área del cuadrado: $2{,}25 m^2$. En la puesta en común del grupo clase se argumenta que ni siquiera redondeando 2,25 a las décimas resultaría 2,5 sino 2,3. Se calcula el error relativo en

porcentaje que se comete con esta aproximación: (2,5-2,25)·100/2,5=10%, un error nada despreciable, afirman algunos estudiantes.

Si se “estira” el problema a las otras colocaciones propuestas en el apartado 1, se deduce que la normativa no se refiere ni a disposiciones triangulares, ni hexagonales, ni circulares, puesto que las superficies correspondientes son mucho mayores que 2,5m^2. Fijémonos cómo en este apartado se pueden trabajar conceptos como el del redondeo y el del error que se comete al aproximar un número decimal en un contexto real y significativo en la vida de los alumnos.

Entre los procedimientos alternativos ofrecidos por el alumnado para justificar si las dos expresiones son equivalentes o no, volvemos a encontrar el de calcular el lado que corresponde a un cuadrado de área 2,5m^2: $\sqrt{2{,}5} = 1{,}58m \cong 1{,}6m$. A este respecto hay alumnos que justifican que no son equivalentes “porque no llegan a la distancia deseada” (imagen 10), mientras que otros aseguran que 1,58m “se puede truncar a 1,5m que siempre es más redondo” (imagen 11), siendo en este caso equivalentes al considerar que en la normativa ha prevalecido un criterio más práctico o estético.

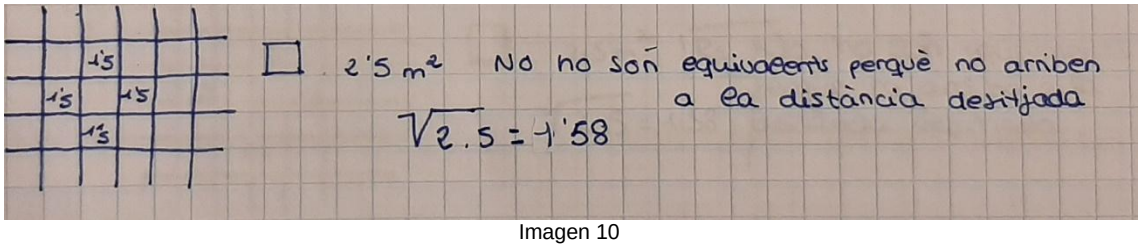


Imagen 10

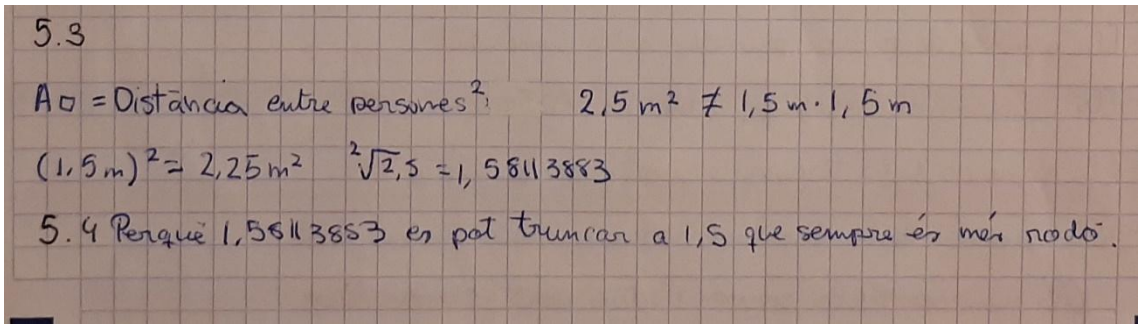


Imagen 11

Sin embargo, no todas las justificaciones ofrecidas por los estudiantes tienen como referencia la disposición cuadrada. Algunos suponen que 2,5m^2 podía representar el

área de un círculo y calcularon el radio correspondiente $r = \sqrt{2{,}5/\pi} = \sqrt{0{,}79} = 0{,}89m$, por lo que la distancia entre dos personas es 1,78m, el doble del radio, que no es un valor muy próximo al de 1,5m. Sin embargo, algunos alumnos que hicieron este tipo de razonamiento, dispusieron al mismo tiempo a las personas en el centro de un círculo y en 4 puntos del perímetro de la circunferencia. En este caso, el área que ocupa cada persona es de $3{,}14 \cdot 1{,}5^2 = 7{,}07 m^2$, ya que se trata de una disposición cuadrangular. El alumno deduce entonces que estar a 1,5m de distancia y ocupar una superficie de $2{,}5 m^2$ por persona no son expresiones equivalentes "ya que en una tienes 1,5m entre tú y la otra persona, y ocupas un área de $7{,}07 m^2$ y en la otra sólo tienes un radio de 0,89m en lugar de 1,5m. Y esto quiere decir que es más reducido". Finalmente, también encontramos alumnado que, suponiendo esta disposición circular, comete errores al considerar que la distancia entre 2 personas es el radio r y no $2r$.

4.4. Observaciones y reflexiones apartado 4

A la propuesta de explicar qué se ha supuesto para afirmar que una distancia de 1,5m entre personas y una superficie de $2{,}5 m^2$ por persona es lo mismo, el alumnado responde, en primer lugar, que es más fácil medir $2{,}5 m^2$ que $2{,}25 m^2$ para colocar, por ejemplo, las mesas de los alumnos. En segundo lugar, se ha redondeado 2,25 a 2,5 y este redondeo está mal hecho. Debería ser 2,3. Algunos alumnos se preguntan si se trata de un error de concepto por parte de los que deciden la normativa, o por parte de los periodistas que la redactan o de ambos a la vez. He aquí algunas de las respuestas dadas:

- Hacen un cálculo erróneo ya que suponen que $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}5 m^2$ cuando realmente $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25 m^2$.
- Se equivocan al hacer el cálculo.
- Porque el 2,25 no es tan exacto como 2,5 para medir distancias.
- Porque 1,58113883 se puede truncar a 1,5 que siempre es más redondo. Incluso en este mismo planteamiento: los periodistas no se fijan en el redondeo y dejan 1,5 cuando tendrían que haber dicho 1,6.

- Piensan que a la gente le será más fácil que el área que tenga que ocupar una persona sea de 2,5m^2. El alumno observa que se trata de una cuestión práctica.

En la puesta en común del grupo clase se insiste en la importancia de tener conocimientos matemáticos para leer críticamente las noticias y hacer un análisis de la veracidad o no del contenido de las mismas. Esta circunstancia supone una oportunidad para analizar otras noticias que contengan gráficas, tablas o datos y comprobar si son correctas o no e incluso analizar si puede haber alguna intención en cómo se representan los datos. Una vez más partiendo de un contexto como el del distanciamiento físico, que implica a toda la población y que es próximo al alumnado, se puede proponer a partir de preguntas convenientes que se analicen de manera crítica los datos, se sepan dar respuestas argumentadas y se formulen nuevas preguntas.

4.5. Observaciones y reflexiones apartado 5

Finalmente, en el apartado 5 se pregunta de si el cálculo del área mínima que ocupa una persona para poder garantizar la distancia de 1,5m se puede hacer de más de una forma. Las respuestas son diversas. Abunda la simple afirmación de que sí se puede o la negación de que no, justificándolo con un dibujo. Hay alumnos que no habían considerado en el apartado 1 la colocación en triángulos y ahora la consideran. En algunos casos se comete el error de no dividir entre 2 al calcular el área de un triángulo. Otros afirman, sin más, que se puede colocar a las personas "diagonalmente" formando triángulos, hexágonos o cualquier otra forma siempre que se mantenga la distancia de 1,5m. Incluso se pueden encontrar afirmaciones curiosas como que "dependiendo de la superficie se aplicará una fórmula [de área] u otra y se dividirá según el número de personas" (imagen 12).

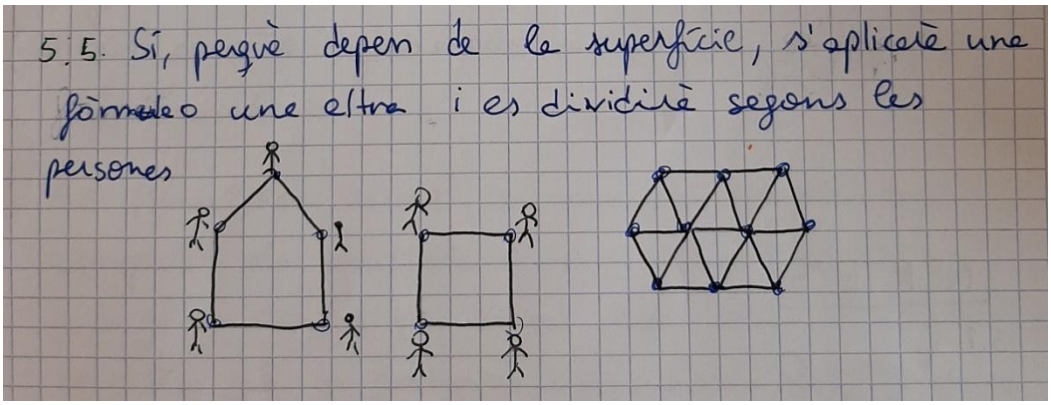


Imagen 12

El objetivo de incluir un apartado como este es que el alumnado haga una síntesis a partir de lo trabajado en los apartados anteriores. Aunque no se le pida directamente que se plantee preguntas, en la búsqueda de la respuesta estará obligado a revisar las respuestas de los apartados anteriores y en este proceso pueden surgir nuevas preguntas o planteamientos. De hecho, es lo que sucede en la puesta en común del grupo clase: de los argumentos y cálculos hechos en los apartados 1 y 2 se deduce que puede garantizarse la distancia de 1,5m de más de una manera (de forma cuadrada, triangular, hexagonal, romboidal, o como combinación de algunas de las anteriores).

Llegados a este punto, se puede “estirar” el problema y enriquecerlo con las disposiciones combinadas de las personas, formulando preguntas relacionadas con el espacio en el que están situadas las personas, un rectángulo en la mayoría de los casos, pero también puede haber aulas trapezoidales o en forma de ele en los centros educativos, como es el caso del instituto en el que se llevó a cabo esta experiencia de aula. Y es aquí donde la actividad empieza a enriquecerse con nuevas suposiciones que invitan al alumnado a reflexionar sobre las soluciones al problema planteado: las respuestas no tienen por qué ser únicas y, por lo tanto, cada grupo de trabajo no tiene por qué llegar a la misma conclusión.

Los alumnos no están acostumbrados a generar preguntas, sobre todo cuando es la primera vez que abordan dicha tarea. O bien se quedan a un nivel superficial, o bien no dan todas las respuestas posibles, o bien no justifican sus respuestas. La puesta

en común en grupo clase provoca un amplio proceso reflexivo sobre lo que los distintos grupos han propuesto respecto a la cuestión de si el cálculo del área mínima que ocupa una persona se puede hacer de más de una forma. Por un lado, hay alumnos que encuentran nuevas colocaciones de las personas y dudan de lo que han hecho en los apartados anteriores por lo que vuelven atrás, produciéndose este ir y venir dentro de un reto. Por otro lado, hay alumnos a los que la reflexión común les conduce a nuevas preguntas (algunas de ellas realmente interesantes) que enriquecen la actividad y la estiran. En consecuencia, se pone de manifiesto que generar preguntas redunda en la resolución de problemas y viceversa (Singer, 2015).

Como fruto de esta puesta en común y de las aportaciones ofrecidas, se vuelve a trabajar el problema en una o dos sesiones más, en lo que denominamos “revisitar la actividad”. El profesor selecciona, de entre las propuestas y resoluciones de los alumnos, aquellas más adecuadas para la consecución de los objetivos marcados en la actividad. Esta gestión del aula acostumbra a enriquecer la actividad y a fortalecer las competencias matemáticas del alumnado, principalmente la referida a saber comunicar y representar conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando el lenguaje y la terminología matemática apropiada para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas (Torres, 2022).

5. Algunas propuestas para ampliar la actividad.

Al compartir la actividad en grupo clase y discutir sobre las distintas consideraciones que van surgiendo, se generan algunas cuestiones que amplían el horizonte de la actividad, como, por ejemplo, las siguientes:

- ¿Cómo colocar a las personas para mantener 1,5m de distancia si dejas asientos libres en un cine, en un teatro, en una sala de espera? Aquí intervienen las diagonales.
- Para un plano limitado, ¿en qué disposición cabrían más personas? Por ejemplo, midamos el área de la clase y veamos cuántas personas cabrían, según las disposiciones que se han encontrado.
- ¿Y si el plano es ilimitado? ¿Con qué disposición caben más personas?

- ¿Qué conexión hay entre las colocaciones de las personas y las teselaciones del plano? ¿Se puede encontrar la relación entre las personas que caben y las teselaciones?
- ¿Con qué tipo de teselación caben más personas? La teselación ¿tiene que ser con el mismo tipo de polígono o combinando polígonos, por ejemplo, hexágonos y cuadrados? ¿En cuáles se aprovecha más el espacio? A este respecto el alumno puede utilizar un software como el Geogebra para crear patrones cuadrados, triangulares, hexagonales, combinados, etc., que le faciliten conjeturar una posible solución.
- También se puede considerar el problema a la inversa: a partir de las teselaciones, cuál es la distancia entre las personas.
- ¿Se puede modelizar la situación? Número de personas que caben, número de polígonos.

Dependiendo del curso en el que se programe esta experiencia de aula, se pueden plantear preguntas que requieran una respuesta más aritmética o geométrica o profundizar en la modelización de algunos de los aspectos que se trabajan, ya pensando en 4ESO o Bachillerato. En cualquier caso, lo que sí pueden establecerse son conexiones que ayuden al alumno a consolidar conceptos geométricos y a relacionarlos, como por ejemplo el de número de personas que se colocan a una distancia dada y área que ocupa cada una de ellas.

6. Conclusiones

Esta comunicación presenta, dentro del marco del aprendizaje basado en situaciones, los resultados de una actividad cuyo contexto ha sido el de la normativa del distanciamiento físico después de la primera ola de la Covid19, establecida por el gobierno español el 19 de junio de 2020 en la que se exigía que en espacios cerrados y abiertos debía haber una distancia de 1,5m entre personas o una superficie de 2,5m^2 por persona.

Después del análisis de las producciones de los alumnos podemos señalar que a los estudiantes les cuesta establecer conexiones entre esta realidad del distanciamiento

físico entre personas y los conceptos geométricos. Este ha sido el caso, por ejemplo, de las dificultades para asociar a una distribución concreta de individuos (cuadrada, hexagonal, triangular, etc.), la superficie que cada uno de ellos ocupa como consecuencia de dicha distribución. De igual forma, se han manifestado limitaciones para establecer si las personas son centros o vértices de las figuras o para encontrar la relación entre el número de personas que caben en un plano limitado y las teselaciones del mismo.

A la cuestión de si mantener una distancia de 1,5m entre personas es equivalente a que cada persona ocupe una superficie de 2,5m^2, los alumnos concluyen que no. La normativa parece suponer que la disposición de los individuos es en cuadrados, pero el área que ocupa una persona es de 2,25m^2, que redondeando a las décimas es 2,3m^2. Incluso calculan que el error relativo en porcentaje que se comete con esta aproximación es de un 10%. Análogamente, a un cuadrado de área 2,5m^2 le corresponde un lado de 1,58m que tampoco redondeando se aproxima a 1,5m. En ambos casos los alumnos consideran que, en la formulación de la normativa, al redondear 2,25 a 2,5 y 1,58 a 1,5, quizás haya prevalecido un criterio más práctico o estético. También argumentan que la normativa no se refiere en ningún caso ni a disposiciones triangulares, ni hexagonales, ni circulares, puesto que las superficies correspondientes son mucho mayores que 2,5m^2. Vemos aquí cómo se pueden abordar conceptos como el del redondeo y el del error cometido al aproximar números decimales en un contexto real y significativo en la vida de los alumnos.

También hemos observado tanto en las producciones escritas de los alumnos como en la puesta en común del grupo clase que al alumnado le cuesta explicitar los pasos y procedimientos que sigue en la resolución de una tarea. En general hay reticencias a escribir y/o explicar con detalle los pasos o los procedimientos ya que el alumnado no lo ha considerado ni importante ni necesario, sobre todo si va a verlo el profesor. Otro asunto es cuando ha tenido que explicar en grupo clase lo que ha hecho y ofrecer a sus compañeros el feedback de la actividad (Deulofeu y Torres, 2019). Esta tendencia a explicitar poco lo que se hace al resolver una tarea se ha ido incrementando en los últimos años y puede deberse al predominio del mundo de la

imagen en nuestra sociedad frente a la argumentación escrita. Si bien entre las prioridades del alumno no está la de mejorar las competencias de la comunicación y de la representación al resolver un problema, para el profesorado representa un reto revertir esta situación, ya que, escribir y expresar mejor el pensamiento matemático ayuda a incrementarlo y viceversa.

Esta experiencia de aula es “transversal”, en el sentido que se puede proponer en todos los cursos de Secundaria y trabajar en varios niveles: comenzar por actividades de suelo bajo (apartados 1 y 2) e ir extendiendo las tareas gradualmente para alcanzar cuestiones de techo alto y paredes amplias, algunas surgidas en la puesta en común del grupo clase (apartado 5). El enriquecimiento de la actividad ofrece oportunidades para que todos los alumnos se involucren con independencia de sus capacidades, por lo que se trata de una tarea que, siendo inclusiva ayuda al alumnado a visualizar, generalizar o usar analogías (Piggot, 2004).

Asimismo, la puesta en común en grupo clase invita a reflexionar sobre lo que los distintos grupos han propuesto. La generación de preguntas provoca que el alumnado permanezca en una actitud de investigación trabajando en la misma actividad durante el tiempo que se quiera.

El recurso presentado aquí ha mostrado, en primer lugar, que contextualizar las actividades en un contexto real y significativo en la vida de los alumnos le ayuda a movilizar conceptos, establecer conexiones y corregir algunos errores. En segundo lugar, el trabajo en grupo y la puesta en común contribuye a que el alumnado valore la buena comunicación en el aula en el sentido de que explicarse bien facilita que los compañeros entiendan lo que se expone y que, en este punto, todos tienen margen de mejora y así lo manifiestan. Y en último lugar, que plantearse preguntas a partir de la situación de un problema incrementa la motivación para resolver problemas de Matemáticas. En consecuencia, este trabajo consolida la necesidad de insistir en el aula en los aspectos que acabamos de enumerar con el fin de que el alumno modifique la percepción que tiene de las Matemáticas y sobre todo amplie su horizonte matemático.

7. Bibliografía

Departament d'Educació. Competencias específicas de Matemáticas (1-2-3ESO) en DOGC-A-22270097-2022. *https://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/curriculum-175-2022/*

Deulofeu, J. y Torres, E. (2019). Gestiones diferentes en el aula de matemáticas para que los alumnos quieran resolver problemas. *Actas 19JAEM*, La Coruña 2019, 1483-1500.

Piggott, J. (2004). Mathematics enrichment: what is it and who is it for? British Educational Research Association (BERA) annual conference in Manchester. *http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=5737*

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, nº. 14 (1), 19-28.

Singer, F-M.; Ellerton, N. y Cai, J. (eds) (2015). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice*. Springer. New York.

Torres, E. (2022). Cazadores de sombras. *Actas 20JAEM*, Valencia 2022, 623-645.

Resolviendo ecuaciones con STACK

María Sanz Ruiz
maria.sanzr@alumnos.unican.es
Universidad de Cantabria

José Manuel Diego Mantecón
diegojm@unican.es
Universidad de Cantabria

Zaira Ortiz Laso
zaira.ortiz@unican.es
Universidad de Cantabria

Núcleo temático: Recursos para el aula, formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Universidad.

RESUMEN

Esta investigación está centrada en ayudar a estudiantes de Educación Secundaria con dificultades en la resolución de ecuaciones lineales. Para solventar este problema, se propone el uso del software STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel). Este software se puede implementar en Moodle y permite proporcionar retroalimentación formativa específica. Para estudiar la viabilidad de STACK como herramienta de tutorización se analiza el uso que los alumnos hacen de ella. En concreto, se examinan los procesos cognitivos que tienen lugar cuando los alumnos cometen errores y cuando utilizan la retroalimentación para corregirse, determinando que, en la mayoría de los casos, la herramienta es útil.

Introducción y fundamentación teórica

Con este estudio se pretende investigar la viabilidad de utilizar una herramienta de tutorización determinada para ayudar a estudiantes de Educación Secundaria a resolver ecuaciones lineales. Esta cuestión se examina desde la perspectiva de los alumnos que resuelven ecuaciones. Para llevar a cabo este análisis, comenzaremos estableciendo una fundamentación teórica acerca del aprendizaje de las ecuaciones lineales y del uso de herramientas de tutorización para proporcionar retroalimentación formativa.

Ecuaciones lineales

El aprendizaje formal de las ecuaciones lineales tiene lugar normalmente durante los primeros cursos de Educación Secundaria (Pincheira y Alsina, 2021). Para alcanzar dicho aprendizaje, es necesario tener una base sólida de conocimiento aritmético (Bush y Karp, 2013; Warren, 2003). Sin embargo, este conocimiento no asegura la ausencia de dificultades.

Podemos distinguir diferentes niveles de dificultad entre ecuaciones aritméticas y algebraicas. La principal diferencia entre ambas radica en la necesidad de operar con la variable: un ejemplo de ecuación aritmética sería de la forma $ax+b=c$, mientras que una ecuación algebraica podría ser $ax-cx+b=d$. En el primer caso el alumno puede resolver la tarea haciendo operaciones aritméticas con números conocidos, mientras que en el segundo es necesario involucrar a la variable. Es decir, la resolución de ecuaciones algebraicas conlleva la realización de operaciones con números desconocidos, lo que está asociado a un nivel mayor de abstracción (Dickinson y Eade, 2004; Filloy y Rojano, 1989). Andrews (2010) relaciona estos métodos de resolución con diferentes aspectos del conocimiento matemático: el procedimental y el conceptual. Dado que la demanda cognitiva de las ecuaciones aritméticas es menor, lo normal es que los alumnos se encuentren con ellas primero, y por lo tanto resuelvan ecuaciones de manera procedimental antes de comprender el concepto (Qetrani et al., 2021).

Las dificultades que los alumnos encuentran a la hora de resolver ecuaciones lineales a menudo se asocian a errores típicos. En este estudio seguiremos la notación desarrollada en Socas (2007) y Pérez et al. (2019), quienes distinguen entre errores aritméticos y algebraicos. Los primeros surgen de dificultades en el entendimiento o la aplicación de conocimientos previos al estudio de las ecuaciones, relacionados exclusivamente con la aritmética; por ejemplo, errores referentes a las operaciones con números enteros o fracciones, y la aplicación de las propiedades distributiva o conmutativa. Su aparición está ligada principalmente a distracciones o a falta de conocimiento procedimental. Por otra parte, los errores algebraicos están relacionados con la falta de conocimientos específicos de conceptos relativos a ecuaciones; por ejemplo, la comprensión del signo '=' (Baroudi, 2006), de las reglas de las operaciones inversas para despejar, o los conceptos de coeficiente y variable (Pérez et al., 2019).

Retroalimentación formativa con herramientas de tutorización

La retroalimentación formativa es un elemento esencial del proceso de aprendizaje de las matemáticas (Palm et al., 2017). Una manera de proporcionar esta retroalimentación es a través de la tecnología, que cada vez va cobrando más importancia en el aula (Hoogland y Tout, 2018). Estudios como los de Narciss (2013) confirman las ventajas de usar herramientas de tutorización para complementar el aprendizaje en el aula.

La efectividad de la retroalimentación viene determinada por varios factores, como por ejemplo la información proporcionada y cómo esta se enfoca para avanzar en la resolución de las tareas (Hattie y Timperley, 2007). Narciss (2013) explica que la retroalimentación puede ser sumativa o formativa, englobando esta última cinco dimensiones distintas: características de una tarea, errores cometidos en su solución, conceptos relacionados con ella, procedimientos que ayuden a resolverla o estrategias metacognitivas que el alumno pueda usar para encontrar la respuesta. Hoogland y Tout (2018) señalan que hoy en día la retroalimentación se centra o bien en conceptos o bien en procedimientos, y que la discrepancia entre estos dos enfoques impulsa el desarrollo de la educación matemática en dos direcciones

distintas. Greenhow (2015) hace énfasis en la importancia de tener en cuenta las dificultades y errores esperados del alumno para construir la retroalimentación proporcionada mediante herramientas de tutorización.

La herramienta que utilizaremos a lo largo de este estudio es STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel). STACK es un programa complementario a Moodle que fue inicialmente creado para llevar a cabo evaluaciones de estudiantes que resolvían tareas de álgebra (Sangwin y Grove, 2006). Sin embargo, hoy en día esta herramienta ofrece multitud de opciones enfocadas al aprendizaje autónomo como la aleatorización de tareas, la incorporación de applets de GeoGebra (Pinkernell et al., 2023), o la retroalimentación adaptada al conocimiento particular del alumnado (Sanz-Ruiz et al., Aceptado).

Preguntas de investigación y metodología

El principal objetivo de esta investigación es estudiar si el uso de STACK como herramienta de tutorización complementaria a las aulas es viable para enseñar ecuaciones lineales. Se pretende examinar hasta qué punto STACK ayuda a los alumnos a superar sus dificultades con ecuaciones lineales.

Para hacer esta investigación se ha pedido a alumnos de Secundaria que resuelvan una batería de ecuaciones recibiendo comentarios formativos de STACK. La muestra del estudio está formada por 132 alumnos que están en 4º de Educación Secundaria o que la acaban de terminar. Las ecuaciones propuestas son las siguientes:

a) *3(-2x+1)=-x*
b) $\frac{7}{2}x = 14$
c) *-4x=16*
d) *-2(3x-4)=10*
e) $\frac{x}{3} + 2x = 7$
f) *-3x+5=17*

Todas las ecuaciones han sido implementadas en STACK de tal forma que, ante cada error anticipado en el que los alumnos puedan incurrir, haya un comentario formativo que dé indicaciones acerca de cómo corregirlo a aquellos alumnos que lo cometen.

En la Imagen 1 se muestra un ejemplo de la respuesta de un estudiante, acompañado de una retroalimentación formativa que le guía en la resolución.

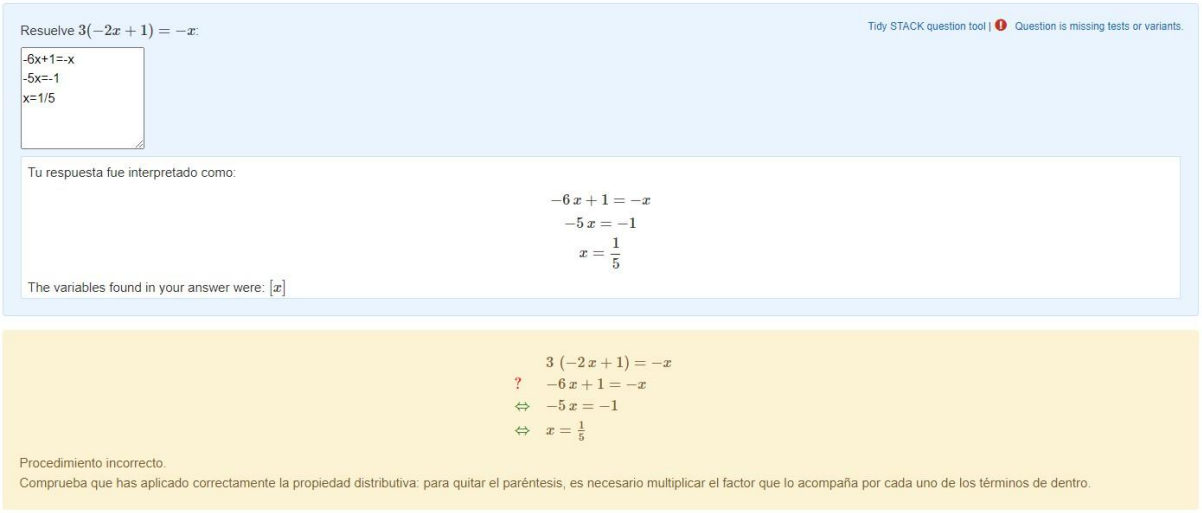


Imagen 1. Ejemplo de retroalimentación con STACK proporcionado a los participantes.

Los estudiantes han tenido oportunidad de utilizar la retroalimentación para corregir sus propios errores. Para evaluar el uso que hacen de STACK en su proceso formativo, se han contrastado los errores que cometen en las tres primeras ecuaciones con los que tienen en las tres últimas. Se ha evaluado no solo la cantidad de fallos, sino también su naturaleza: si se repiten y con qué dificultades están relacionados. A lo largo y después del proceso se realizaron entrevistas cognitivas con los estudiantes con el objetivo de esclarecer estos aspectos.

Resultados y discusión

A continuación, se detallan los resultados obtenidos y su relación con lo encontrado en la literatura.

El estudio reveló que como STACK es una aplicación de Moodle, la interfaz resultó familiar y fácil de utilizar para los participantes. Aquellos que cometieron errores recibieron retroalimentación en la que se identificaba el lugar en el que se cometía el error (mediante un símbolo de interrogación rojo) y una explicación formativa acerca del origen de su fallo (ver un ejemplo en la Imagen 1). La observación, combinada con entrevistas, permitió confirmar que aquellos estudiantes cuyas dificultades

estaban relacionadas con distracciones o procedimientos preferían el signo rojo; este les ayudaba a localizar su fallo indicándoles dónde debían revisar lo que habían hecho. Para ellos, el texto a veces resultaba redundante. Sin embargo, aquellos que tenían dificultades más profundas o relacionadas con los conceptos afirmaron que el texto resultaba de más ayuda, puesto que sin él no sabrían qué tipo de fallo buscar. La necesidad de retroalimentación más extensas en los casos de alumnos con más dificultades también fue explorada en Sanz-Ruiz et al. (Aceptado). En la Tabla 1 y la Imagen 4 se desglosa el número de fallos que los alumnos cometieron en las partes I (tres primeras ecuaciones) y II (tres últimas ecuaciones) de la prueba, explicando de qué tipo son en consonancia con la notación desarrollada por Socas (2007) y Pérez et al. (2019).

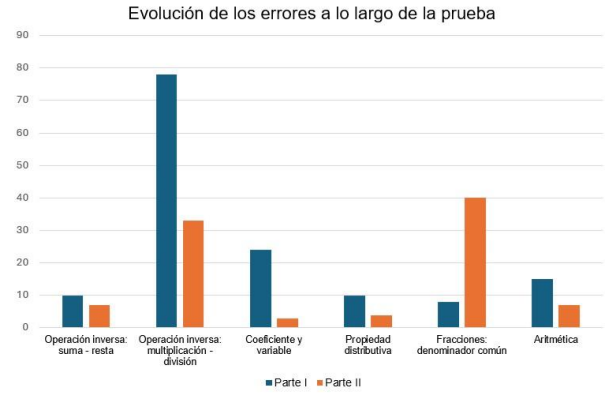


Imagen 2. Evolución de los errores a lo largo de la prueba

	Parte I	Parte II
Operaciones inversas: suma y resta	10	7
Operaciones inversas: multiplicación y división	78	33
Coeficiente y variable	24	3
Propiedad distributiva	10	4
Fracciones: denominador común	8	40
Aritmética	15	7

Tabla 1. Evolución de los errores a lo largo de la prueba

Cada uno de estos errores se examinó por separado para esclarecer cuáles eran las dificultades con las que estaba relacionado.

Operaciones inversas: suma y resta

Este error está relacionado con el acto de sumar o restar a ambos lados de una ecuación una misma cantidad para despejar términos. Muchos de los participantes de este estudio entienden que “lo que está sumando pasa restando y al revés”. En la

Imagen 5 se muestra un ejemplo de un alumno que cometió este error, junto con la retroalimentación que se le proporcionó.

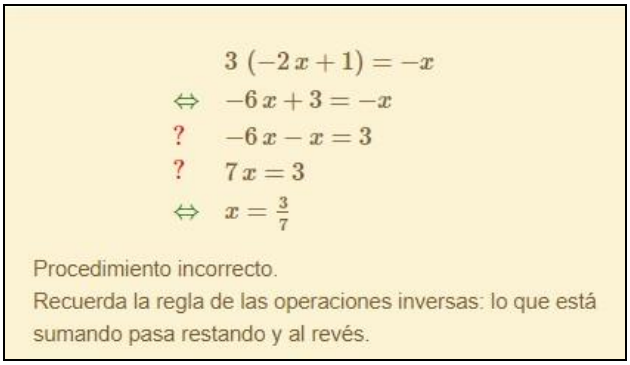


Imagen 3. Error relacionado con el uso de la suma como operación inversa

Las entrevistas cognitivas revelaron que este tipo de errores se debían principalmente a distracciones y dificultades procedimentales; de hecho, los errores de la segunda parte de la prueba fueron cometidos por estudiantes que no se habían equivocado en la primera, mientras que aquellos participantes que se habían equivocado en la primera parte estuvieron más atentos para no repetir este fallo.

Operaciones inversas: multiplicación y división

Los errores de este tipo fueron los más abundantes: se encontraron 78 en la primera parte de la prueba y 33 en la segunda. Los estudiantes que despejaban incorrectamente $ax=b$ cometían tres errores diferenciados: $x=a/b$, $x=-b/a$ y $x=-a/b$.

En la Imagen 6 se ven ejemplos de estos errores con su retroalimentación.

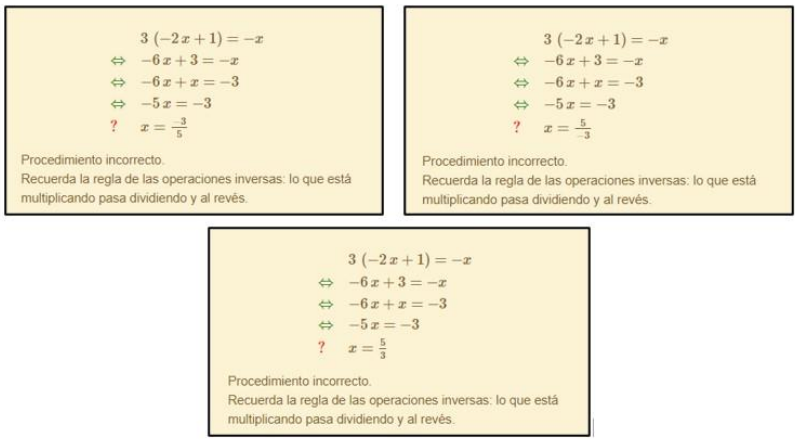


Imagen 4. Errores relacionados con el uso de la división como operación inversa

Las entrevistas cognitivas revelaron que los estudiantes que cometían este error pensaban que "lo que está multiplicando pasa dividiendo", pero admitían no saber muy bien qué división había que hacer. Además de no tener claro el procedimiento a realizar, no demostraban conocimientos conceptuales que les permitieran despejar las ecuaciones en este caso. Se trata de un error que cometían especialmente los estudiantes de menor edad, que todavía no se habían graduado. Esto fue corroborado por sus profesores, que detallaron cómo observaban esta dificultad no sólo en la asignatura de matemáticas, sino también en otras cuyo contenido incluía la resolución de ecuaciones lineales. A lo largo de la prueba, los errores fueron descendiendo y los alumnos que cometían fallos se corrigieron con más facilidad.

Coeficiente y variable

Estos errores están relacionados con dificultades a la hora de entender los conceptos de coeficiente y variable. En nuestra muestra estaban presentes a modo de separación (operar con *ax* como si fuera *a+x*) o de unión (transformar *a+bx* en *(a+b)x*). En la Imagen 7 se puede ver un ejemplo:

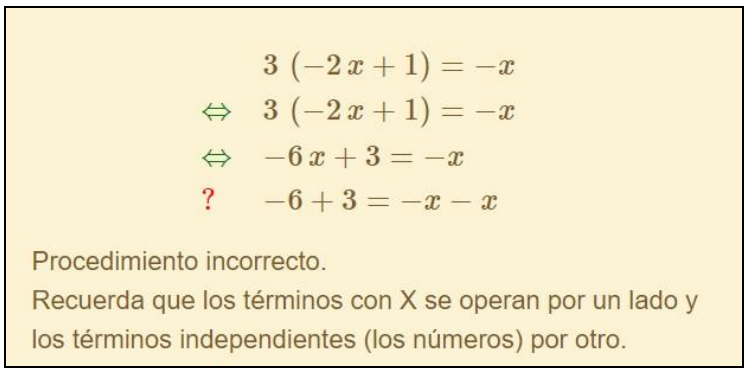


Imagen 5. Error relacionado con los conceptos de coeficiente y variable

Los errores de este tipo fueron cometidos principalmente debido a distracciones por parte de estudiantes ya graduados. Los alumnos de Educación Secundaria que cometían este error reconocían tener especiales dificultades con la asignatura de matemáticas; esto es congruente con los hallazgos de Pérez et al. (2019), que mencionan cómo este tipo de errores viene asociado con dificultades conceptuales profundas.

Propiedad distributiva

Los errores relacionados con la propiedad distributiva estuvieron presentes en las ecuaciones *a* y *e*, que eran las únicas que involucraban paréntesis. Se puede ver en la Imagen 8 un ejemplo de este error con su correspondiente retroalimentación.

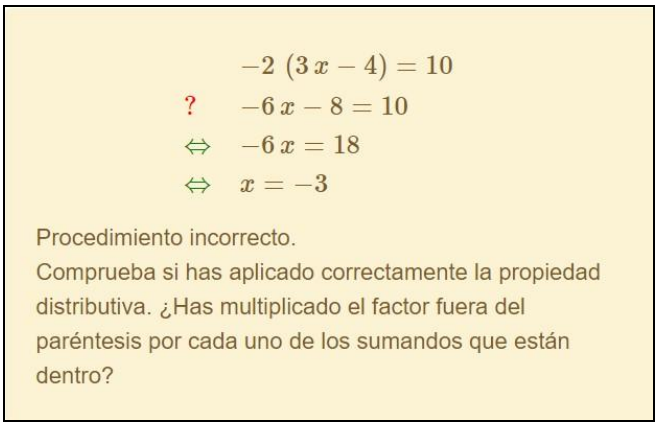


Imagen 6. Error relacionado con la propiedad distributiva.

La mayor parte de estos fallos los cometieron estudiantes que ya estaban graduados. Al corregirse, gran parte de estos participantes admitieron que en general las

matemáticas no les habían gustado nunca, pero que el comentario les había ayudado a recordar cómo había que solucionarlo. De hecho, gran parte de estos sujetos no volvieron a cometer este error.

Fracciones: denominador común

Este es el único caso en el que el número de errores aumenta con el desarrollo de la experiencia, obteniendo 8 fallos en la primera parte de la prueba y 40 en la segunda. Esto se debe a las características de las ecuaciones que involucraban fracciones en cada parte (*b* y *e*): la ecuación *b* se podía resolver fácilmente sin utilizar conocimiento específico de fracciones, mientras que en la ecuación *e* resultaba más cómodo utilizar el denominador común. En la Imagen 9 se puede ver un ejemplo de un error de este tipo cometido en la ecuación *e* junto con la retroalimentación asociada.

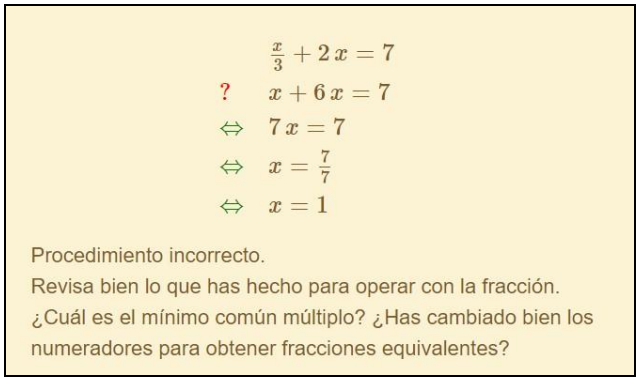


Imagen 7. Error relacionado con operar con fracciones.

Los alumnos que resolvieron la ecuación *b* sin utilizar conocimiento de fracciones lo hicieron utilizando la multiplicación y la división como operaciones inversas para despejar. Al cometer fallos, por lo tanto, recibieron retroalimentación relativa a este tema. Por lo tanto, en la segunda parte de la prueba estos participantes se enfrentaron a operaciones con fracciones usando denominador común sin haber recibido retroalimentación formativa que les ayudase a corregir este aspecto. Dados los resultados referentes a los otros errores, este es el factor que más destaca como posible motivo para el aumento de los errores.

Aritmética

Estos errores son relativos a la realización de operaciones aritméticas presentes en las ecuaciones (suma, resta, multiplicación o división). Dado que estos errores eran difíciles de predecir, se ofrecía a los estudiantes que los realizaban una retroalimentación generalizada que ayudase a revisar su resolución (ver Imagen 10).

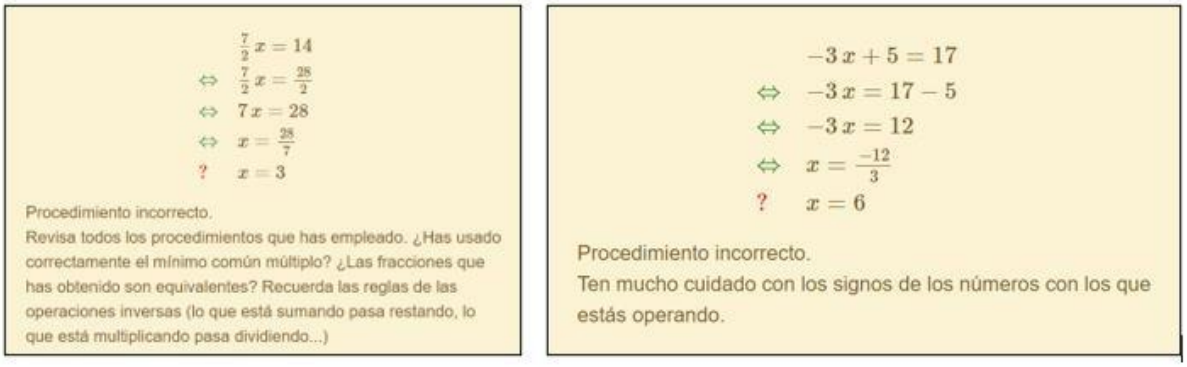


Imagen 8. Errores de aritmética.

Los errores de aritmética están relacionados con conocimiento que se aprende mucho antes que la resolución de ecuaciones. Los participantes que cometieron estos fallos principalmente controlaban estos aspectos y enseguida eran capaces de corregirse; en entrevistas cognitivas, todos admitieron que se habían distraído y que en general no tenían problemas para llevar a cabo estas operaciones. Pérez et al. (2019) sugieren que este tipo de errores se encuentran en ecuaciones debido a que el alumno está centrado en utilizar sus conocimientos de álgebra, y los nervios por hacer esto correctamente le llevan a equivocarse en aspectos más elementales.

Conclusión

El principal objetivo de esta investigación era estudiar la viabilidad de usar STACK como herramienta de tutorización para la enseñanza de ecuaciones lineales. Para ello, se han analizado las dificultades que ha tenido un grupo de estudiantes de Educación Secundaria a la hora de resolver ecuaciones utilizando este software.

En cuanto al aspecto técnico del ejercicio, los participantes no han tenido problemas utilizando la herramienta gracias a lo familiarizados que estaban con Moodle, cuya interfaz es similar. El aspecto cognitivo de la prueba estaba centrado en investigar cómo los estudiantes corregían sus propios errores y si volvían a cometerlos. Se ha determinado que la mayoría de los participantes son capaces no sólo de corregir sus propios errores, sino de aprovechar la retroalimentación para aprender de ellos y no volver a cometerlos. La forma y el contenido de la retroalimentación que más ayuda a cada estudiante depende de las características del mismo; aquellos con dificultades más profundas requieren explicaciones más extensas.

Con este análisis se ha visto que la introducción de STACK en el aula como herramienta de tutorización enfocada al aprendizaje de ecuaciones lineales es viable como elemento de apoyo para que alumnado avance en su proceso de aprendizaje.

Agradecimientos

El proyecto AuthOMath: Authoring Online Material with Multimodal, Dynamic and Interactive Applets and Automated Feedback for Learning Math (https://www.authomath.org/) está cofinanciado por la Unión Europea. Las opiniones y puntos de vista expresados en esta comunicación sólo comprometen a sus autores y no reflejan necesariamente los de la Unión Europea, no pudiendo ser considerada responsable de ellos.

Referencias

Andrews, P. (2010). Mathematical knowledge in teaching: A culturally-located model. *Mathematical knowledge in teaching,* 99-118. Springer Netherlands.

Baroudi, Z. (2006). Easing students' transition to algebra. *The Australian Mathematics Teacher,* 62(2), 28-33.

Bush, S. B., y Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 613-632.

Dickinson, P. y Eade, F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the Learning of Mathematics,* 24(2).

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics* 9(2) 19-26.

Greenhow, M. (2015) Effective computer-aided assessment of mathematics; principles, practice and results, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA* 34(3), 117–137, https://doi.org/10.1093/teamat/hrv012

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*. 77(1), 81-112.

Hoogland, K. y Tout, D. (2018). Computer-based assessment of mathematics into the twenty-first century: pressures and tensions.*ZDM –Mathematics Education*, *50*(4), 675-686. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0944-2

Narciss, S. (2013). Designing and evaluating tutoring feedback strategies for digital learning. *Digital Education Review*, (23), 7–26.

Palm, T., Andersson, C., Boström, E. y Vingsle, C. (2017). A review of the impact of formative assessment on student achievement in mathematics. Nordic Studies in Mathematics Education, 22(3), 25–50.

Pérez, M., Diego-Mantecón, J.M., Polo, I., y González, M.J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA* 13(2), 84103. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7613

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/em3301.06

Pinkernell, G., Diego-Mantecón, J.M., Lavicza, Z. y Sangwin, C. (2023). AuthOMath: Combining the Strenghts of STACK and GeoGebra for School and Academic Mathematics. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET),* 18(3), 201-204. https://doi.org/10.3991/ijet.v18i03.36535

Qetrani, S., Ouailal, S. y Achtaich, N. (2021). Enhanding students' conceptual and procedural knowledge using a new teaching approach of linear equations based on the equivalence concept. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 17(7), 1-17.

Sangwin, C. y Grove, M. (2006). STACK: addressing the needs of the “neglected learners”. En *Proceedings of the Web Advanced Learning Conference and Exhibition, WebALT*, 81-96.

Sanz-Ruiz, M., Soto-Sánchez, L.M., Ortiz-Laso, Z. y Diego-Mantecón, J.M. (Aceptado). Elaborated feedback for interpreting graphs in Secondary Education. En *Feedback & Assessment in Mathematics Education 2024 Proceedings.*

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, España: SEIEM.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics education research journal,* 15(2), 122-137.

El triángulo de las redes sociales: evalúa, tutoriza y divulga a través del vídeo

Juan Miguel Ribera Puchades
j.ribera@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Palma, Illes Balears)

José Carlos Gámez Pérez
jc.gamez.perez@gmail.com
Colegio Montaigne (Sevilla)

Alberto César Barbero
alcesbar@gmail.com
IES Torre de los Herberos (Dos Hermanas, Sevilla)

Núcleo temático: Recursos para el aula y Comunicación y divulgación.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

Esta propuesta presenta la integración de vídeos en la enseñanza de matemáticas a través de plataformas sociales como Flip, Twitch y TikTok, con el objetivo de mejorar el aprendizaje, el acompañamiento y la divulgación de esta disciplina entre los estudiantes. Para ello, se presenta el análisis de diferentes usos del vídeo en el aula, incluyendo la evaluación de estudios estadísticos mediante Flip, la tutorización a través de Twitch, y la divulgación y motivación por medio de TikTok. Como resultado, se encuentra que los vídeos no solo aumentan la participación y el interés de los estudiantes, sino que también facilitan la comprensión de conceptos matemáticos complejos, promoviendo el desarrollo de competencias digitales y comunicativas. En conclusión, el uso de vídeos en plataformas sociales puede ser considerado como una estrategia de utilidad para la enseñanza de matemáticas, alineándose con las preferencias de aprendizaje de las nuevas generaciones y los avances tecnológicos.

Palabras clave: Vídeos educativos de matemáticas, redes sociales, competencia digital, habilidades comunicativas.

Nuestro alumnado pasa mucho tiempo visualizando vídeos en redes sociales como TikTok o Instagram, de hecho, es uno de sus canales favoritos para la visualización de contenido audiovisual de refuerzo o ampliación de las materias que estudian.
Es por ello que, como docentes, puede ser de interés proporcionar al alumnado un medio alternativo al libro de texto convencional que le permita complementar su formación en matemáticas y que esté en línea su canal de preferencia de aprendizaje.
De hecho, en la actualidad existen muchas fuentes de vídeo en redes sociales como Youtube ampliamente conocidas por el alumnado como, por ejemplo, Unicoos y Susiprofe. Sin embargo, la gran mayoría de los vídeos que se pueden encontrar allí son de tipo procedimental, es decir, presentan algoritmos para resolver ejercicios y problemas tipo.

Por ello, puede ser de interés plantearse usos alternativos del vídeo en el aula que permitan seguir profundizando en matemáticas desde diferentes perspectivas.

De esta forma, el objetivo de esta comunicación es el de analizar diferentes usos del vídeo de matemáticas en redes sociales con el interés de evaluar el proceso de comunicación en matemáticas, divulgar sobre contenido matemático o tutorizar en el proceso de enseñanza aprendizaje.

1. Marco teórico

El auge de las tecnologías digitales ha transformado las dinámicas tradicionales de la enseñanza y el aprendizaje, integrando herramientas interactivas y plataformas de redes sociales en el currículo educativo. En este contexto, la educación matemática no es una excepción, enfrentándose al reto de adaptarse a las nuevas generaciones de estudiantes digitales. De hecho, las redes sociales se han convertido en una fuente de debate y de recursos para el profesorado, en concreto, en Matemáticas (Beltrán-Pellicer, 2023). Así mismo, también pueden ser una fuente de aprendizaje de la matemática para el alumnado (Saballet-Lara, Baleta y De Armas, 2022).

Los vídeos educativos representan una herramienta capaz de complementar y enriquecer la enseñanza dentro y fuera del aula. De hecho, el vídeo es utilizado como recurso formativo en múltiples contextos educativos como la formación del profesorado en activo (Castellà, Margelí y Torra, 2022), la formación de estudiantado para maestro (Rodríguez-Muñiz, Alonso-Castaño y Muñiz-Rodríguez, 2021) y del máster en formación al profesorado (Ribera y Rotger, 2020) o la formación en matemáticas universitarias y preuniversitarias (Ribera, 2023). Además, las finalidades de los vídeos de matemáticas pueden ser variadas y atender a diferentes necesidades como, por ejemplo, presentar definiciones, realizar un estudio de casos, o resolver problemas (Ribera, Rodríguez y Rotger, 2021). Por ello, es de interés analizar las posibles estrategias de uso del vídeo en las clases de matemáticas, concretamente, a través de las redes sociales.

2. Usos del vídeo en clase de matemáticas.

Entre los múltiples usos que puede presentar el vídeo en la clase de matemáticas, se presentan tres propuestas correspondientes a diferentes fases del proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.1 Vídeos de matemáticas para la evaluación a través de Flip

Uno de los posibles usos de vídeos en redes sociales para la evaluación en el ámbito de las matemáticas y la estadística se centra en la presentación y análisis de estudios estadísticos completos. Esta iniciativa se implementó con estudiantado de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas II del Grado en Educación Primaria. En este contexto, se dividió al alumnado en grupos, encargándoles la realización de un estudio estadístico que implicaba definir una variable de interés, recoger datos, analizar los datos obtenidos, representar estos datos mediante gráficos adecuados y finalmente, elaborar conclusiones sobre el tema investigado. Se subrayó la importancia de elaborar un vídeo que no solo mostrase el proceso de trabajo y los resultados de manera clara y estructurada, sino que también utilizase un lenguaje apropiado para explicar los conceptos estadísticos involucrados y fuese capaz de presentar un estudio completo y autocontenido.

2.1.1 La red social Flip en una tarea de estadística

Flip (*https://info.flip.com/es-us.html*), anteriormente conocido como Flipgrid, es una plataforma social educativa basada en video, diseñada para promover el aprendizaje interactivo y la colaboración entre estudiantado y profesorado. Su funcionalidad central permite a los usuarios, tanto profesores como estudiantes, crear y compartir videos cortos, fomentando así una comunidad de aprendizaje dinámica y participativa. La aplicación se distingue por su facilidad de uso, permitiendo a los usuarios grabar, editar y publicar contenido de video directamente desde sus dispositivos móviles u ordenadores, sin necesidad de conocimientos técnicos avanzados. La interfaz intuitiva de Flip incluye herramientas de edición que permiten a los usuarios personalizar sus videos, añadiendo filtros, texto, música y otras funciones creativas para enriquecer sus presentaciones. Además, ofrece opciones de accesibilidad como subtítulos automáticos, asegurando que el contenido sea inclusivo y accesible para todos los estudiantes.

En el ámbito educativo, Flip se ha utilizado para una amplia gama de actividades, desde discusiones en clase y reflexiones personales hasta presentaciones de proyectos y evaluaciones. La plataforma promueve la expresión individual y el pensamiento crítico al animar a los estudiantes a compartir sus ideas y soluciones a problemas de manera creativa. Además, facilita la retroalimentación entre pares y la interacción con el profesorado de manera estructurada y significativa, mediante la posibilidad de responder a videos con otros videos, lo que enriquece el proceso de aprendizaje colaborativo.

En el contexto de nuestra propuesta, Flip se ha utilizado para que los estudiantes realicen presentaciones de estudios estadísticos completos. Este enfoque no solo implicó la aplicación de conocimientos estadísticos, sino que también desafió a los estudiantes a emplear habilidades de investigación, análisis de datos y comunicación efectiva. El uso de Flip transformó la manera en que los estudiantes abordaron esta tarea compleja, permitiéndoles documentar y compartir cada etapa de su estudio estadístico de manera creativa y visual. La plataforma posibilitó la presentación de los procesos de recopilación y análisis de datos, la explicación de las decisiones

metodológicas tomadas, así como la interpretación de los resultados, de forma clara y accesible.

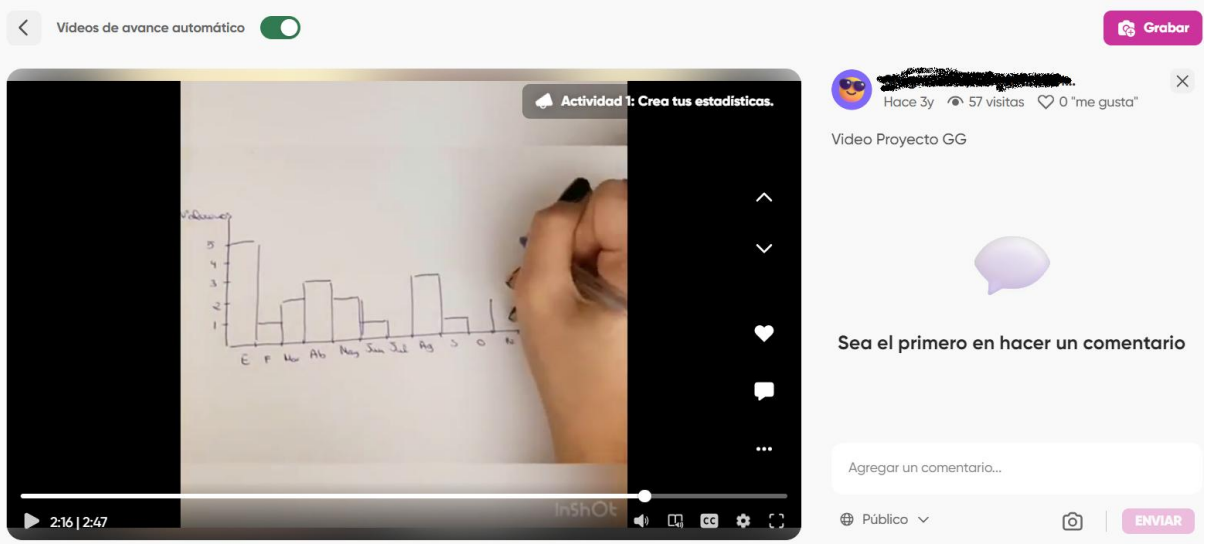


Imagen 1. Captura de una entrega de la tarea.

Además, la interacción entre los estudiantes, a través de comentarios y respuestas en video, puede enriquecer el proceso de aprendizaje y promover el debate, la crítica constructiva y la reflexión. Este método también puede fomentar el desarrollo de competencias digitales, analíticas y comunicativas esenciales en el mundo académico y profesional actual.

2.1.2 La evaluación de la tarea en la red social Flip

La evaluación de las presentaciones de los estudios estadísticos se basó en criterios que abarcaban aspectos tanto del contenido como de la presentación:

- Claridad y originalidad en la definición de la variable de estudio: Se valoró la relevancia y precisión en la elección y definición de la variable de interés. También se valoró la originalidad en la elección de la variable o de la metodología de recolección de datos.
- Rigor en la recolección y análisis de datos: Se evaluó la adecuación y rigor metodológico en la recopilación de datos y su posterior análisis estadístico (cualitativo o cuantitativo).
- Eficacia en la representación gráfica: Se consideró la pertinencia y claridad de las tablas y gráficos utilizados para representar los resultados del análisis.

- Coherencia matemática y fundamentación de las conclusiones: Se valoraron las conclusiones por su capacidad de reflejar adecuadamente los resultados del análisis estadístico, así como la fundamentación con los resultados obtenidos a través de los datos recogidos.
- Calidad de la presentación en vídeo: Se tuvo en cuenta la calidad de la presentación en términos de organización, claridad expresiva, uso efectivo de las herramientas de edición de Flip y la capacidad para comunicar el estudio de manera comprensiva y atractiva.

Esta evaluación integral no solo permitió valorar el conocimiento estadístico y las habilidades analíticas de los estudiantes, sino que también trataba de fomentar el desarrollo de competencias digitales y de comunicación.

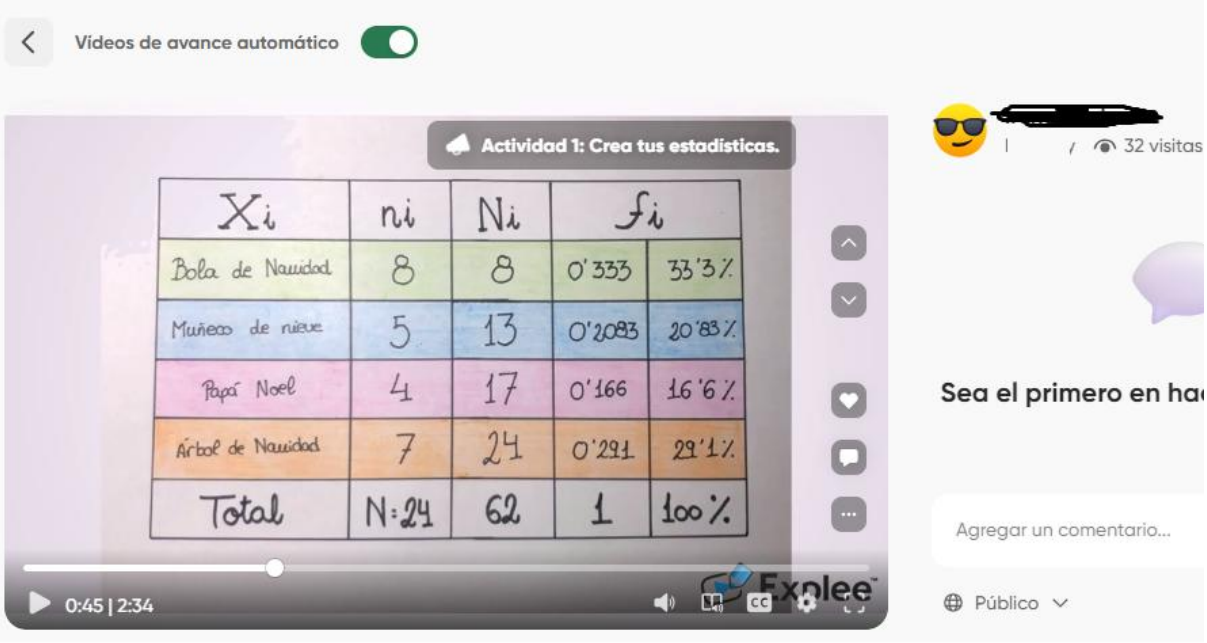


Imagen 2. Tabla de datos de una entrega en Flip.

En general, la participación de los estudiantes fue elevada. La calidad de los estudios estadísticos varió, pero en general, demostraron un entendimiento sólido de los conceptos y técnicas estadísticas básicas, no así con el vocabulario estadístico utilizado. La mayoría de los grupos presentó análisis de datos coherentes y gráficos bien elaborados que facilitaron la comprensión de los resultados, aunque también se encontraron algunos gráficos que presentaban errores o deficiencias en el diseño o

en la representación de los datos. Desde una perspectiva tecnológica, los estudiantes mostraron amplias habilidades en la creación y edición de videos. La creatividad fue un punto destacado, con presentaciones que no solo eran informativas sino también atractivas visualmente. Sin embargo, algunos estudiantes enfrentaron desafíos técnicos, principalmente relacionados con la duración máxima determinada de los vídeos. En cuánto a la comunicación, la mayoría de los estudiantes fue capaz de articular claramente sus hallazgos y conclusiones, aunque la variabilidad en la calidad del audio (al realizar grabaciones con un teléfono) y la dicción afectó la claridad en algunos casos.

2.2 Vídeos de matemáticas para la tutorización a través de Twitch

Otro de los posibles usos es para la tutorización del alumnado en caso de dudas, apoyo instrumental fuera del aula o condescendencia por la adversidad o los bloqueos que se pudieran producir en nuestro alumnado. En resumen se busca un proceso de acompañamiento que debe de producirse en el aprendizaje del alumnado y cómo el docente se encarga de ser guía y ayuda en ese proceso.

2.2.1 La red social Twitch para la enseñanza de matemáticas

Twitch (*https://www.twitch.tv/*) es una plataforma que permite la transmisión de vídeos en directo, donde la audiencia interactúa con el creador de contenidos en tiempo real. Con la ayuda de otros programas de edición de vídeos, capturador de pantallas e imágenes, se puede conseguir transmitir una clase, resolver dudas o explicar varios ejemplos a través de la misma, mientras el alumnado interactúa en el chat resolviendo las dudas.

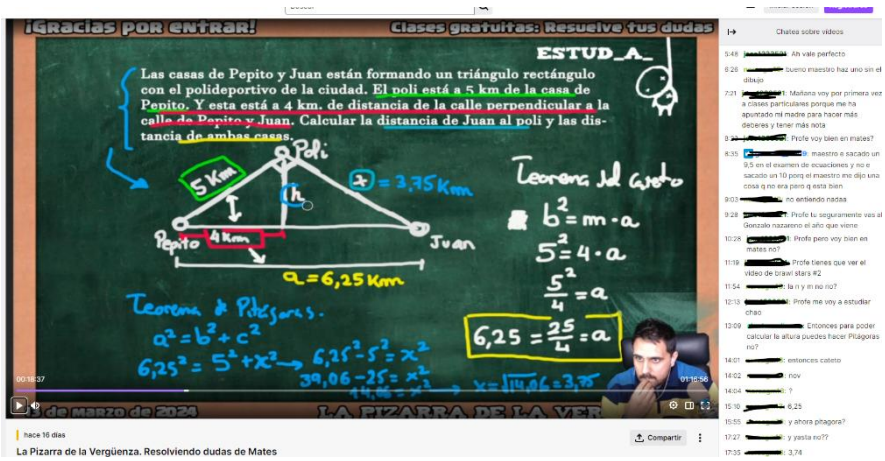


Imagen 3. Captura de una tutoría a través de Twitch.

Es cierto que no es una plataforma que nace con la idea de integrarse en el ámbito educativo pero, si se le saca punta y partido a las opciones que presenta, se puede hacer un buen uso de ella usándola como alternativa y apoyo fuera del aula, para servir de guía y ayuda en cualquiera de los casos en los que se necesite una tutorización de contenidos o pautas a seguir. En el caso de matemáticas, y sirviéndose de ayuda de otros programas de edición, la plataforma nos permite crear una pizarra virtual, donde el alumnado puede observar los trazos del profesorado y a su vez, servirse del chat en directo para preguntar cualquier tipo de duda. Un ejemplo de este proceso de tutorización se puede observar en la Imagen 3, donde se está realizando un acompañamiento al alumnado en la resolución de problemas de trigonometría aprovechando las oportunidades de interacción con la plataforma. Twitch sirve de canal de transmisión para ese acercamiento con el alumnado que quiera profundizar en sus contenidos y que puedan tener un apoyo fuera de las paredes del instituto.

2.2.2 La tutorización en la red social Twitch

En un principio, esta idea de ayudar al alumnado fuera de las cuatro paredes del aula nace a través de una propuesta inclusiva de querer ayudar de manera gratuita a todo aquel alumno o alumna que no podía costearse unas clases particulares. Surgió la propuesta de fijar un día y hora de la semana para estar conectado para instruir la ayuda que demandan los usuarios que se conectaran a la aplicación.

Tras comprobar después de varios institutos y clases que la idea gustaba a aquellos alumnos y alumnas que querían resolver sus dudas y ,que no podían o querían

debatirlas en clase, se propuso al alumnado ser partícipe de la misma ampliando el horario a aquel que más se adecuara a sus actividades.

Surge así como en varias clases, como se observa en la Imagen 4, el alumnado pregunta dudas en el chat, y el profesor conectado resuelve los bloqueos de aquellos alumnos que o bien les cuesta preguntar en clase, o se han quedado un poco faltos de tiempo en clase.

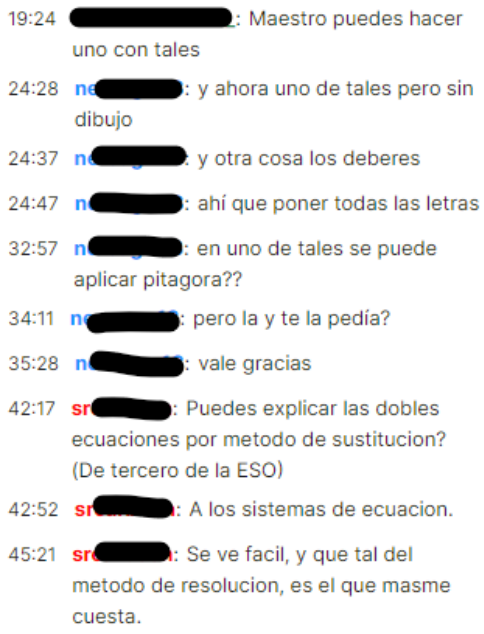


Imagen 4. Captura de una entrega de la tarea.

La ayuda a través de esta aplicación permite un contacto directo con los alumnos que precisan de esta ayuda y a la vez, sirve para mejorar el autoestima y la confianza en saber que tiene un apoyo detrás para conseguir sacar adelante los ejercicios o la materia en sí.

En la misma plataforma, se puede hacer uso de moderadores de sala, que te permiten tener un control de lo que se comenta en el chat y a su vez, sirve también el hecho de que la plataforma es gratuita, se descarga fácilmente desde un dispositivo móvil que requiere un usuario y contraseña que se puede controlar bajo una pequeña tutorización del alumnado en el aula.

2.3 Vídeos de matemáticas para la divulgación a través de TikTok

Otro uso que se le puede dar al vídeo en la clase de matemáticas es el de herramienta de motivación y divulgación.

En muchas ocasiones el alumnado no siente la motivación necesaria para el estudio de la asignatura, por lo que un vídeo motivador en redes sociales o explicativo de un concepto concreto, puede ayudarles a dar el paso de querer aprender dicho concepto. Además, la labor divulgativa que se puede construir mediante vídeos puede enriquecer el ambiente de aprendizaje de las matemáticas en nuestras aulas, en nuestros centros educativos e incluso en nuestra sociedad, puesto que la audiencia a la que podemos llegar no tiene límites.

2.3.1 La red social TikTok para la enseñanza de las matemáticas

TikTok (https://www.tiktok.com/) es una red social en la que el argumento principal es la visualización de vídeos cortos compartidos por su comunidad.

Aunque en ocasiones el contenido compartido es de escasa calidad, como pueden ser bailes, bromas o bulos, TikTok tiene un potencial enorme para la divulgación de contenidos de calidad en disciplinas como la Historia, el Arte, el Emprendimiento y, por supuesto, la Ciencia.

Es en este último apartado donde podemos encajar como docentes de Matemáticas, creando contenidos de calidad para nuestro alumnado. Entre dichos contenidos podemos realizar introducciones a temas que vayamos a ver en clase, breve explicación de conceptos, desarrollo de terminología, biografías de matemáticos o aplicaciones reales de conceptos vistos en clase. El abanico que se puede tratar es infinito y cada docente lo puede adaptar sin problema a su circunstancia.

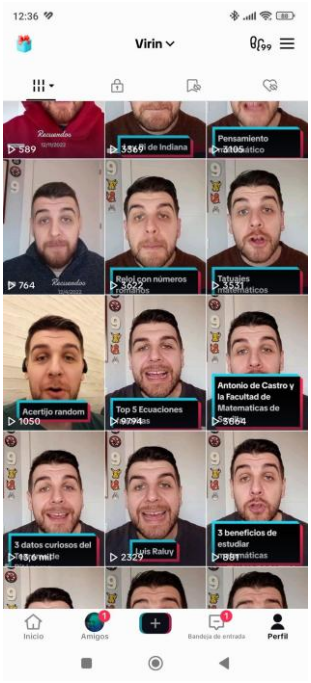


Imagen 5. Perfil divulgador en la red social TikTok

Si el docente prefiere que sus contenidos queden en su aula, puede privatizar el perfil, pero en cambio si no le importa o incluso prefiere que se puedan visualizar por parte de personas de todo el mundo, no tiene problemas en dejar su perfil como público.

2.3.2 La motivación y divulgación en la red social TikTok

La idea de llevar las matemáticas a formato vídeo y de compartirlos en la red social TikTok fue una consecuencia natural de querer adaptarnos al ritmo de vida de nuestro alumnado.

Lo que hace unos años era un blog, llegó un momento en el que quedaba muy alejado de los gustos de los estudiantes y no era una herramienta aprovechable en estos años. Tras coquetear con diferentes redes sociales y haber hecho un buen trabajo en Instagram durante bastantes cursos, se creó la necesidad de emigrar a TikTok y con ello tener que cambiar el formato de texto o imagen a un formato de vídeo.

Imagen 6. Captura de vídeo de motivación en matemáticas de TikTok

Todo fue debido a que hace 5 o 6 años, el alumnado utilizaba Instagram para informarse y entretenerse pero, a raíz de la pandemia, esta red social se fue quedando para una población de mayor edad, dedicando nuestro alumnado su tiempo a TikTok.

Ponerse delante de una cámara no es fácil al principio. Los primeros vídeos eran oscuros, con mal sonido y con apariencia nerviosa. Además, se puede tener la sensación de estar mucho más expuesto que en otras plataformas.

Pero con el paso del tiempo se va mejorando la expresión a cámara y los guiones, y además con una pequeña inversión se pueden adquirir focos, micrófonos o trípodes que mejorarán enormemente la calidad del producto final.

Desde esta plataforma tenemos la opción de motivar al alumnado con introducciones, aplicaciones o conceptos explicados de forma muy amena.

Además, desde la caja de comentarios se pueden hacer preguntas y abrir debates, en ocasiones muy enriquecedores.

En definitiva, TikTok es una herramienta que utilizada con sentido común, nos permite motivar, enseñar, despertar la curiosidad y divulgar, desde un entorno amable y familiar para nuestro alumnado.

3. Conclusiones.

Esta propuesta ha explorado la integración de vídeos en la enseñanza de matemáticas a través de plataformas sociales como Flip, Twitch y TikTok, destacando su potencial para mejorar el aprendizaje, la tutorización y la divulgación matemática. Los resultados de las diferentes acciones sugieren que, al incorporar estos medios en el aula, no solo se fomenta una mayor participación y compromiso por parte del alumnado sino que también se enriquece su comprensión de los conceptos matemáticos. La utilización de vídeos ha permitido presentar la matemática de manera más aplicada y contextualizada, facilitando la comprensión de conceptos abstractos y promoviendo el desarrollo de competencias digitales, analíticas y comunicativas, en línea con lo expuesto por Rodríguez-Muñiz, Alonso-Castaño y Muñiz-Rodríguez (2021) y Saballet-Lara, Baleta y De Armas (2022).

Sin embargo, la variabilidad en la calidad técnica de los vídeos y la diversidad en las habilidades digitales del alumnado que elabora vídeos pueden influir en la efectividad de este recurso como herramienta educativa. Además, la accesibilidad a dispositivos adecuados son factores que pueden limitar la implementación generalizada de las estrategias de acompañamiento o divulgación en otros contextos educativos. Futuras experiencias deberían explorar estrategias para minimizar estas posibles barreras, así como evaluar el impacto a largo plazo de la integración de vídeos en la enseñanza de las matemáticas en diversos grupos de estudiantes.

En conclusión, el uso de vídeos en redes sociales puede representar una innovadora estrategia para la enseñanza de matemáticas, alineada con las preferencias de aprendizaje de las nuevas generaciones e intereses tecnológicos actuales. La adopción de este enfoque no solo mejora la experiencia de aprendizaje de los estudiantes sino que también los prepara para enfrentar los desafíos en un mundo cada vez más digitalizado.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P. (2023). ¿Qué podemos esperar de las redes sociales?. En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemática*s (pp. 178-189). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3

Castellà, E., Margelí, S. y Torra, M. (2023). Laboratorio de Matemáticas. En *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemática*s (pp. 667-681). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), Valencia, 2023. ISBN: 978-84-122154-0-3

Ribera Puchades, J. M. (2023). Evaluación de vídeos educativos de matemáticas universitarias: un enfoque hacia la mejora de la calidad en el aprendizaje audiovisual. En *Innovación Docente e Investigación en Educación: Nuevas tendencias para el cambio en la enseñanza superior* (pp. 559-569). Dykinson.

Ribera Puchades, J.M., Rodríguez Luis, D.J. y Rotger García, L. (2021). Cuatro propuestas para la implementación del uso del vídeo en la docencia universitaria. En REDINE (Coord.), *Medios digitales y metodologías docentes: Mejorar la educación desde un abordaje integral*. (pp. 113-122). Madrid, España: Adaya Press.

Ribera Puchades, J. M., y Rotger García, L. (2020). Análisis de vídeos educativos de matemáticas creados por estudiantes del máster en formación al profesorado. En L. Pérez Lomas, P. Aguilar Conde, & J. R. Córdova (eds.), *Técnicas y fórmulas de la nueva docencia* (pp. 399-412). Tirant Humanidades.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Alonso-Castaño, M., y Muñiz-Rodríguez, L. (2021). Análisis del conocimiento de estudiantes para maestro o maestra en la elaboración de vídeos educativos: una experiencia didáctica. *Magister*, 75–84.

https://doi.org/10.17811/MSG.33.1.2021.75-84

Saballet-Lara, M. P., Baleta Palomino, A. E. y De Armas, D. (2022). Aprendizaje de las matemáticas mediado por las redes sociales en estudiantes de tercer grado. *Revista Criterios, 29*(2), 202-221.*https://doi.org/10.31948/rev.criterios/29.2-art12*

La ecuación de primer grado: una ocasión para desarrollar el Sentido Algebraico de nuestro alumnado

Xavier Vilella Miró

xvilella@xtec.cat

Grup Vilatzara / Institut de Ciències de l'Educació – Universitat Autònoma de Barcelona (ICE-UAB)

Núcleo temático: Recursos + Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Resulta evidente que, con ejercicios de nivel reproductivo, pobres desde el punto de vista competencial, nunca nuestro alumnado desarrollará el Sentido algebraico, porque éste exige Razonamiento Matemático: necesita un **reto** (un problema rico, una buena pregunta) que provoque la **reflexión**, ésta conduce al **razonamiento**, que nos da una o más soluciones, que se **comunican**, se **debaten** entre iguales para llegar al consenso. La mecánica pura y dura sólo desarrolla habilidades de nivel competencial reproductivo, el nivel competencial más bajo de todos. Hay otros caminos mucho más productivos para desarrollar el Sentido algebraico. Presentamos algunos ejemplos que muestran que la ecuación de primer grado nos ofrece posibilidades de desarrollar el razonamiento algebraico de nivel reflexivo: desde ecuaciones sencillas como x - 5 = 0, o 2x = 5, hasta el uso de diagramas para resolver típicos problemas de primer grado que habitualmente quieren resolverse aislando la x, o el tanteo inteligente.

Palabras clave: Sentido Algebraico, Razonamiento, Tanteo inteligente

La ecuación de primer grado: una ocasión para desarrollar el Sentido Algebraico de nuestro alumnado

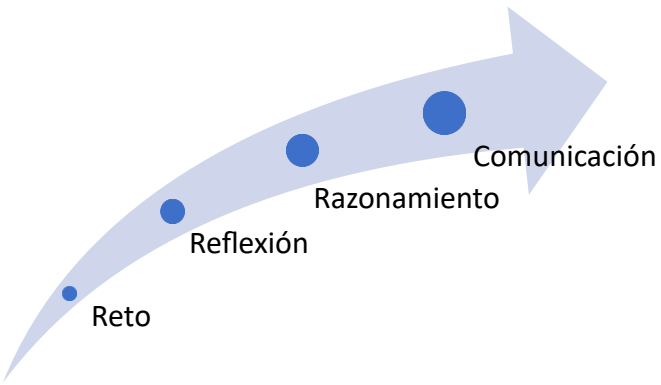
El Álgebra es un atributo, un poder fundamental, de la mente. No solo de las Matemáticas. Sin álgebra estaríamos muertos, o si hemos sobrevivido hasta ahora, es en parte gracias al álgebra, a nuestra comprensión de las clases, las transformaciones y el resto. (Gattegno, 1970, pp. 23-5)

Razonar antes de mecanizar

Cuando entra la mecanización en la mente del alumno, sale de ella el razonamiento. Esto no es dar ***Sentido Algebraico*** al alumnado, que es lo que pretendemos conseguir. Los supuestos "problemas de primer grado" son generalmente ejercicios que rozan el absurdo, puesto que a menudo pueden ser resueltos por cálculo mental usando nociones sencillas de aritmética, o bien verdaderos trabalenguas en los que lo más difícil es traducirlos a una ecuación.

Las actividades de aprendizaje que se proponen en el aula son determinantes para conseguir el desarrollo del Sentido Algebraico, pero también lo es la gestión en el aula de dichas propuestas. Por ello, una de las características que las actividades ricas deben de tener es que faciliten que el alumno se forme una opinión propia, y que inciten a que se presenten a los demás, generando un debate que acabe en un consenso de todos.

Para dar Sentido Algebraico al alumnado, proponemos otras actividades (distintas de las habituales) que intentan avanzar en la siguiente secuencia:



Secuencia para desarrollar el Sentido Algebraico, basándonos en el desarrollo del Razonamiento Matemático

El primer paso para conseguir desarrollar el Sentido Algebraico de nuestro alumnado ha de ser lanzar un reto, puesto que sin éste el alumnado se pone en modo reproductivo, y lo que necesitamos es que se ponga en modo reflexivo. Los niveles competenciales superiores son el nivel conectivo y el nivel reflexivo (Informe PISA, 2004, p. 41). El reto, si hemos acertado, provoca la reflexión personal (es difícil que un alumno de la ESO se resista a un buen reto). Ahora la reflexión personal debe de convertirse en Razonamiento: en ese paso, la guía y la gestión de aula de la profesora/r es clave. Y el contraste con otros razonamientos de otros alumnos conduce a las soluciones, que deben ser consensuadas. Tengamos en cuenta que uno de los desafíos de la educación del siglo XXI es implementar en el aula metodologías activas que permitan dinamizar la actividad mediante el intercambio de ideas, la elaboración de argumentos, la investigación y la reflexión grupal (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022)

Mecanizar sin razonar

Lo que aparece en la mayoría de los libros de texto de los primeros años de Secundaria, y a lo que llaman "Álgebra", suele ser un entrenamiento intensivo, una mecanización de una serie de pasos para aislar una "x" en una ecuación, que comienza con la de primer grado: el alumnado acostumbra a quedarse con normas como "éste pasa al otro lado restando", el otro "pasa dividiendo"...

Mason (2002) afirma: “El foco en obtener la respuesta correcta guía a los profesores de todo el mundo a presionar, tratando de entrenar estudiantes en cómo hacer cálculos”

Uso de letras y números

Veamos un problema habitual, pero enriquecido mediante una ampliación que conduce al razonamiento (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005):

“Encuentra dos números cuya suma sea 50 y su diferencia sea 10.

Ahora encuentra otro camino para resolver el mismo problema. Y otro más. ¿Podría ayudarte un diagrama?

Prueba a resolver el mismo problema, pero con diferentes números: por ejemplo, que la suma sea 47,358 y la diferencia 3,57 ¿Qué método de resolución escogerías ahora?"

Si el alumno aprende a resolver problemas usando un método mecánico que funciona, seguramente ignorará los números concretos del problema, que a menudo condicionan el método escogido. Cuando se introduce al alumno en el uso de "letras y números", y se le expone a "cajas vacías", esto conduce al uso de una letra como *etiqueta* en lugar de como *valor aún desconocido*, lo que a menudo bloquea el desarrollo del pensamiento algebraico del alumno (Mason, Graham & JohnstonWilder, 2005)

Por ello, si queremos que el alumnado resuelva una simple ecuación de primer grado como x + 5 = 8, conviene empezar por establecer si comprenden las relaciones entre tres números mediante la suma y la resta. Es decir, será difícil que comprendan que "el 5 pasa restando" si antes no comprenden que estos tres números están relacionados así: 3 + 5 = 8; 5 + 3 = 8; 8 – 3 = 5; 8 – 5 = 3. Pero, en el conjunto de los números naturales, la relación no incluye 3 – 8 o bien 5 – 8, porque estas dos relaciones necesitan el -5 y el -3. Debemos comprobar si en su paso por Primaria ha comprendido la estructura matemática subyacente en las operaciones aritméticas: propiedades y relaciones, en cada conjunto numérico. Asimismo, deberemos asegurarnos de que llegan a comprenderla en los conjuntos numéricos nuevos, o en los que se profundiza, con los que se trabaja en la ESO (naturales, enteros, racionales, reales).

Por ejemplo, si dos cantidades restadas dan 0, ambas cantidades deben ser iguales. O bien, si la cuarta parte de una cantidad es 5, la cantidad entera debe ser 20. O bien, cuando se comprende el sentido de la división como las veces que el divisor cabe en el dividendo.

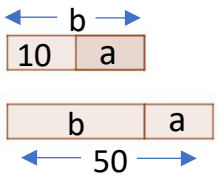
Si tenemos x – 7 = 0, no conviene darles la técnica mecánica clásica ("el 7 pasa restando") sino que, para desarrollar su Razonamiento Matemático, ligado al Sentido Algebraico, nos conviene conducirles a que reflexionen sobre lo que quiere decir que,

en una resta, la diferencia entre dos números sea 0. Además, este enfoque sirve para ir poniendo las bases para el Razonamiento Deductivo, puesto que nos basamos en propiedades demostradas anteriormente.

Parte del profesorado, en un intento por justificar que “el 7 pasa restando”, explica que, si sumamos 7 a los dos miembros de la igualdad, ésta se mantiene. Pero esta justificación no deja de ser una *técnica que funciona*. Dudamos de que buena parte del alumnado comprenda la razón de esa suma, más allá del hecho de que la x queda aislada. Porque la razón de que funcione es que estamos usando una propiedad de la suma en el conjunto numérico correspondiente: si sumamos un número con su opuesto respecto a la suma, el resultado es el elemento neutro de la suma, o sea 0. Este es el motivo de que la x quede aislada, no se trata pues de un *truco matemático* para aislar.

Para pasar a la generalización, al método general, para comprender e interiorizar la forma de resolver un grupo determinado de problemas mediante una estrategia extraída de casos particulares, podemos usar los diagramas.

Un diagrama puede conducirle a comprender cómo se pueden resolver los problemas de este grupo, sean cuales sean las cantidades implicadas, y a usar símbolos para las cantidades desconocidas. En el ejemplo anterior: “Encuentra dos números cuya suma sea 50 y su diferencia sea 10”:



$a + b = 50, b =$

$a + 10, a + a +$

$10 = 50$

2a + 10 = 50 por lo que 2a = 40, y a = 20

Este diagrama podría ser útil para afrontar también el problema del precio de la botella i del corcho: "*Una botella y su corcho cuestan 1,23 euros. La botella cuesta 0,89 euros más que el corcho. ¿Cuál es el precio del corcho?*". En los problemas de las edades un diagrama de este tipo también puede ayudar en la comprensión de la situación y en encontrar el camino de resolución.

Consideramos, siguiendo a Godino y otros (2012), que el razonamiento algebraico es mucho más que el manejo de expresiones algebraicas. Desarrollamos el Sentido Algebraico cuando comprendemos las propiedades de las operaciones y las relaciones entre variables, reconocemos patrones y expresamos regularidades, cuando entendemos el valor de la igualdad condicionada (ecuación), cuando somos capaces de generalizar y usar notación simbólica, de modelizar situaciones, de argumentar y debatir, contrastando nuestras ideas propias con las de los demás.

Por ejemplo, en el caso de: $\frac{x}{4} = 5$

¿Cómo se resuelve esta ecuación?

- Mecánicamente: "el 4 *pasa* multiplicando al otro miembro de la igualdad"
- Razonamiento: la cuarta parte de x vale 5, por tanto…

Ahora fijémonos en estas tres ecuaciones en las que el valor aún desconocido se encuentra en el denominador:

$$\frac{45}{x} = 5$$

$$\frac{1000}{x} = 200$$

$$\frac{70}{x} = 140$$

Si en Primaria les han enseñado que "la multiplicación hace crecer y la división empequeñece". O bien que "la multiplicación es una suma rápida, y la división una resta rápida", van a tener dificultades para comprender cuál es la solución de la tercera propuesta. Pasa de un dividendo igual a 70 a un cociente igual de 140. Induce a responder que la x vale 2, lo cual es evidentemente falso.

La interpretación que puede aclarar el resultado inesperado es pensar "¿qué número cabe 140 veces en 70 unidades? Evidentemente, debe de ser una fracción de la unidad, concretamente ½.

Afrontar este obstáculo permite al alumnado razonar matemáticamente, debatir con los iguales, comprender mejor la división. Si, ante esta dificultad, les indicamos que tienen que "*pasar la x multiplicando y entonces pasar el 140 dividiendo*", no razonarán, mecanizarán y listos. La eficacia no compensa la falta de comprensión y de razonamiento, al menos en esta fase inicial de 1º de la ESO.

El Tanteo Inteligente: acotación de valores en ecuaciones de primer grado

También queremos reivindicar el valor del tanteo, pero no de cualquier tanteo, sino del Tanteo Inteligente. Lo introducimos en las XX JAEM (Vilella, 2022).

Para empezar, un caso muy simple, en el que no nos haría falta el tanteo para resolverlo:

$$\mathbf{5x - 2 = 0}$$

¿Cómo debemos resolver esta ecuación? Antes de la resolución razonada (la diferencia es 0, por lo que 5 veces x debe ser igual a 2), o de la solución mecánica (pasamos el 2 sumando), ¿por qué no intentamos **acotar** la solución?

El valor de la x no puede ser negativo dado que…

El valor de la x no puede ser mayor que 1 porque…

El valor de la x no puede ser 0 porque…

El valor de la x debe ser mayor que 0 porque…

Por tanto, el valor de la x debe estar entre 0 y 1: ¡un decimal!

Un decimal que debe *comerse* al 5… ¡pero no del todo!

¿Cuál será? ¿Podemos seguir acotando el valor de la x?

El valor de *5 veces x* debe igualar a 2 (su diferencia es 0): ¿qué número multiplicado por 5 **da 2**? **…..**

Ahora un ejemplo más complicado.

$$3x + 5 = 2 \cdot (x - 8)$$

a) Explica por qué x **no puede ser** un número entre 0 y 8
b) ¿Por qué x no puede ser 9?
c) Mira lo que pasa cuando x vale 9 y cuando x vale 10 en cada miembro de la igualdad. Explica por qué es seguro que x no puede ser un número mayor que 9
d) Explica ahora por qué x **ha de ser** un número negativo

En la comunicación oral, presentaremos producciones de alumnos en las que podremos ver el desarrollo del Razonamiento Matemático que se produce con este enfoque.

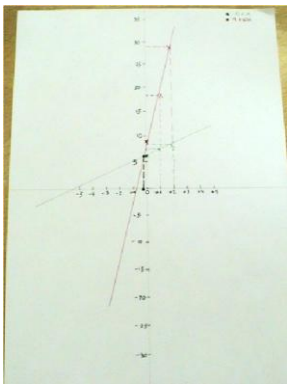
Tanteo inteligente en base al método de igualación

Usamos el razonamiento aplicado al concepto de ecuación como igualdad condicionada, un equilibrio debe mantenerse cuando demos valor a la x presente en los dos miembros de la igualdad:

6x + 9 = 10x + 16

- Si x=0, +9 +16
- Si x=1, +15 +26
- **La distancia crece, no vamos bien...**
- Si x= -1, +3 +6
- **Vamos mejor...**
- Si x= -2, -3 -4
- Casi lo tenemos. **Nos hemos pasado de poco…**
- **El resultado está entre –1 y -2**
- Si x= -1.5, ...

Es un proceso constructivo (los resultados de cada miembro se acercan o se alejan lo que nos indica hacia dónde debemos dirigir el tanteo) y es representable como dos rectas... ¡que se cortan! ¿En qué punto?



Representamos los resultados de cada número del tanteo como puntos (x.y) de dos rectas una por cada miembro de la igualdad

Para acabar

En esta comunicación, pretendemos mostrar que un contenido con pocas posibilidades de desarrollar Razonamiento Matemático en un tratamiento tradicional, mecánico, puede dar mucho de sí cambiando la manera de abordarlo en el aula: antes de mecanizar, razonar.

Hemos propuesto algunos ejemplos de actividades en esa dirección que dan buenos resultados en el aula.

Si se desea conocer otras propuestas referidas al abordaje de la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (aquí se ha presentado un ejemplo relacionado con el método de igualación), y otras propuestas contextualizadas, puede consultarse en Sol, Vilella (2005), en Vilella, Sol, Comellas (2009), en Sol, Vilella, Comellas (2009), o en Vilella (2010).

Referencias

Godino, J. D.; Castro, W. F.; Aké, L.; Wilhelmi, M. R. (2012): Naturaleza del razonamiento algebraico elemental https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Gattegno, C. (1970). *What We Owe Children: The Subordination of Teaching to Learning*. Routledge and Kegan Paul, London.

Mason, J. (2002): Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing. Londres: Routledge Falmer.

Mason, J.; Graham, A.; Johnston-Wilder, S. (2005) *Developing Thinking in Algebra*. The Open University & Paul Chapman Publishing, London.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2022). *Real Decreto 157/2022 de 01 de marzo, por el que se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. BOE, 52, 24386 - 24504

Sol, M.; Vilella, X. (2005): *Los íberos, las pizzas y los refrescos: el álgebra, más allá de las ecuaciones*. Actas de las JAEM de Albacete. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Vilella, X.; Sol, M.; Comellas, J. (2009): *Álgebra en contexto*. Comunicación. Actas de las XIV JAEM. Girona. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Sol, M.; Vilella, X.; Comellas, J. (2009): *¿Álgebra sin incógnitas? Una introducción competencial al álgebra.* Taller. Actas de las XIV JAEM. Girona. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Vilella, X. (2010). *Enriquiment competencial de tasques matemàtiques*. Revista BIAIX, núm 28-29, pp. 18-31. Abril, 2010

Vilella, X. (2022). *Pensar antes de calcular y de actuar… y volver a pensar después.* Actas de las XX JAEM. València. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Juegos de mesa, un contexto para el desarrollo de procesos y saberes en el aula de matemáticas[32]

Luis Cros Lombarte[1], Jordi Deulofeu Piquet[2], Helena Garví Casas[3], José M. Maimó[4]

lluis.cros@sarria.epiaedu.cat[1], jordi.deulofeu@uab.cat[2], hgarvi@xtec.cat[3], josemiguelmaimo@gmail.com[4]

[1]Escola Pia Sarrià (Barcelona, España)

[2]Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra (Cerdanyola del Vallès, España)

[3]Institut Pau Casals (Badalona, España)

[4]CEIP Ses Rotes Velles, Santa Ponça, Calvià (Baleares, España)

Núcleo temático: Recursos para el aula. Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Batxillerato

RESUMEN

Los juegos de mesa son un excelente contexto generador de actividades matemáticas y fuente de diversas situaciones de aprendizaje en todos los niveles educativos. Los juegos de mesa ofrecen un contexto enriquecedor para el aprendizaje de las matemáticas, abriendo puertas a diversas actividades y situaciones de aprendizaje en todos los niveles educativos. Los miembros del grupo SET de ABEAM (Barcelona) nos dedicamos a integrar los juegos de mesa en el aula de matemáticas y a promover distintas actividades de tipo lúdico para que el alumnado de todos los niveles encuentre sentido a las matemáticas que aprende y tenga motivaciones intrínsecas para hacer matemáticas. Porqué introducir juegos en el aula, cómo hacerlo y qué relación tienen con el aprendizaje de saberes, procesos y competencias matemáticas es el principal objetivo de esta comunicación, en la que se mostraran

[32] En esta comunicación se presentan algunos contenidos de los artículos pertenecientes a la sección jocs de taula i matemàtiques que el grupo SET de ABEAM publica desde 2022 en la revista NOUBIAIX.

ejemplos de algunos de los juegos implementados por los miembros del grupo. Exploraremos el porqué de la introducción de juegos en el aula, cómo llevar a cabo esta integración y la relación que tienen con el aprendizaje de conceptos, procesos y competencias matemáticas. Además, proporcionaremos ejemplos concretos de algunos juegos implementados por nuestro grupo, mostrando su efectividad en el proceso educativo.

Palabras clave: Juegos de mesa, Situación de Aprendizaje, Resolución de problemas, Conexiones y Comunicación.

1. Introducción

El grupo SET, de la asociación ABEAM de Barcelona es un grupo de docentes de matemáticas de diferentes niveles educativos (de infantil en la universidad) con un objetivo común: usar juegos de mesa para enseñar matemáticas en todos los niveles. Todos los que formamos el grupo somos aficionados a jugar y antes de proponer actividades de aprendizaje basadas en juegos dedicamos un cierto tiempo a practicar los juegos que seleccionemos y, posteriormente, a analizarlos desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas. Todos los miembros del grupo compartimos la pasión por los juegos de mesa. Antes de proponer actividades educativas basadas en juegos, nos dedicamos a practicar y analizar exhaustivamente los juegos seleccionados desde una perspectiva matemática. Valoramos especialmente la rejugabilidad de un juego, es decir, la capacidad de generar el deseo de volver a jugar una vez finalizada una partida. Esta característica es fundamental, ya que fomenta emociones positivas que favorecen el proceso de aprendizaje.

Desde hace cinco años los que formamos el grupo, después de probar una gran cantidad de juegos -la mayoría de ellos de creación reciente- hemos ido construyendo una lista de juegos para trabajar las matemáticas en el aula, con el intento de recubrir los diferentes bloques de contenidos del currículum desde el primer curso de infantil hasta segundo de bachillerato.

Cómo sucede en otros contextos, detrás la práctica de un juego a menudo encontramos elementos matemáticos, tanto conceptuales como procedimentales y sobre todo competenciales, por lo cual los juegos de mesa constituyen una fuente magnífica para generar actividades matemáticas.

En un reciente artículo de Teresa Longueira, miembro de nuestro grupo, publicado en el blog de la Fundación Bofill, podemos leer: “Las matemáticas nos ayudan a entender el mundo, pero esto no pasa si no entiendo lo que estoy haciendo en el aula de matemáticas (...) Y una manera de acercar la realidad al aula es generar situaciones de juego que ayuden al alumnado a construir modelos matemáticos que les permitan entender el mundo. Esta es una de las ideas claves que los miembros del grupo intentamos llevar a la práctica y difundir entre el conjunto del profesorado de matemáticas.

En esta comunicación trataremos de justificar por qué estamos convencidos que los juegos de mesa, preferiblemente los contemporáneos comercializados, pero también otros que pueden construirse fácilmente en el aula, deberían estar presentes en las clases de matemáticas.

2. ¿Por qué utilizar juegos en el aula?

La práctica de juegos de mesa, una actividad propia de los seres humanos, tiene dos características principales: diversión y aprendizaje. En la práctica de un juego encontramos una amplia gama de emociones y acciones, entre otras: diversión, ilusión, relación social, comunicación, reto intelectual, ganas de mejorar, competición, negociación, colaboración, trabajo en equipo, imaginación, creatividad, habilidades mentales y manuales, interpretación, memoria, resolución de problemas, toma de decisiones, conocimientos, competencias, seducción e incluso el cambio de roles a través de pequeñas estrategias y engaños.

Por otro lado, cuando uno juega, muestra sus capacidades y su manera de ser en aspectos cognitivos, emocionales, sociales y de comportamiento, a partir de las

decisiones que toma (diferentes maneras de jugar): si es arriesgado o conservador, competitivo o colaborador, negociador o intransigente, empático o individualista. Porque un juego es, casi siempre, una simulación, más o menos próxima, de una situación de la vida o del mundo en el que vivimos. En definitiva, jugando se aprende a vivir, a convivir y a compartir. Los jugadores son los actores principales: sin ellos nada tiene sentido y con ellos la práctica de un juego puede convertirse en una actividad relevante, fuente de placer y de aprendizajes significativos, tanto desde el punto de vista de los que lo juegan como desde aquello que queremos que aprendan.

3. Juegos de mesa y matemáticas

Aunque los juegos de mesa se pueden emplear en la mayoría de asignaturas, muchos juegos tienen una fuerte relación con diferentes aspectos de las matemáticas, tanto competenciales como conceptuales y también de carácter procedimental. Desde el punto de vista competencial hay que empezar destacando la habilidad para tomar decisiones fundamentadas, una competencia que consideramos esencial, aunque pocas veces se explicita en el currículum de matemáticas. Aun así, entre las competencias relevantes, es seguramente la resolución de problemas la que más claramente se identifica en el proceso de la práctica de un juego y en muchas de las actividades asociadas a los juegos. De hecho, este proceso y la investigación de estrategias ganadoras o de “buenas” maneras de jugar que aumenten la probabilidad de ganar, según los casos, se puede analizar siguiendo unos pasos muy similares a las conocidas fases de Polya. Así, es posible establecer un paralelismo entre ambos procesos: la comprensión del problema (la pregunta o demanda, los datos que nos proporciona y su relación) se corresponde con la comprensión del juego (de su objetivo y de las reglas). El diseño de un plan de resolución del problema tiene relación con la determinación de estrategias (entendidas como maneras de jugar, teniendo en cuenta las jugadas que hacen los otros) para intentar lograr el objetivo del juego. La ejecución del plan se corresponde con la implementación de las estrategias (aplicación de las mismas en partidas concretas) y, finalmente, la visión retrospectiva (validación de la solución del problema, de las estrategias diseñadas e implementadas

y planteamiento de generalizaciones) es parecida a la validación de la estrategia ganadora, que es la que resuelve el juego, y que puede tener un carácter más inductivo, aplicándola a nuevas partidas y observando el resultado obtenido, o más deductivo, razonando su validez de manera general.

El resto de competencias están también presentes en la práctica de los juegos de mesa, en particular, las relacionadas con el razonamiento matemático y también las comunicativas.

En cuanto a los contenidos, los juegos se pueden relacionar con los diferentes bloques del currículum de matemáticas: el numérico (especialmente sentido numérico y cálculo), el geométrico (sentido geométrico, relación 3D-2D), el probabilístico (idea de azar, sucesos, equiprobabilidad, y también con la medida (percepción, estimación y medida efectiva de diferentes magnitudes) y finalmente también con el bloque de relaciones y cambios (identificación de patrones, generalización, tipo de cambios).

4. ¿De qué juegos hablamos?

En el momento de escoger juegos para llevar al aula hay una serie de aspectos que hay que tener en cuenta: las particularidades de los juegos elegidos, las finalidades de su introducción y las características concretas de la acción al aula. Así, hay que evitar juegos que tengan instrucciones poco claras o muy largas y pesadas, que tengan muchos elementos y de medida pequeña, y que el tiempo de juego sea tan amplio que no permita poder hacer varias partidas para reflexionar sobre la estrategia del juego y poder ver así las matemáticas que se han trabajado en una misma sesión (o máximo dos).

De acuerdo con el anterior, aconsejamos los juegos que denominamos 5-10-15: - 5 minutos para comprender las instrucciones, entre 10 y 15 minutos de juego, para poder hacer más de una partida y trabajar actividades que permitan aflorar las matemáticas presentes en el juego y otro tiempo similar para reflexionar sobre el juego y su relación con las matemáticas. También es importante que el precio no sea

superior a 15€ (los juegos comercializados hay que comprarlos y los presupuestos siempre son migrados).

Una vez se esté jugando al juego hay que revisar que se hace de manera correcta y, si se ha decidido hacer algún cambio, constatar que no se modifica el objetivo pedagógico del juego. Una manera de dinamizar la comprensión de las instrucciones es hacer llegar al alumnado las instrucciones a través de videotutoriales, de forma que al aula simplemente se tengan que resolver dudas concretas y ponerse rapidamente a jugar.

También es una buena solución utilizar juegos que los alumnos ya conocen por haber jugado a ellos en cursos anteriores o en su casa.

Otro aspecto que debemos que tener en cuenta cuando seleccionamos un juego para el aula, tal como ya hemos comentado al inicio, es la rejugabilidad, las ganas de jugar una nueva partida cuando hemos acabado una. Si al acabar un juego no tenemos ganas de volver a jugar, no cumple la idea básica de emocionar y, por lo tanto, aunque sea matemáticamente potente, no conseguirá consolidar los conocimientos trabajados.

5. La gestión de la actividad en el aula.

Cuando llevamos un juego al aula, como en cualquier actividad, es fundamental diseñar una buena gestión de la clase, en particular la organización del tiempo.

Si pensamos en sesiones de 50/55 minutos podemos destinar:

- Alrededor de 10 minutos a la preparación inicial: organización espacial del aula, agrupación de los alumnos, reparto de juegos, preparación del juego y comprensión de las reglas del juego por parte de todos los jugadores.

-Alrededor de 20-25 minutos a jugar al juego, procurando que se pueda hacer más de una partida.

-Alrededor de 15-20 minutos para mostrar las matemáticas que se han trabajado durante el juego, aportando preguntas que permitan hacer una reflexión sobre qué matemáticas han emergido, como las hemos utilizado, como las podemos conectar con el juego y como las podemos representar. También es relevante que aparezcan elementos metacognitivos -a menudo relacionados con las maneras de jugar-, así como que se pueda hacer una valoración de la sesión y de los juegos propuestos.

En el caso de juegos que tienen implícitas las matemáticas, o de juegos que se presentan adaptados para que surjan unas determinadas matemáticas, y estas se desarrollan claramente en la práctica del juego, tiene sentido alargar el periodo de juego y reducir el de hacer presente las matemáticas.

Por otro lado, en el caso de aquellos juegos a los cuales se decida dedicar más de una sesión es imprescindible que se haga presente que la sesión ha estado de aprendizaje a través de un juego y no solo de juego. Cuando el alumnado sale de la sesión con la sensación “de hoy a clase hemos jugado” (y nada más), se pierde el sentido pedagógico de la sesión y difícilmente se logran los objetivos establecidos.

En cuanto al agrupamiento del alumnado, dependerá del número de alumnos y del número de ejemplares del juego de que se disponga. Para decidir el número de jugadores por juego nos podemos orientar por la recomendación que se hace en el propio juego, teniendo en cuenta que un jugador puede estar formado por un pequeño grupo de alumnos, mejorando así la interacción entre iguales. Los grupos tienen que ser pequeños, dos o tres alumnos, puesto que cuatro acostumbra a ser complicado y más no es aconsejable. Haciendo esto, se trabaja el uso de información compartida, se mejora la atención para tomar decisiones, se fomenta el debate de ideas y de propuestas y, en definitiva, se desarrolla el trabajo colaborativo. Este planteamiento es adecuado para los juegos solitarios, de forma que, bien organizados son una excelente propuesta para trabajar en grupos cooperativos.

Por otro lado, hay que analizar el que hace (o tiene que hacer) cada jugador desde que se acaba su turno hasta que le vuelve a tocar jugar: algunos juegos fomentan la concentración y los jugadores tienen que estar atentos al que hacen los otros, puesto

que influye en su propio turno, o bien se trata de juegos donde no hay un orden de turno y se puede participar en cualquier momento. Estos juegos son, seguramente, los mejores por una buena dinámica el aula, mientras que los juegos en los qué los jugadores, desde que acaban su turno hasta que los vuelve a tocar, no tienen que estar atentos o pasa mucho de tiempos porque así lo requiere la dinámica del juego, no son muy adecuados para el aula. Algunos juegos pueden estar diseñados para un número muy grande de jugadores, pero nosotros podemos limitar esta cantidad en función de nuestros objetivos y necesidades.

6. ¿Y si no disponemos de bastante ejemplares de un mismo juego?

En el caso en que disponemos de pocos ejemplares del mismo juego os proponemos algunas posibilidades para organizar el aula y poder usar los juegos: Crear dinámicas con varios juegos que trabajen el mismo concepto e ir eructándolos entre los diferentes grupos de juego. Para hacerlo hay que tener presente que, para que las rotaciones funcionen bien, el tiempo de juego tiene que ser similar, de forma que se puedan acabar las diferentes partidas y la correspondiente reflexión sobre cada juego, antes de hacer la rotación. Nunca es una buena opción acabar el juego sin llegar al objetivo del mismo. Por el alumnado, es frustrante haber diseñado una estrategia ganadora y no poder comprobar su validez. En estos casos, una buena opción es seleccionar juegos donde se pueda adaptar el número de rondas que hace falta para finalizar una partida.

Establecer espacios de trabajo diferenciado, donde tengamos un rincón con los alumnos trabajando con un juego, otro donde otros alumnos estén trabajando con material manipulativo y otro rincón con un grupo trabajando con la formalización de un concepto, o haciendo una sesión de dudas o de explicación entre expertos… Se pueden hacer tantos espacios como se considere adecuado, pero tiene que quedar clara su trabajo de cada espacio, y la duración tiene que ser similar. Después de varias sesiones, todos los alumnos tienen que haber pasado por todos los espacios.

7. Sobre la evaluación de las actividades de juego

Las posibilidades de evaluación, así como los instrumentos para obtener datos relevantes son múltiples. Desde el punto de vista del docente, y como sucede con el resto de actividades, el primero que hay que analizar es si se han conseguido los objetivos que se habían planteado. Esto es puede hacer a través de algún tipo de prueba a posteriori, por ejemplo planteando una nueva actividad que recoja elementos clave del trabajo realizado con el juego, o bien a través de una rúbrica de observación. También se tiene que valorar si el diseño de la sesión ha sido adecuado y hacer un listado de aquellos aspectos que hay que mejorar en próximas implementaciones del juego. También se puede obtener una calificación valorando las fichas de trabajo que se han usado durante la sesión.

Desde el punto de vista del alumnado, un primer punto que hay que conocer es el valor que dan a los juegos y su relación con las matemáticas. La comparación de respuestas a las preguntas: ¿por qué juegas a juegos de mesa?, o, ¿por qué haces matemáticas?, nos proporcionarán información de cómo el alumnado ve estas dos actividades. Al principio, encontraremos en general respuestas muy diferentes e incluso contrapuestas. En función de esta situación inicial habrá que ayudar al alumnado, con mayor o menor intensidad, a establecer relaciones y paralelismos entre la práctica y análisis de juegos y el trabajo en matemáticas.

Una vez realizada una sesión de juegos en el aula, o una secuencia, habrá que pedir al alumnado una valoración de la actividad para determinar hasta qué punto se han cumplido las expectativas creadas y si querrían volver a realizar una sesión de trabajo similar. Así mismo, el alumnado tendría que hacer una valoración crítica del que ha aprendido durante la sesión, discerniendo elementos competenciales, conceptuales y procedimentales. Por otro lado, para evaluar aprendizajes adquiridos, tanto si se quiere hacer una valoración con fines calificativas como analíticas, recomendamos el uso de rúbricas específicas que permiten disponer de valoraciones detalladas y que pueden ser valoradas con cierta objetividad.

Utilizar juegos de mesa como herramienta para enseñar matemáticas presenta múltiples ventajas. Sin embargo,-hay que diseñar y gestionar las actividades basadas en juegos para que sean realmente una herramienta relevante para el aprendizaje de las matemáticas de todos los chicos y las chicas, de todos los niveles educativos. Si bien el primer paso, despertar el interés, suele lograrse más fácilmente en este contexto que en otros, esto representa solo el comienzo. Es fundamental seleccionar bien los juegos, diseñar actividades y secuencias didácticas a partir de ellos, y gestionar adecuadamente el aula, en la línea que hemos tratado de exponer, para aprovechar esta predisposición inicial y transformarla en un aprendizaje real.

8. Un ejemplo final: Chocolate Fix.

Este juego individual de lógica, que admite un trabajo colaborativo, es un solitario creado por el grupo ThinkFun. Esta editorial de juegos, creada el 1985 y desde 2017 propiedad de Ravensburger, ha creado varios juegos individuales similares al que hoy presentamos. Además, ha alentado investigaciones sobre el aprendizaje y la inteligencia lógica, y concretamente sobre la investigación de estrategias para la resolución de problemas de tipo lógico.

Otros juegos de ThinkFun son Rush Hour, Zingo!, MathDice, Swich, River Crossing y Rool&Play.

Título	Chocolate Fix (un juego de ThinkFun)
Edad	A partir de 8 años
Jugadores	1 jugador, o un grup colaborativo de 3 o 4.
Tiempo partida	Unos 5 minutos cada nivel.
Resumen	Chocolate Fix es un juego de lógica y resolución de problemas pensado para jugar de manera individual pero que también se puede jugar en pequeño grupo forma cooperativa.

	Hay una libreta con 40 retos y soluciones, una bandeja para colocar los bombones, una bolsa de viaje y 9 bombones, con dos características cada uno que varían en: Forma: triángulo, cuadrado, círculo Color(simula el sabor): marrón (chocolate), amarillo (vainilla) y rosa (fresa) El juego consiste al resolver el reto llenando la bandeja de 3x3 con todos los bombones de la manera correcta. Para conseguirlo habrá que seguir las pistas que encontraremos a cada reto y antes de hacer un movimiento los jugadores tendrán que examinar con detalle todas las pistas de la tarjeta.
Competencias / Habilidades	Con este juego se trabajan habilidades de percepción, ingenio, resolución de problemas y razonamiento lógico, además de la concentración. En los niveles altos hay que hacer uso de conjeturas y deducciones lógicas y matemáticas complejas. Si decidimos jugar de manera cooperativa, el juego nos ayuda a fomentar el razonamiento argumentativo, la comunicación al resto de compañeros y el contraste de ideas
Propuestas didácticas	Este juego, y otros del mismo tipo, a pesar de ser individuales también se pueden llevar al aula. A partir de seleccionar algunas de las situaciones de diferente nivel, se pueden plantear preguntas que posibiliten una conversación matemática para ir más allá. Algunas preguntas útiles: - ¿Podéis encontrar alguna otra solución en el reto? - ¿Si ignoramos una de las informaciones del reto, esto nos aumenta el número de soluciones, o nos lo hace imposible de resolver? - ¿Podéis inventar una situación inicial que no sea fácil de resolver? - ¿De cuántas maneras pueden estar situadas las piezas? - ¿Hay soluciones iguales que vengan de enunciados diferentes? - ¿Podrías encontrar otras condiciones que nos den el mismo resultado?
Tutorial en la red	https://www.youtube.com/watch?v=U8QVTEKgG_M

Este ejemplo ilustra cómo los juegos de mesa pueden enriquecer la enseñanza de las matemáticas en el aula. En nuestros talleres, ofreceremos una amplia selección de juegos adaptados para diversos contenidos y niveles educativos. A través de estas actividades, esperamos inspirar a otros educadores a explorar el potencial de los juegos como herramientas efectivas para el aprendizaje matemático en sus propias aulas.

9. Bibliografía

Badillo, E., Edo, M., Deulofeu, J. (2012). L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes. Noubiaix 31, 29 – 43.

Comas, O. (2021). Un monde de jeux. Volum 1. Paris, YNNIS Editions.

Corbalán, F. (1994). Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Madrid, Síntesis

Corbalán, F. (1996). Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. SUMA 23, 21-32.

Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1998). Los juegos, las matemáticas y su enseñanza. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas. 18. Monográfico: juegos y matemáticas, 5-8.

Deulofeu, J. (2016a). Teoría de juegos. National Geogràfic Partners, LCC.

Deulofeu, J. (2016b). Juegos de mesa para aprender matemáticas. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas. 74. Monográfico: Juegos matemáticos, 7-13

Deulofeu, J. y Torres, E. (2019). Gestiones diferentes en el aula de matemáticas para que los alumnos resuelvan problemas. Actas 19JAEM, La Coruña 2019, 1483-1500.

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J., Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. UNIÓN, 14, 61-75.

Gairín, J.M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. Educar, 17, 105-118.

Gairín, J. y Muñoz, J. M. (2006). Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático. SUMA, 51, 15-29.

García Azcárate, A. (2010). Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: Números y Algebra. Madrid, Aviraneta.

García Azcárate, A. (2013). Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: Geometria. Madrid, Aviraneta.

Guzmán, M. de (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife, 10-14.

Guzmán, M. (1989): Juegos y matemáticas. SUMA, 4, 61-64.

Lorenzo, E., Deulofeu, J. (2021). Analysis and Classification of Inappropriate

Strategies Used by Students to Find the Winning Strategy in Catch the Frog and Daisy Games. En The 11th International Conference on European Transnational Educational: (ICEUTE 2020). Springer, 21-29.

Navarro, A., Deulofeu, J. (2016). Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas 82, 9-17

¿Existe algo mejor que resolver un problema de matemáticas? Si, existe.

Juan Francisco Hernández Rodríguez
Colegio Hispano Inglés Rambla de Santa Cruz, 94 38004 Santa Cruz de Tenerife
juanfisicahzrz@gmail.com

Núcleo temático: Recursos para el aula, Evaluación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

¿Existe algo mejor que resolver un problema de matemáticas?

Si, existe. Un problema de matemáticas que venga asociado a un reto que, además, les vincula con un aprendizaje significativo sobre la identidad cultural que conforman, en el caso de mis alumnos, nuestras islas.

La gamificación que veremos en este tallar puede contribuir a dicho aprendizaje de varias maneras:

Fidelización: el alumno se siente más vinculado al contenido matemático que se está trabajando, cambia su perspectiva ante una expectativa, la recompensa.

Motivación: Si el alumno se siente estimulado por un reto o por alcanzar una meta, participará de forma más activa en su proceso de aprendizaje.

Evaluación: los alumnos pueden ser constantemente evaluados sin que sientan la presión de una evaluación al uso. Quizás sea este último aspecto el más descuidado cuando se realizan procesos de gamificación, pues muchas veces nos centramos en la preparación de la actividad y pocas en la recogida y análisis de datos.

Palabras clave: aprendizaje, reto, matemáticas, motivación.

Introducción / Marco teórico

Nuestras islas son conocidas popularmente como un pedacito del paraíso en la Tierra, situadas en el Océano Atlántico y próximas a la costa africana, son uno de los mejores destinos para aquellos que quieren disfrutar de una naturaleza salvaje, un aire limpio y fresco y unas playas desérticas de ensueño. **Pero hay tanto que descubrir en ellas que las matemáticas son una herramienta ideal para llevarlo a cabo**.

En esta comunicación mostraré como, desde la gamificación en el área de matemáticas, podemos descubrir elementos artísticos, históricos, culturales,.. del entorno que nos rodea. Y también personajes que nos fascinarán con su vida.

Entonces, ¿existe algo mejor que resolver un problema de matemáticas? ***Si, existe***. Un problema de matemáticas que venga asociado a un reto que, además, les vincula con un aprendizaje significativo sobre la identidad cultural que conforman nuestras islas.

La identidad de Canarias es fruto de una historia en la que el Archipiélago ha jugado un papel de puente comercial y también cultural y, por tanto, tiene una riqueza enorme. Sin embargo, este patrimonio(*) ***es desconocido*** por la mayoría de nuestros alumnos y esto se puede ***soslayar***, en gran medida, contextualizando las actividades de matemáticas.

(*)¿Qué entendemos por patrimonio cultural de Canarias? "*el constituido por los bienes muebles, inmuebles, manifestaciones inmateriales de las poblaciones aborígenes de Canarias, de la cultura popular y tradicional, que tengan valor histórico, artístico, arquitectónico, arqueológico, etnográfico, bibliográfico, documental, lingüístico, paisajístico, industrial, científico, técnico o de cualquier otra naturaleza cultural, cualquiera que sea su titularidad y régimen jurídico*." Ley 11/2019 (BOC 13/05/19)

Método de aplicación:

Debemos ser conscientes de que no podemos asociar evaluación con prueba escrita o examen únicamente y tampoco con un único momento del proceso de aprendizaje, normalmente al final.

Si repasamos los tipos de evaluación más extendidos, podemos citar los siguientes:

- Diagnóstica: se produce antes de comenzar el proceso para conocer los puntos débiles y fuertes del estudiante.
- Formativa: se produce durante el proceso. Este tipo de evaluación es muy importante en matemáticas y es necesario que exista retroalimentación para que el alumno aprenda mientras es evaluado.
- Sumativa: se produce al final y mide el rendimiento del alumnado.

En nuestro centro combinamos los diferentes modelos de evaluación con distintos instrumentos para obtener datos valiosos para el análisis del aprendizaje que repercuta en beneficio del alumnado.

La gamificación y la clase invertida en el Colegio Hispano Inglés nos ayudan a obtener esos datos de forma constante sin que el alumno sienta la presión de estar evaluado continuamente.

El concepto gamificación se puede definir como el uso de mecánicas de juego en entornos ajenos al juego y, aunque todavía existen detractores del uso de entornos gamificados en educación, se encuentra ampliamente extendida. En lo que aquí nos ocupa, la gamificación puede contribuir a dicho aprendizaje de varias maneras:

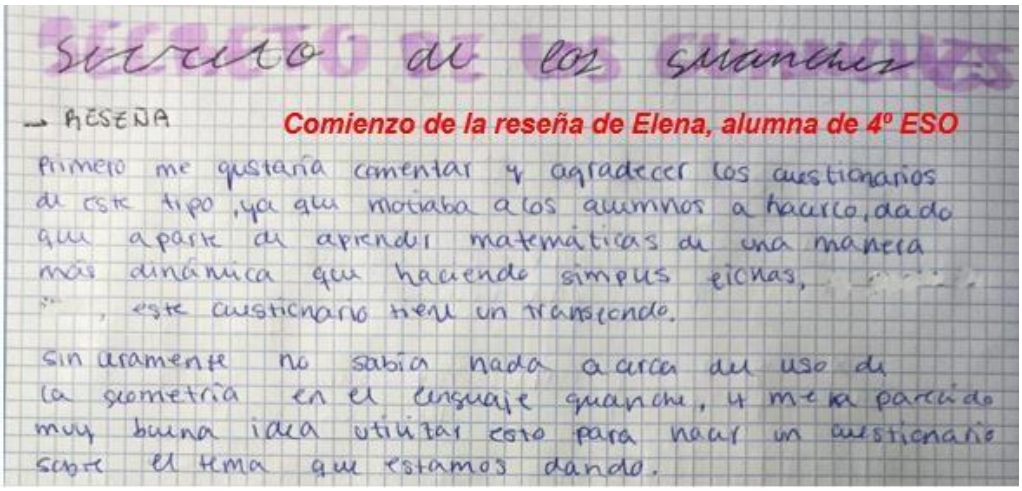
- Fidelización: el alumno se siente más vinculado al contenido matemático que se está trabajando, cambia su perspectiva ante una expectativa, la recompensa.

- Motivación: Si el alumno se siente estimulado por un reto o por alcanzar una meta, participará de forma más activa en su proceso de aprendizaje y, además, es una manera de combatir el aburrimiento.
- Evaluación: los alumnos pueden ser constantemente evaluados sin que sientan la presión de una evaluación al uso. La cantidad de datos útiles que se pueden obtener es enorme.

Quizás sea este último aspecto el más descuidado cuando se realizan procesos de gamificación, pues muchas veces nos centramos en la preparación de la actividad y pocas en la recogida y análisis de datos, casi siempre en entornos virtuales, para mejorar el aprendizaje

Descripción de la experiencia sobre la que va el taller:

Lo que más valoro de este tipo de actividades es que son inclusivas, no en el significado habitual de esta palabra, sino en el sentido de que los distintos saberes se abrazan e implican un ejercicio de aprendizaje más completo e integral para los alumnos. Como ya comenté anteriormente, le sacamos más partido a la enorme riqueza cultural de nuestro entorno y nuestros alumnos se ven imbuidos por ella.



Secreto de los guanches

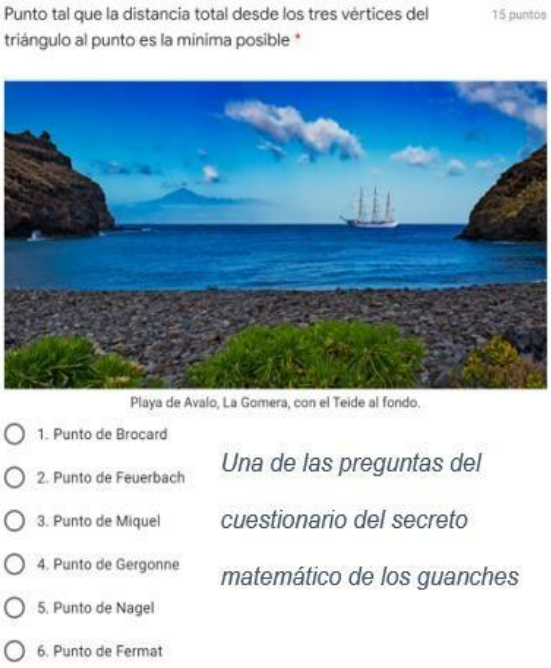
→ RESEÑA

Comienzo de la reseña de Elena, alumna de 4º ESO

Primero me gustaría comentar y agradecer los cuestionarios de este tipo, ya que motivaba a los alumnos a hacerlo, dado que aparte de aprendar matemáticas de una manera más dinámica que haciendo simples fichas, ... este cuestionario tiene un transfondo.

Sinceramente no sabía nada acerca del uso de la geometría en el lenguaje guanche, y me ha parecido muy buena idea utilizar esto para hacer un cuestionario sobre el tema que estamos dando.

Es evidente que preparar estas actividades conlleva ser muy cuidadoso. Por un lado, no soy un experto en las distintas materias que aparecen y, por otro, debo documentarme bien y ser riguroso a la hora de plantearla. Además, hay que unir la seriedad en el planteamiento de la actividad con la amenidad. Factores que no siempre conviven bien. Quiero decir con esto que estas dinámicas llevan tiempo, mucho tiempo, dedicado a:



Punto tal que la distancia total desde los tres vértices del triángulo al punto es la mínima posible * 15 puntos

Playa de Avalo, La Gomera, con el Teide al fondo.

1. Punto de Brocard
2. Punto de Feuerbach
3. Punto de Miquel
4. Punto de Gergonne
5. Punto de Nagel
6. Punto de Fermat

Una de las preguntas del cuestionario del secreto matemático de los guanches

–Elegir el tema a tratar.
–Elegir las actividades de matemáticas.
–Plantear el reto.
–Comprobar que les resultará atractivo
–Buscar los instrumentos de evaluación apropiados.

Pero, desde luego, valen la pena. Este aprendizaje entronca con la metodología activa basada en retos o desafíos. Y un alumno nunca dice no a un reto y propicia en ellos una actitud crítica, reflexiva, estimula su curiosidad y el estudio del entorno que nos rodea. *Así lo acreditan los alumnos a través del cuestionario anónimo que les envié*

Resultados

En esta comunicación pretendo mostrar cómo procedo para que mis alumnos conozcan, a través de las matemáticas, la riqueza cultural de nuestras islas. Y la mejor manera de exponerlo es viendo algunos ejemplos reales de lo que hacemos en el aula (mostraré uno aquí y del resto pondré los enlaces a mi blog):

Ejemplo 01: *El secreto matemático de los guanches*

Reto: Descubrir el gran secreto matemático que los habitantes nativos de Gran Canaria poseían.

Bloque matemático trabajado: Geometría. Concretamente, las rectas notables más conocidas de un triángulo: mediatrices, medianas, alturas y bisectrices; Y, sus puntos notables asociados: el circuncentro, el baricentro, el ortocentro, el incentro y algunos otros no tan conocidos como el punto de Fermat,

Recurso utilizado: Cuestionario de Google Classroom autoevaluables con preciosas imágenes de nuestras islas. Los números de los

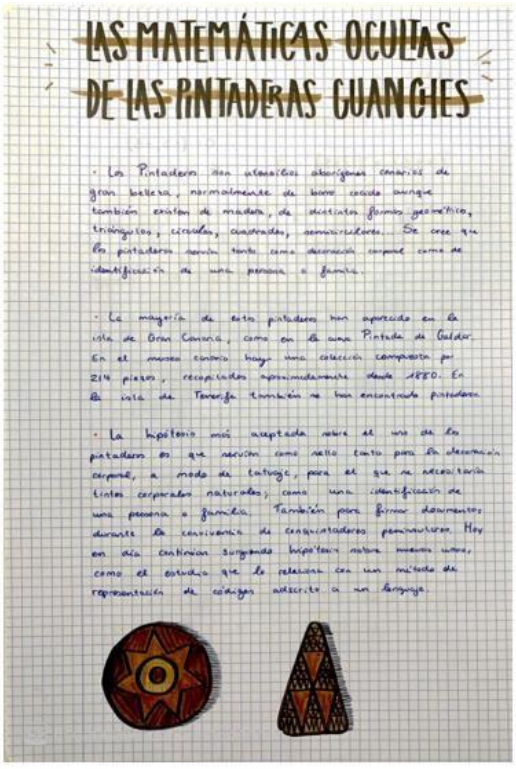
LAS MATEMÁTICAS OCULTAS DE LAS PINTADERAS GUANCHES

Los habitantes nativos de Gran Canaria emplearon un lenguaje geométrico basado en triángulos, rectángulos, cuadrados, círculos etc. El profundo significado de estos símbolos presentes en la cotidianidad de la vida guanche no ha llegado a desvelarse aún y sorprende la cantidad y variedad de motivos fabricados. Son las llamadas "pintaderas".

Los motivos geométricos se han encontrado también en las paredes interiores de muchas cuevas, de las que el caso más significativo es el de la "Cueva Pintada de Gáldar".

Cueva Pintada de Gáldar

Contenido del pdf encriptado


LAS MATEMÁTICAS OCULTAS DE LAS PINTADERAS GUANCHES

Reseña de Ángel, uno de los alumnos.

apartados correctos de cada pregunta planteada son los dígitos que abre el pdf con el gran arcano.

Contenido relacionado con nuestras islas: Los alumnos al abrir el pdf descubren que los canarios emplearon un lenguaje geométrico basado en triángulos, rectángulos,

cuadrados, círculos,.. llamadas “pintaderas guanches”

Evidencias del trabajo de los alumnos: Además de resolver el cuestionario, tenían que mostrar una reseña de su puño y letra sobre las pintaderas.

Pongo los enlaces a mi blog de otras actividades realizadas dentro de este proyecto:

Ejemplo 02: *El enigma de Agustín de Betancourt*

Ejemplo 03: *El tesoro de Amaro Pargo*

Ejemplo 04: *El lugar más importante de la historia de Tenerife*.

Ejemplo 05: *Ídolo de Tara con Geogebra*

Ejemplo 06: *Sólo J. N. L*.

Ejemplo 07: *El lugar más místico*

Ejemplo 08: *Ilustre tinerfeño en Las Palmas*

Ejemplo 09: *El secreto de Blas Cabrera*

Ejemplo 10: *Homenaje a Don Luis Balbuena*

Ejemplo 11: *Homenaje a Don Juan Arencibia de Torres*

Conclusiones

Encuesta: Realizada de forma anónima sobre los 56 alumnos que conformaban el bachillerato de ciencias y a la que respondieron 34 de ellos.

Indicadores: Respondían siguiendo una escala lineal en la que 0 significaba “Para nada” y 5 “Mucho” a las siguientes preguntas (el * implica que era una pregunta obligatoria). Ejemplos:

Pueden ver el cuestionario *pinchando aquí.*

Pueden ver el Excel con las respuestas *pinchando aquí.*

Ejemplo:

Añade, si lo estimas oportuno, algún comentario o sugerencia que ayude a mejorar esta práctica educativa. ¡Muchas gracias! 11 respuestas

Usted es de los pocos profesores que de verdad aman dar clase, le animo a que continúe así durante el resto de su carrera. ¡Ánimo!

Me han parecido actividades muy entretenidas y originales.

Actividades creativas y q mejoran el trabajo en clase

Han sido todas actividades muy amenas y divertidas que hacen que den ganas aprender, tanto matemáticas como cosas de Canarias.

Me han gustado muchísimo las actividades y considero que he invertido bien mi tiempo realizándolas

¡Enhorabuena!, me han encantado

Me ha gustado mucho las actividades dinámicas que hemos realizado a lo largo del curso, le felicito por haber puesto tanto empeño en prepararlas, estoy muy agradecida de ella.

Me han encantado las actividades

¡Muchas gracias por estas propuestas tan atractivas!

Son todas bastante divertidas y didácticas

Referencias

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (mayo, 2020). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de *https://www.estonoentraenelexamen.com/ :*

https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/05/29/el-secreto-matematico-de-losguanches/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (noviembre, 2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de *https://www.estonoentraenelexamen.com/ :*

https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/11/20/el-enigma-de-agustin-debetancourt/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (noviembre, 2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/11/15/el-tesoro-de-amaro-pargo/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (septiembre, 2020). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/09/28/%ea%a7%81%e0%bc%92ellugar-mas-importante-de-la-historia-de-tenerife%e0%bc%92%ea%a7%82/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (diciembre, 2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/12/11/idolo-de-tara-con-geogebra/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (enero, 2020). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/01/09/el-secreto-de-blas-cabrera/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (enero, 2020). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/01/29/cm-x-6-homenaje-a-don-luisbalbuena/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (enero, 2020). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/01/16/en-homenaje-a-don-juanarencibia-de-torres/

La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas en su revista Números del mes de noviembre 2021 se hizo eco, con la publicación de un extenso monográfico, de esta forma de trabajar las matemáticas:

https://drive.google.com/file/d/1NlEpmckzz90ZmrQ2gSZ29uqZ-ZN1WNGn/view

Referencia en la web sobre mi blog:

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2023). Santa Cruz de Tenerife. https://www.estonoentraenelexamen.com/ http://www.estosientraenelexamen.com/ YouTube

Materiales publicados en abierto en la siguiente clase de Classroom:

https://classroom.google.com/c/MTI4Nzk4NDExMzE0?cjc=p4uie3k en

la que hay registrados más de 1000 profesores

Resolución de problemas en Bachillerato y ESO con GeoGebra

Abel Ruyman Expósito Soto
ruymane@gmail.com
IES Mencey Acaymo

Nicolás Gómez Castro
ngomcas@gmail.com
IES Mencey Acaymo

Núcleo temático: Comunicación y divulgación, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

En esta comunicación se expondrán varias prácticas y exámenes que se han trabajado con el alumnado de 1º y 2º de Bachillerato utilizando GeoGebra. En general, las prácticas consisten en grabar un vídeo de unos 4 minutos de duración mostrando la resolución de un problema tipo PAU con la aplicación. En algunas prácticas el alumnado tiene un pequeño tutorial y en otras solamente las indicaciones de los pasos que debe seguir. Se pretende con ello trabajar y evaluar la parte del currículo donde el alumnado debe producir, representar y comunicar conceptos, procedimientos, información e ideas matemáticas de manera individual o en grupo. También se expondrán algunos trabajos similares realizados en 3º ESO.

Palabras clave: Resolución de problemas, GeoGebra, comunicación, TIC, Bachillerato.

1.- Encaje curricular

Las anteriores leyes educativas ya apostaban por la introducción de las TIC en el currículo de Matemáticas. La LOMCE introducía un criterio de evaluación especifico para las TIC y la LOMLOE da un paso más nombrándolas en todas las competencias específicas y en la mayoría de los criterios de evaluación. Además, se hace especial hincapié en que el alumnado debe producir, representar y comunicar conceptos, procedimientos, información e ideas matemáticas de manera individual o en grupo.

Ejemplos (LOMLOE, 2022):

C.1.1. Manejar diferentes estrategias y herramientas, incluidas las digitales, valorando su eficiencia encada caso, buscando un cambio de estrategia, cuando sea necesario, y reflexionando sobre el proceso realizado para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones y modelizar problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología.

C.1.2. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas con autonomía y actitud cooperativa, describiendo el procedimiento realizado, utilizando, si fuera necesario, tecnologías digitales, con el fin de resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología.

C.2.2. Seleccionar la solución más adecuada de un problema en función del contexto usando el razonamiento y la argumentación con actitud respetuosa, y con la ayuda de tecnologías digitales, para contrastar su idoneidad y desarrollar el espíritu crítico y emprendedor.

C.4.1. Modificar y crear algoritmos utilizando la abstracción para identificar los aspectos más relevantes, descomponiendo el problema en tareas más simples que se puedan codificar en un lenguaje apropiado y seleccionando las tecnologías más adecuadas para interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología.

C.5.2. Resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, utilizando tecnologías digitales si fuera preciso, para generar una visión integrada de las matemáticas.

C.7.1. Representar conceptos, procedimientos e información matemática activando y organizando conocimientos, de manera manual o digital, utilizando la tecnología más adecuada, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

C.8.1. Mostrar organización y comprensión al comunicar hechos, ideas, conceptos y procedimientos de forma verbal, analítica y gráficamente, de manera individual y colectiva, con la terminología y el rigor apropiados, empleando o creando contenidos digitales en diversos medios y soportes para dotar de significado y consolidar los aprendizajes.

C.9.3. Participar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones, experiencias y diversidad de los demás y escuchando su razonamiento, aplicando las habilidades sociales más propicias, rechazando todo tipo de discriminación y violencia, promoviendo activamente la igualdad y corresponsabilidad efectiva entre mujeres y hombres, y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables, para responsabilizarse del rol asignado y de su contribución al grupo y normalizar situaciones de convivencia en igualdad.

2.- Propuesta docente

Para evaluar estos aspectos planteamos una serie de prácticas y exámenes a lo largo de todo el curso, tanto en 1º como en 2º de Bachillerato. Las prácticas consisten en un pequeño tutorial que se entrega al alumnado donde se van explicando los diferentes pasos que debe ir realizando para poder resolver el problema que se les va a plantear. Al final de la misma se detalla el que deben resolver (normalmente en parejas) la duración máxima del vídeo que han de entregar y los aspectos evaluables más relevantes. También se realizaron varios exámenes en el Aula de Informática

donde el alumnado tenía que resolver problemas utilizando solamente GeoGebra. Todas las herramientas y conocimientos de esta aplicación necesarios se iban trabajando durante la resolución de problemas en clase de manera simultánea.

3.- Resumen de trabajos realizados

A continuación se presentan los trabajos planteados al alumnado:

Prácticas 1º Bachillerato

- Resolución de un sistema 3x3 usando una hoja de cálculo. Comprobación en GeoGebra con la representación en 3D y usando el CAS.
- Examen de geometría analítica en GeoGebra.
- Examen de estudio de funciones con GeoGebra.
- La factura del agua. Estudio de funciones a trozos con GeoGebra.
- Nota de prensa.

Prácticas 2º Bachillerato

- Estudio de continuidad y derivabilidad de una función a trozos con parámetros.
- Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones 3x3 con parámetros. Representación de las distintas soluciones.
- Estudio de la posición relativa de rectas y planos en el espacio. Resolución por construcción de un problema de geometría analítica en 3D.

Prácticas 3º ESO

- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con GeoGebra.
- Resolución de sistemas de ecuaciones con GeoGebra.
- Resolución de problemas de funciones EBAU con GeoGebra.

4.- Ejemplo

Se presenta a continuación una de las prácticas que se han propuesto para 2º de Bachillerato:

En esta práctica tendrás que resolver y discutir un sistema de ecuaciones con parámetros utilizando GeoGebra.

En este caso no les vamos a poner las instrucciones perfectamente detalladas como siempre. Tendrán que resolverlo siguiendo los mismos pasos que hacemos en clase, pero utilizando la "tecnología". Por tanto, las justificaciones y explicaciones deben ser las mismas que si lo hicieran a mano.

Las herramientas que necesitamos utilizar ya las conocen de otros años o las iremos viendo en clase a medida que avance el tema. También se pueden adelantar y buscar algún vídeo tutorial.

Los pasos recomendados son:

- Introducir la matriz A sustituyendo el parámetro por "x".
- Calcular el determinante.
- Representar gráficamente la expresión algebraica que obtenemos en el determinante.
- Obtener los ceros de dicha expresión gráficamente (soluciones de la ecuación).

Estudiar detalladamente todos los posibles casos que se nos dan:

- Crear un deslizador.
- Introducir la matriz A sustituyendo el parámetro por el deslizador.
- Introducir la matriz A* (matriz ampliada) sustituyendo el parámetro por el deslizador.
- Estudiar el rango para los diferentes valores del deslizador que sea necesario. Importante explicar en cada caso las conclusiones.
- Elige un valor del parámetro para el que el sistema sea compatible determinado y calcula su solución.

Representar el sistema en el gráfico en 3D para poder observar que el estudio analítico que corresponde con el geométrico, en todos los casos estudiados.

Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones 3x3 con parámetros. Representación de las distintas soluciones.

Durante la presentación se expondrán algunos vídeos extraídos de las tareas del propio alumnado.

5.- Conclusiones

Por último, al final de curso de 2º de Bachillerato, se pasó al alumnado un pequeño cuestionario para conocer su opinión sobre la herramienta y los trabajos realizados.

Estas son las conclusiones más relevantes:

- El 61% del alumnado manifiesta que usa la herramienta GeoGebra en casa o en clase para comprender y resolver mejor los problemas.
- En referencia a cómo les ha ayudado el uso del GeoGebra en clase a comprender mejor la materia, valorando de 0 a 10, siendo 0 “nada” y 10 “mucho”, la media ha sido de 6,87 puntos, por lo que podemos entender que resulta beneficioso.
- También se les preguntó sobre su comodidad y preferencia a la hora de comunicar oralmente estos procesos para ser evaluados. Un 67%, comenta que prefiere hacerlo a través de vídeos que directamente en el aula.

Por tanto, basándonos en esta experiencia, concluimos que es posible integrar las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en niveles superiores como Bachillerato. Asimismo, nos permite evaluar de manera eficaz y con evidencias claras algunos aspectos que tal vez de otra forma se podrían quedar atrás, sobre todo con alumnado más tímido que interviene poco en el aula. También hemos constatado que el uso habitual de esta herramienta, aunque solo sea como apoyo visual, facilita al alumnado la comprensión de ideas y conceptos matemáticos encontrando la relación entre lo geométrico y lo analítico.

6.- Bibliografía

LOMLOE: Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Matemáticas de verdad para mejorar la percepción pública de las Matemáticas

Nicolás Atanes Santos
nicatasan@gmail.com
Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Comunicación y divulgación. Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato[33] y Universidad.

RESUMEN

En un esfuerzo por transformar la manera en que se enseñan y perciben las matemáticas, surge el enfoque innovador de las Matemáticas de verdad. Este enfoque busca revelar el porqué de los conceptos matemáticos de la misma manera en que lo haría un matemático en su investigación. Se fundamenta en promover el razonamiento crítico y el descubrimiento mediante la exploración activa de patrones y la investigación creativa.

El objetivo principal de las Matemáticas de verdad es mejorar la percepción pública de las matemáticas, mostrando a los estudiantes que éstas son mucho más que simples procedimientos y fórmulas. Busca demostrar la utilidad, importancia y necesidad intrínseca de las matemáticas en la vida cotidiana y en el desarrollo intelectual. Al promover este enfoque, se aspira a cultivar una actitud positiva hacia las matemáticas, inspirando curiosidad y confianza en los estudiantes para abordar desafíos matemáticos con entusiasmo y rigor,

[33] especialmente pero no únicamente

consiguiendo que los estudiantes vean que las matemáticas son útiles, importantes y necesarias.

Esta comunicación explorará cómo hacer divulgación de las Matemáticas de verdad puede transformar la educación matemática y contribuir a una percepción más precisa y apreciativa de esta disciplina fundamental en nuestra Sociedad

Palabras clave: divulgación de las matemáticas, matemáticas de verdad, razonamiento crítico.

1. Enseñanza de las demostraciones en el aula: ESO y Bachillerato

Insertar en el currículo las demostraciones consigue acercar el método del matemático a los estudiantes. A continuación, se presentan ejemplos concretos de cómo este enfoque puede aplicarse a conceptos clave:

1.2 Irracionalidad de la raíz cuadrada de 2

La demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 es un ejemplo de reducción al absurdo que utiliza la hipótesis de que es racional, para llegar a un contraejemplo, en este caso de que p y q son ambos pares, y por tanto la fracción original de raíz cuadrada de 2 reducible, lo cual se había supuesto que no. Esto se llega una vez que se manipula la expresión matemática $p^2 = 2\,q^2$.

1.3 Suma de términos de una progresión aritmética

La demostración de la suma de términos de una progresión aritmética, aplicado al tema de progresiones aritméticas y geométricas, utiliza inducción matemática para demostrarse. Es importante enseñar a encontrar el patrón, el qué ocurre en los primeros casos, al ver qué le ocurre al siguiente caso a partir del anterior. Por ejemplo, en la suma infinita cuyos términos son $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

para sumar los 100 primeros términos, se puede recurrir al método de Gauss: sumar el primer y el último término es igual que el segundo término y el penúltimo, que el tercero y el antepenúltimo… y así sucesivamente hasta emparejar nuevamente el último con el primer término. Y como lo hemos contado dos veces, pues dividir todo entre dos.

Al dejar pensar e investigar, se refuerza la idea de que las matemáticas pueden pensarse, se enseña que las matemáticas han estado presente en un proceso histórico, y que la fórmula matemática tiene un porqué, alejado de las cuentas a mano, y cercanas al razonamiento creativo y bello.

Mediante la búsqueda activa de patrones y la deducción de conclusiones a partir de datos observados, los estudiantes no sólo resuelven problemas matemáticos, sino que también desarrollan habilidades analíticas y creativas. Este enfoque busca enseñar a los estudiantes para que se conviertan en investigadores matemáticos auténticos, capaces de enfrentar desafíos con mucha confianza y entusiasmo.

2 . Utilización de Problemas de Olimpiada Matemática

La incorporación de problemas de Olimpiada Matemática en el currículo educativo representa una estrategia fundamental para preparar a los estudiantes hacia las Matemáticas de verdad. A continuación, se destacan los beneficios y enfoques clave al utilizar este tipo de problemas:

Los problemas de Olimpiada Matemática están diseñados para desafiar a los estudiantes a pensar de manera crítica y creativa, desarrollando habilidades de razonamiento profundo en lugar de simplemente fomentar la repetición mecánica de conceptos. Esta preparación avanzada no solo ayuda a los estudiantes a enfrentar desafíos académicos futuros en la universidad, sino que también fortalece sus habilidades analíticas y resolutivas, esenciales para la resolución de problemas matemáticos complejos.

Además, al abordar problemas de Olimpiada Matemática, los estudiantes son alentados a comprender profundamente los principios y métodos subyacentes en lugar de aplicar procedimientos mecánicos sin entender su significado. Este enfoque promueve una comprensión auténtica del funcionamiento de las matemáticas, demostrando su utilidad y relevancia en situaciones del mundo real. Los problemas desafiantes de la Olimpiada Matemática motivan a los estudiantes a explorar conceptos matemáticos de manera más completa y a apreciar la belleza y elegancia inherentes a la disciplina.

Al integrar problemas de Olimpiada Matemática en el aula, los educadores contribuyen significativamente a la formación de estudiantes con habilidades matemáticas sólidas y una mentalidad orientada al descubrimiento y la exploración.

Además, se puede motivar al uso de GeoGebra, una herramienta interactiva ampliamente utilizada en educación matemática, para visualizar y manipular representaciones gráficas de conceptos abstractos. Mediante el uso de GeoGebra, los estudiantes pueden explorar casos específicos, identificar patrones y descubrir propiedades matemáticas de manera dinámica.

3. Divulgación de las Matemáticas de verdad para mejorar la Percepción pública de las Matemáticas

El enfoque de Matemáticas de Verdad busca transformar la percepción tradicional de las matemáticas, destacando su profundidad y relevancia más allá de simples cálculos numéricos.

Es fundamental enfatizar que las matemáticas involucran la formulación de reglas generales que gobiernan patrones y fenómenos en el mundo natural y abstracto. Además, las matemáticas son un campo de estudio basado en pruebas lógicas y deductivas, lo que permite la validación de teoremas y conclusiones matemáticas. Al abordar las matemáticas desde esta perspectiva,

se destaca su riqueza conceptual y su capacidad para modelar y resolver problemas complejos en diversos contextos.

La enseñanza de las Matemáticas de verdad busca eliminar el estigma asociado con cometer errores en matemáticas, principalmente porque se elimina la respuesta única correcta. Los cálculos siguen siendo una parte importante y necesaria, pero es importante comunicar que las matemáticas requieren de la búsqueda de soluciones elegantes y rigurosas, enfatizando la importancia del razonamiento claro y la argumentación en matemáticas. Esta mentalidad permite comprender las matemáticas como un reto, con teoremas, enunciados, problemas, que tienen un motivo por el cual funcionan. Se promueven unas matemáticas basadas en la exploración de problemas desafiantes que requieren análisis profundos y enfoques innovadores, en contraste con problemas mecánicos que simplemente exigen aplicar fórmulas memorizadas.

4 . Conclusión

En conclusión, la implementación del enfoque de "Matemáticas de Verdad" ofrece una perspectiva renovada y enriquecedora para la enseñanza y divulgación de las matemáticas, como se ha discutido a lo largo de esta comunicación.

Hemos destacado la importancia de adoptar Matemáticas de verdad como un método para promover una comprensión más profunda y significativa de las matemáticas. Este enfoque no solo involucra la enseñanza de conceptos matemáticos, sino que también promueve el razonamiento crítico, la resolución de problemas y la exploración activa de patrones y estructuras matemáticas.

Es esencial reconocer cómo la divulgación de las matemáticas puede contribuir a mejorar la percepción pública de esta disciplina. Al presentar desafíos y juegos intelectuales que muestran la aplicación práctica y la belleza inherente de las matemáticas, podemos inspirar un mayor interés y aprecio por esta área del conocimiento.

Por último, hacemos un llamado a la acción para que educadores, divulgadores y la sociedad en general se unan en el esfuerzo de promover una mejor comprensión y aprecio de las matemáticas. La creatividad, la elegancia y la utilidad de las matemáticas son fundamentales para crear una cultura que fomente la curiosidad y el aprendizaje continuo en todos los aspectos de la vida.

Referencias

1. Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics* . Cambridge: Cambridge University Press.
2. Alfeld, P. (1996). *Why is the square root of 2 irrational?* . Department of Mathematics, University of Utah.
3. M. Wilburne, Jane. (10 de octubre de 2014). *The Story of Gauss* . National Council of Teachers of Mathematics.

Geogebra como herramienta de investigación en los proyectos del Bachillerato de Excelencia

Autor/a: *Irene Tuset Relaño*
mail@autor/a: irene.tuset@educa.madrid.org
Institución/Centro de referencia: *IES Pintor Antonio López, Tres Cantos, Madrid*

Núcleo temático: Conexiones

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

Tras cuatro años como tutora de proyectos en el programa del Bachillerato de Excelencia de la Comunidad de Madrid, he tenido la oportunidad de compartir con mis alumnos apasionantes investigaciones de naturaleza muy diversa (arquitectura, sistemas electorales, cartografía, redes de distribución, modelización del lanzamiento de satélites, estudio de las trayectorias de las galaxias…). En la gran mayoría de estos proyectos de investigación el programa Geogebra ha supuesto una pieza crucial en el desarrollo de su metodología y en los resultados obtenidos. En esta comunicación se mostrará cómo enseñar durante la E.S.O. y el bachillerato las posibilidades de Geogebra y su manejo ha tenido como resultado que los alumnos utilicen el programa de manera natural y creativa en investigaciones de orden superior obteniendo significativos logros.

Palabras clave: Bachillerato, excelencia, proyectos, Geogebra.

1. Los proyectos del Bachillerato de Excelencia

Tal y como establece el *decreto 63/2012 de la Comunidad de Madrid*, el Programa de Excelencia en Bachillerato está destinado a los alumnos que finalicen la Educación Secundaria Obligatoria con un buen expediente académico y que deseen cursar el Bachillerato con un alto nivel de exigencia. Los alumnos que deseen incorporarse al Programa deberán acreditar haber concurrido a las pruebas de los premios extraordinarios de Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Madrid, o bien deberán acreditar haber obtenido en las materias de Lengua Castellana y Literatura, primera Lengua Extranjera, Ciencias Sociales, Geografía e Historia y Matemáticas de cuarto de la Educación Secundaria Obligatoria una nota media igual o superior a 8. Cursarán una hora más de matemáticas tanto en 1º de bachillerato como en 2º de bachillerato. Contemplará la organización de actividades, cursos o seminarios de profundización en las distintas materias que componen el plan de estudios. Los alumnos que cursen el Programa de Excelencia realizarán un proyecto de investigación que podrá subirles hasta un punto en su expediente de 2º de bachillerato.

En el I.E.S. Pintor Antonio López de Tres Cantos en Madrid, ofertamos un aula de bachillerato de excelencia en la modalidad de ciencias. Como profesora de matemáticas del programa, he solicitado al centro utilizar esa hora extra para tener dos sesiones de matemáticas continuadas un día a la semana. Gracias a esta disposición horaria he podido desarrollar con mis alumnos investigaciones, talleres de problemas y trabajos que han tenido el programa Geogebra como elemento esencial. Mis estudiantes han tenido por tanto la oportunidad de aprender a utilizar el programa Geogebra alcanzando un nivel medio que incluye el uso de diferentes ventanas, deslizadores, botones, listas, secuencias y pequeñas programaciones. Han desarrollado trabajos de modelización y de investigación dentro del campo de la geometría, el análisis, la estadística, la probabilidad o el álgebra. El programa Geogebra forma por tanto parte del proceso de aprendizaje y lo utilizan de manera autónoma para comprobar sus resultados o comprender mejor los nuevos conceptos.

Además, no sólo lo utilizan en el campo de las matemáticas sino también cuando estudian dibujo, física o química.

Todo ello ha supuesto que a la hora de desarrollar el proyecto de investigación del Bachillerato de Excelencia, trabajo de gran extensión y profundidad similar a un TFG, de forma espontánea y natural han recurrido al programa para realizar sus proyectos tal y como se muestra a continuación.

2. ¿Dónde estamos capitán Magallanes?: Proyecto de Excelencia de Andrea Olivares (2024)

Cuando Andrea me propuso que le dirigiera un proyecto de investigación sobre las matemáticas en la primera vuelta al mundo no imaginé lo fascinante que sería el viaje en el que nos estábamos embarcando. Andrea quería saber exactamente cómo fue posible que este grupo de hombres hubiese sido capaz de orientarse en el mar y poder realizar la primera circunnavegación con todas las carencias instrumentales de la época, una cartografía poco desarrollada e incompleta y sin un método para determinar la longitud de su posición durante la travesía. Ningún texto que se conozca hoy envía explica exactamente ni cómo ni quién realiza estos cálculos a bordo, ya que en aquella época esa información era considerada un secreto de estado y nunca se debía permitir que los registros de las trayectorias cayesen en manos enemigas. Por este motivo Andrea se lanzó a realizar esta investigación, mitad histórica, mitad matemática, para conocer exactamente cómo hicieron aquellos marineros posible esta gran hazaña.

El objetivo fundamental de esta investigación era comprender la manera en la que los navegantes de la expedición de la primera vuelta al mundo pudieron determinar en cada momento su posición (latitud y longitud), el rumbo que debían tomar, situarse sobre las cartas náuticas de la época y cómo influyeron finalmente estas expediciones en la cartografía de la época. Teniendo en cuenta que en el siglo XVI no se conocían aún las proyecciones cartográficas actuales que permiten calcular la posición y las distancias de forma precisa (Mercator), uno de los objetivos fue por tanto comprender

qué técnicas se utilizaban. Todo esto, con el fin de recrear digitalmente la trayectoria que siguieron día a día y construir una gráfica espacio-tiempo (no se había realizado nunca hasta la fecha) a partir de los datos originales de la travesía recogidos en el derrotero de Don Francisco de Albo (quien redactó durante la travesía día a día los datos técnicos como la altura del sol a mediodía y el rumbo tomado), realizando los mismos cálculos con los que conjeturamos pudieron hacerlo entonces.

Andrea comienza esta investigación analizando el contexto histórico y los hechos que tuvieron lugar durante la travesía. En segundo lugar, realiza una búsqueda de las obras matemáticas y cartográficas publicadas en esa época para valorar los conocimientos científicos que podían tener los navegantes de la expedición. Estas obras, *De triangulis Omnimodis* escrita por el alemán Johann Müller Regiomontano[34] alrededor de 1464 y *Suma de Geographia*, publicada en 1519 y escrita por el Bachiller Martín Fernández de Enciso[35], dejan de manifiesto que no se conocía aún un método realmente efectivo para calcular la longitud de la posición (no disponían de métodos eficaces para medir el tiempo de forma precisa aún), pero sí existían en la época tablas de senos y el suficiente conocimiento de trigonometría plana y esférica como para realizar cálculos bastante precisos y sabían calcular la latitud con las tablas de declinación del sol. Sin embargo, dado que a bordo de las naves no se encontraban ni ábacos para realizar cálculos complejos ni tablas de senos, se deduce que el procedimiento debía ser simple y sintético, realizando cálculos gráficos sobre las cartas con sencillos cálculos numéricos. Además, la elevada tasa de mortalidad entre los marineros, provocaba que la persona encargada de realizar los cálculos y las estimas tuviera que ser reemplazada con relativa frecuencia por lo que la metodología no debía requerir grandes conocimientos y tenía que poder adquirirse tras un sencillo adiestramiento (partieron de Sevilla 239 hombres en cuatro barcos el 10 de agosto de 1519 y regresaron tan sólo 18 marineros en una sola nave, la nao Victoria).

[34] Johann Müller Regiomontano: astrónomo y matemático del siglo XV, destaca principalmente por sus investigaciones sobre la trigonometría aplicada a la astronomía.

[35] Bachiller Martin Fernández de Enciso: conquistador y geógrafo sevillano que trabajó para la Casa de Contratación de Sevilla (1469-1533).

Respecto a los instrumentos marítimos reportados, se utilizaban la ballestina, el cuadrante y sobre todo el astrolabio para medir la altura del sol. La brújula para medir los rumbos y el compás para trabajar sobre las cartas naúticas. La velocidad de crucero la estimaban con poca precisión lanzando una cuerda con nudos y midiendo con relojes de arena el tiempo que transcurría entre un nudo y otro (de ahí que la velocidad marítima se midiese en nudos).

Con estos datos Andrea deduce que el procedimiento que seguían era el siguiente:

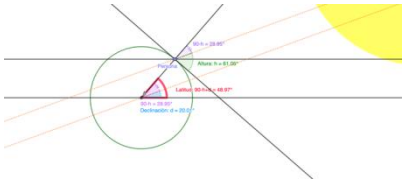


Ilustración 1 : Cálculo de la latitud (Andrea Olivares)

1º. Se mide con el astrolabio la altura de sol a mediodía y con las fórmulas que se describen a continuación y las tablas de regimiento del sol (donde se registraba la altura del sol medida en grados en todas las latitudes hasta entonces conocidas) se calcula la latitud en la que se encontraban.

$l = 90 - z + d$ (hemisferio norte)
$l = 90 - z - d$ (hemisferio sur)

$l =$ *latitud*
$d =$ *declinación del Sol*
$z =$ *altura*

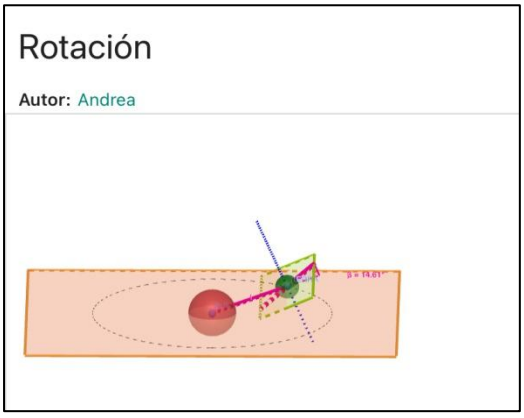


Ilustración 2: Imagen modelización trayectoria terrestre y declinación (Andrea olivares)

Para poder entenderlo y explicarlo en su presentación Andrea realiza la siguiente modelización y dibujos con GeoGebra.

Ilustración 3: QR modelización Geogebra traslación terrestre y declinación (Andrea Olivares)

2º. Dado que no eran capaces de calcular la longitud, lo que suponemos que hacían para determinar su posición era construir con el compás triángulos rectángulos a partir

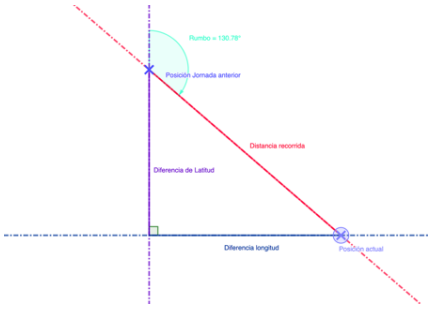


Ilustración 4: Metodología del cálculo de la longitud siglo XVI (Andrea Olivares)

del rumbo de ese día y la diferencia de latitud en cada jornada tal y como Andrea muestra en la siguiente figura.

3º. Por último, ponían una gota de cera sobre la carta náutica con su posición actual para calcular la de la jornada siguiente pero la quitaban en cuanto ya no les era necesaria por si eran atacados (a esta actuación la denominaban “echar el punto”).

Ilustración 5: Puntos de referencia en las cartas planas (Andrea Olivares)

Las cartas náuticas empleadas en la travesía no eran conformes y carecían de escalas. Eran cartas planas, *arrumbadas y* portulanas, es decir, se regían por la sucesión de puertos en los contornos continentales y tenían como referencia rosas de los vientos dispuestas sobre grandes circunferencias (una o dos) desde las que partían radios que marcaban los rumbos como se muestra en la figura. Su principal función era por tanto orientar a los marineros sobre los rumbos a tomar según el destino final. Sin embargo estas cartas, al no tener en cuenta la esfericidad de la Tierra, resultaban poco eficaces en latitudes alejadas del ecuador a este respecto y, desde luego, no resultan eficientes para calcular las distancias recorridas ni las superficies delimitadas.

Con los datos originales, Andrea realiza un arduo trabajo en excel de transformación de unidades y de aproximación de estimas (no todos los días se podía registrar la altura del sol por la climatología) hasta lograr tener bien ordenados los rumbos y latitudes de los 952 días que se registraron en el derrotero de Albo. Con dichos datos y utilizando el programa Geogebra, emula el método sintético relatado anteriormente para construir una línea poligonal por jornadas de viaje obteniendo una modelización de la trayectoria aproximada que siguieron las naos muy similar a la que pudieron

realizar Magallanes y Elcano en su día. Al superponer está poligonal sobre las cartas de la época sorprende enormemente cómo encaja la gráfica en los accidentes y perfiles del mapa. Hay que tener en cuenta que estas cartas no eran conformes, no conservaban ni las distancias, ni los ángulos ni las áreas. Todo hace suponer que eran creadas por un método mixto de la triangulación en las zonas continentales y el encaje en los océanos de las masas de tierra según los datos obtenidos en las travesías marinas con la metodología mencionada anteriormente.

Llama la atención la eficacia de esta sencilla metodología para los intereses marítimos de la época.

Esta hipótesis se muestra fuertemente avalada por el hecho de la coincidencia de nuestra poligonal con el mapa y por el hecho de que en las cartas inmediatamente posteriores los accidentes geográficos encajan mejor en la travesía de la primera circunnavegación. Que una alumna de diecisiete años haya podido realizar este hallazgo es realmente admirable.

Ilustración 6: Dibujo de la trayectoria de la primera vuelta al mundo sobre cartas planas de la época (Andrea ramos)

Además, al superponerse la poligonal queda de manifiesto que hay un trozo del mapa que no está representado. Esto puede ser por diferentes motivos: podría ser intencionado ya que había un fuerte conflicto entre el reino de España y el de Portugal sobre la pertenencia de las islas Molucas a un reino u otro, pero también podría ser causas de las diferentes interpretaciones de los textos griegos que dieron lugar a diferentes radios de la tierra. En cualquier caso sería interesante investigarlo más a fondo.

Además, Andrea crea una modelización con el programa GeoGebra de una gráfica dinámica e interactiva velocidad-tiempo que nos permite de manera muy visual

analizar la velocidad en cada día de la expedición , la velocidad de crucero en las diferentes etapas del viaje o la distancia total finalmente recorrida.

Ilustración 7: Imagen y QR de al applet de la gráfica espacio – tiempo de la primera vuelta al mundo creada con Geogebra (Andrea olivares)

Por último, realiza un análisis de todo lo anteriormente expuesto poniendo en valor la capacidad de estos magníficos navegantes y los cartógrafos de la época para lograr alcanzar sus objetivos con las limitaciones matemáticas e instrumentales del siglo XVI.

3. El pabellón del Pintor: Proyecto de excelencia de Nadine Hübner (2024)

En este trabajo de investigación Nadine se lanza a la difícil tarea de diseñar por completo un pabellón para el patio del instituto Pintor Antonio López de Tres Cantos con dos objetivos fundamentales. Por un lado, mejorar el bienestar de los alumnos, proporcionando un espacio

cubierto donde los estudiantes puedan disfrutar de su tiempo de descanso protegidos del sol y la lluvia, siendo dicho espacio un aula polivalente que pueda acoger los conciertos de la banda del instituto o ser el escenario de debates o clases informales. Por otro lado, Nadine quería que

este pabellón aportase belleza al espacio común del centro realizando un diseño de estilo vanguardista basado en superficies regladas , de fácil edificación y construido a partir de materiales sostenibles.

Para realizar esta propuesta Nadine investigó sobre los fundamentos de construcción de pabellones, la utilización de las superficies regladas en arquitectura y los conceptos matemáticos subyacentes en este tipo de superficies. A continuación realizó un estudio sobre las zonas del patio donde se podría edificar dicho pabellón. Hay que tener en cuenta que este centro educativo tiene una gran superficie de terreno que no está siendo aprovechado. Una vez localizada la ubicación ideal para su pabellón, aprendió a generar diferentes tipos de superficies regladas con el programa Geogebra mediante el uso de listas y secuencias. Una vez dominada la técnica, realizó diferentes bocetos y propuestas hasta llegar a su diseño final basado en cuatro secciones de paraboloides hiperbólicos ligeramente degenerados que confluyen en una única cúspide y que se asienta sobre cuatro puntos de apoyo.

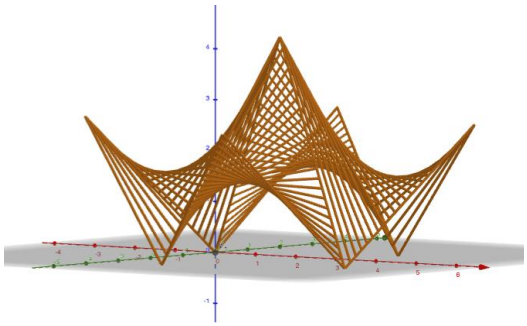


Ilustración 9: Imagen y QR del applet de Geogebra con el diseño en 3D del pabellón (Nadine Hübner)

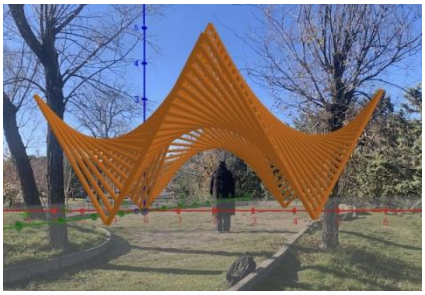


Ilustración 8: Visualización en AR del pabellón en su ubicación real (Nadine Hübner)

Para probar y ajustar las dimensiones de su diseño, realizó una visualización del pabellón en realidad augmentada (realizada con la aplicación AR de Geogebra) in situ, lo que resultó fundamental para la modificación tanto de las dimensiones iniciales de la altura del pabellón como del diseño de los alerones.

Una vez determinadas las dimensiones definitivas, Nadine comenzó a diseñar cada una de las piezas de la estructura de madera y cuerda que sostiene el pabellón. El reto geométrico al que se enfrentó fue considerable ya que la estructura debía

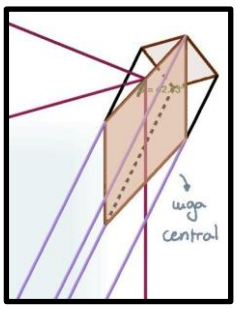


Ilustración 10: Punto de encuentro diseñado con Geogebra (Nadine Hübner)

sostenerse por sí misma y los cálculos sobre los puntos de encuentro de las vigas no resultaron nada sencillos.

Para lograrlo fue fundamental el uso de la ventana 3D de Geogebra en la que construyó a modo de prismas las vigas a escala y pudo determinar con las intersecciones de estas los ángulos de los planos de intersección y las dimensiones exactas de cada pieza tal y como se muestra en las siguientes figuras.

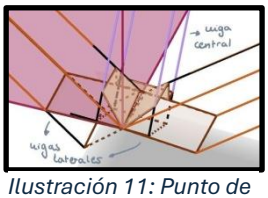


Ilustración 11: Punto de encuentro vigas diseñado con Geogebra (Nadine Hübner)

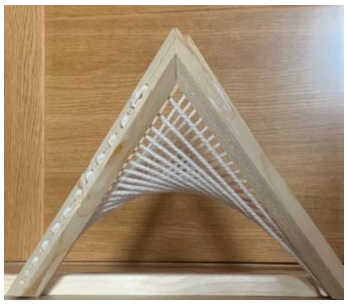
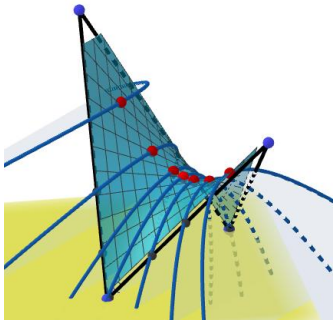


Ilustración 12: Maqueta de un cuarto del pabellón (Nadine Hübner)

Para comprobar la validez de sus cálculos realizó una maqueta de un cuarto del pabellón que debía sostenerse tan solo con el encaje de las piezas y la tensión de las cuerdas que determinan la superficie reglada con un resultado satisfactorio.



Sin embargo, el mayor reto al que se enfrentó Nadine fue diseñar el patrón de la cubierta de tela del pabellón. Un hiperboloide parabólico no es una superficie desarrollable por lo que la cubierta debe componerse de bastantes piezas que al unirse forman una buena aproximación al paraboloide. Lanzarse a la búsqueda de posibles soluciones supuso un desafío fascinante. Nadine quería que la tela sobrevolará la estructura con tan solo cinco puntos de apoyo la mantuviese tensa y sin deformaciones. Para conseguirlo Nadie estudió las tensoestructuras, superficies que tiene como propiedad que en cada punto soportan tensiones

que

Ilustración 14: QR applet diseño con Geogebra del paraboloide para marcar las geodésicas del patronaje (Nadine Hübner).

equivalentes que se compensan (puntos de curvatura con diferente signo) para que no sufra deformaciones y aumente su estabilidad y resistencia. Existen programas profesionales que realizan los cálculos necesarios para determinar el patrón de las piezas de la velaria pero son bastante costosos por lo que Nadine se propuso realizar esos cálculos por sí misma.

Gracias a la visualización en la ventana 3D del programa Geogebra, logró dividir cada paraboloide en diferentes cilindros parabólicos e hiperbólicos, determinando de forma aproximada las hipérbolas resultantes como intersección de dichas superficies y determinando el patronaje final a partir del cálculo de las longitudes de curva entre dos puntos que aporta el programa Geogebra.

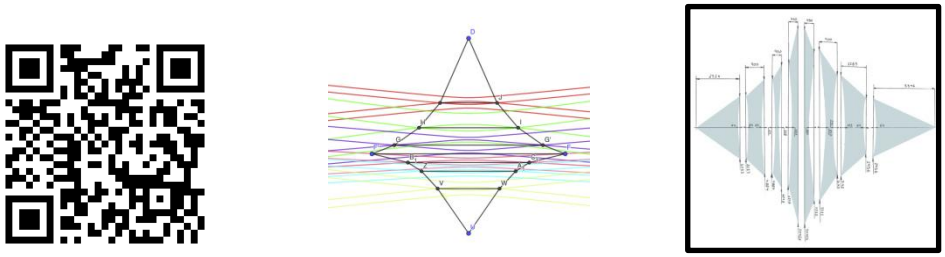


Ilustración 15: Aplet e imágenes del diseño del patrón para la velaria (Nadine Hübner)

Para verificar la validez del patronaje, cosió a escala un trozo de lona y lo incorporó a la maqueta anterior. El resultado ha sido muy satisfactorio a pesar de las limitaciones técnicas para cortar la madera de forma precisa con los ángulos calculados. El pabellón es realmente hermoso, de fácil edificación, utiliza materiales sostenibles de fabricación nacional y es perfectamente viable para ser levantado en un centro educativo, tal y como nos han confirmado los arquitectos que han asesorado a Nadine en el proceso. Y todo esto lo ha realizado una alumna de diecisiete años utilizando únicamente el programa geogebra.

Ilustración 16: Maqueta con la velaria cosida y acoplada a la maqueta (Nadine Hübner)

4. Estudio de los puntos de carga de coches eléctricos: Proyecto de excelencia de David Gonzalez-Calatayud (2020, 2º premio en el XXXII Certamen Jóvenes Investigadores,2021 2º premio en el Certamen Magma Exporecerca Jove, premio especial en el certamen Urania y mención de honor en el certamen de los premios de investigación de la Universidad de Saint Louis)

En este proyecto, David plantea que la transición hacia el vehículo eléctrico es uno de los principales objetivos que nos planteamos en el camino hacia la reducción de emisiones de CO2. Sin embargo, son numerosos los factores que ponen en duda la viabilidad de esta transición. Para una implantación generalizada del uso del vehículo eléctrico es preciso disponer de una red suficiente de puntos de carga para abastecer a la población. Este proyecto tiene como objetivo proponer un modelo matemático que determine la manera óptima de ampliar dichas redes. Para identificar los parámetros que nos permitan optimizar la red, comenzaremos analizando el problema de la distribución ideal en poblaciones con densidad de población homogénea. Para ello David utiliza los diagramas de Voronoi para estudiar la distribución de los puntos de carga existentes en la Comunidad de Madrid y analizar cómo debería distribuirse la ampliación de dicha red para dar servicio al mayor número de personas de la manera más equitativa. Desde el análisis de una distribución real, pero tomando como referencia los parámetros de equidad analizados previamente, propondremos un método algorítmico que nos permitirá localizar la ubicación de un nuevo punto de carga en una localidad determinada que minimice la variación entre las zonas de influencia de cada punto de carga y reduzca las distancias máxima de los usuarios a su punto de carga más cercano. Por tanto, los objetivos de este proyecto son:

I. Proponer una distribución ideal de puntos de carga en un área determinada utilizando como marco teórico los diagramas de Voronoi.

II. Construir el diagrama de Voronoi relativo a los puntos de carga en la Comunidad de Madrid, analizando su distribución.

III. Proponer una modelización matemática para la elección de nuevas ubicaciones de puntos de carga que mejoren la distribución en la Comunidad de Madrid, tomando como ejemplo los municipios de Alcobendas-San Sebastián de los Reyes.

Primeramente David comienza su trabajo investigando sobre el origen y utilidades de los diagramas de Voronoi a lo largo de la historia. A continuación profundiza sobre la construcción del diagrama de Voronoi asociado a un conjunto de puntos. Gracias a la herramienta Voronoi del programa Geogebra y una aplicación móvil que facilita las coordenadas GPS de los diferentes puntos de recarga de coches eléctrico en la Comunidad de Madrid (y una vez transformadas en coordenadas cartesianas mediante un programa realizado con Python), David crea una representación visual de las zonas de influencia de los diferentes puntos de cargas que existían en ese momento (2020).

Ilustración 13: Diagrama de Voronoi de los puntos de carga eléctricos en la Comunidad de Madrid creado con Phyton (David Gonzalez)

Ilustración 14: Diagrama de puntos para el estudio de la correlación entre la renta per cápita y la tasa de puntos de carga (David Gonzalez).

Este primer análisis sugiere que la densidad de puntos de cargas puede estar fuertemente correlacionado con la renta per cápita de cada distrito tal y como se muestra en la siguiente gráfica. Es claro que la distribución no es en absoluto equitativa.

Por otro lado, David se plantea cuáles deben ser los parámetros geométricos de las zonas de influencia para que puedan tener acceso a los puntos de carga el mayor número de personas recorriendo la menor distancia posible.

Tras realizar diferentes análisis con el programa Geogebra de las únicas tres posibles teselaciones del plano con polígonos regulares (triángulos, cuadrados y hexágonos), David llega a la conclusión que la red ideal debería ser isométrica y por tanto las zonas de influencia hexágonos ya que esta disposición minimiza la distancia máxima al punto de carga y maximiza el área que abarca.

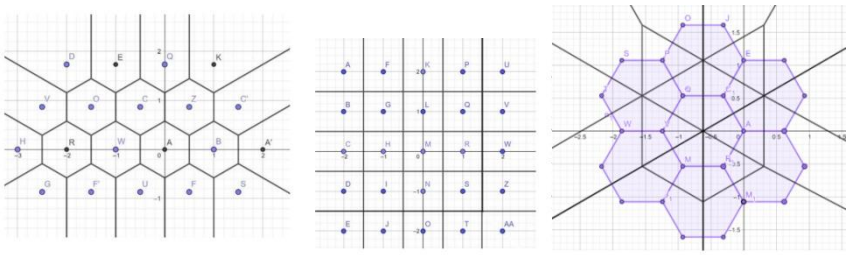


Tabla 1: Distancias sitio-frontera de Voronoi por figura.

Retícula	Región	Distancia entre sitios	D. sitio-frontera (mín. distancia)	D. sitio-vértice (máx. distancia)	Media máx-mín
Hexagonal	Triángulo	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}658$ u	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}439$ u	$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}877$ u	0,658 u
Ortogonal	Cuadrado	1 u o $\sqrt{2}$ u	0,5 u	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ u	0,601 u
Isométrica	Hexágono	$\sqrt{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}} \approx 1{,}074$ u	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}} \approx 0{,}537$ u	$\sqrt{\frac{2}{3\cdot\sqrt{3}}} \approx 0{,}620$ u	0,578 u

Ilustración 15: Estudio realizado con Geogebra sobre la estructura de la red ideal de distribución de puntos de carga (David Gonzalez)

Pero la realidad es que no partimos de una situación ideal para construir una red isométrica, la densidad de población no es homogénea y no se puede poner un punto de carga en cualquier lugar. Entonces, ¿cómo mejorar la red existente? ¿Qué modelo matemático nos podría ayudar a determinar la posición del punto de carga n+1 que mejore la distribución habiendo ya implantados n puntos de carga?

Ilustración 16: Diagrama de Voronoi de los puntos de carga en Alcobendas en el año 2019 realizado con Geogebra (David Gonzalez)

David se da cuenta que los candidatos óptimos a ser nuevos puntos de carga son los vértices de las regiones de influencia por contener los puntos más alejados a los puntos de carga. Así, comienza su algoritmo midiendo en cada uno de los

posibles vértices el coeficiente de variación entre las áreas de las nuevas zonas de influencia resultantes al incluir el punto n+1. Aquel vértice que minimice este coeficiente será el candidato óptimo tal y como se muestra en el ejemplo de las figuras obtenidas con datos reales en el municipio madrileño de San Sebastián de los Reyes. Dichos áreas han sido calculadas con el programa Geogebra.

David comprueba la validez de dicho algoritmo sobre una localidad elegida, en este caso Alcobendas y San Sebastián de los Reyes, obteniendo la ubicación exacta que debería tener el nuevo punto de carga para optimizar el servicio a la población. Curiosamente esa ubicación dispone hoy en día de un puntos de carga eléctrica.

Figura 16a: Escenario 1 (S) *Figura 16b: Escenario 2 (U)* *Figura 16c: Escenario 3 (Z)*

. Punto verde: Punto candidato. Sombreado verde: Región de influencia del PDC candidato. Consultar ampliación en Anexo A.3

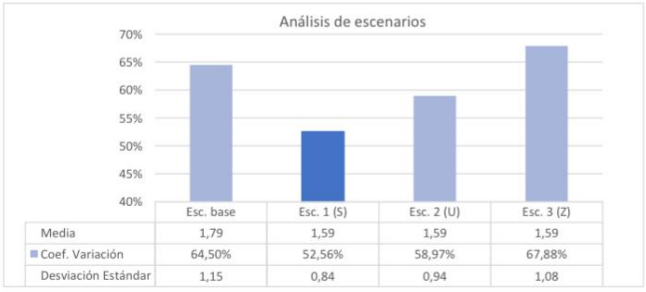


Figura 17: Resultados parámetros estadísticos ubicaciones candidatas. (Azul: CV)

Ilustración 17: Estudio del coeficiente de variación de las zonas de influencia al incorporar un nuevo punto de carga en Alcobendas (David Gonzalez)

Si queremos lograr la electrificación del transporte debemos diseñar una distribución homogénea de puntos de carga que responda a la densidad de población, y no tanto a la renta per cápita. David propone tanto la mejor manera de conseguirlo si partimos de una zona virgen como un modelo matemático que nos permite mejorar las distribuciones existentes. Puesto que el coche es un bien universal, la ubicación de los puntos de carga debería ser equitativa, para así implicar a todos los estratos de la sociedad en esta transición al vehículo eléctrico. Las administraciones públicas, junto a la comunidad científica podrían, por tanto, planificar la distribución de los nuevos puntos de carga mediante la geometría computacional existente para así garantizar una transición energética equitativa.

5. Modelización de procesos físicos: Proyecto de Excelencia de Álvaro de Santos (2022)

El desarrollo de la física y el de las matemáticas han ido siempre de la mano. A lo largo de la historia el diálogo entre ambas disciplinas ha dado lugar a los más importantes descubrimientos y teorías que sustentan a la ciencia moderna. Grandes físicos fueron a su vez grandes matemáticos como Arquímedes o Newton. En la actualidad, se ha sumado un nuevo participante a este diálogo: la tecnología. La tecnología ha abierto multitud de líneas de trabajo que eran impensables hace apenas cien años. La modelización es uno de los mejores ejemplos de esta fructífera conexión entre matemática, física y tecnología. El objetivo principal que se plantea Álvaro en este proyecto es modelizar procesos físicos conocidos utilizando el programa Geogebra, basándose en el conocimiento de los fundamentos teóricos que los determinan y aplicando los métodos matemáticos adecuados.

En primer lugar, Álvaro comienza realizando una modelización con el programa Geogebra de un tiro parabólico en tres dimensiones dependiente de parámetros de posición, velocidad y ángulo de tiro. Es un objetivo no demasiado complejo que le permitió familiarizarse con el programa y los conceptos matemáticos subyacentes relativos a las trayectorias y curvas cónicas en tres dimensiones.

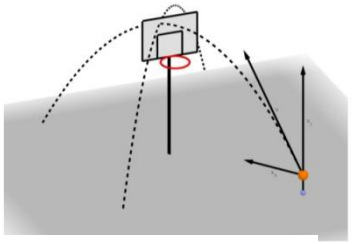


Ilustración 18: imagen y QR applet modelización (Álvaro de Santos)

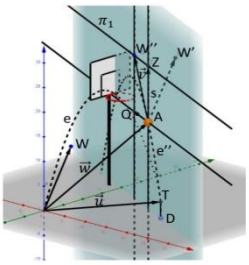


Ilustración 19: Imagen diseño de la modelizzación mediante simetrias especulares (Álvaro de Santos)

Para lograrlo Álvaro recurre a la geometría espacial para determinar los planos de incidencia sobre el tablero y, utilizando simetrías especulares y giros respecto a un eje, determinar las parábolas de entrada y salida en función de los parámetros iniciales, tal y como se muestra en el siguiente applet de Geogebra.

En segundo lugar, Álvaro se plantea una modelización más ambiciosa modelando el cambio de órbita de un cuerpo en el espacio según una órbita inicial y una final. A dicha maniobra se le denomina la transferencia de Hohmann. Para este segundo

objetivo Álvaro aprende a utilizar botones y a realizar acciones programadas según diferentes condicionantes como se muestra en el siguiente applet de Geogebra.

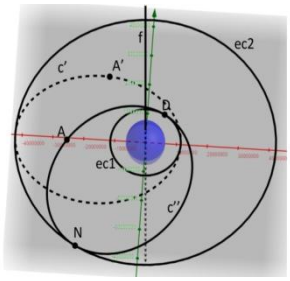


Ilustración 20: Modelización final con Geogebra Transferencia de Hoh mann (Álvaro de Santos)

6. Conclusiones

Estos cuatro proyectos son una buena muestra de cómo el conocimiento sobre las posibilidades del programa Geogebra potencia la creatividad investigadora en los alumnos. Este programa, más allá de tener un uso didáctico y metodológico, puede ser utilizado como una excelente herramienta de investigación para alumnos de la ESO y Bachillerato. A pesar de no tener la potencia de otros programas especializados como puede ser el Matlab, Wolfram Mathematica o R, puede resultar suficiente para iniciarse en la metodología investigadora e incluso obtener resultados significativos. Creo firmemente que la enseñanza específica de las herramientas del programa Geogebra y de las técnicas elementales de programación que permite desarrollar beneficia enormemente a los alumnos y les motiva a realizar sus primeras investigaciones desde edades muy tempranas. Todos los alumnos deberían tener la posibilidad de realizar alguna investigación matemática y obtener sus propios resultados durante su etapa escolar en secundaria y Bachillerato.

Referencias:

Actas 32 certamen Jóvenes Investigadores
https://www.injuve.es/conocenos/ediciones-injuve/actas-del-32-congreso-de-jovenes-investigadores

Conexiones entre Matemáticas y Física: distintas perspectivas de una tarea.

María del Valle Bermejo-Luna (1)
vll.bermejo@gmail.com *(1)*
Universidad de Sevilla, I.E.S. Torre del Rey (1)

Gloria Sánchez-Matamoros García(2)
gsanchezmatamoros@us.es *(2)*
Universidad de Sevilla (2)

Núcleo temático: Formación del profesorado, Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo caracterizar cuatro perspectivas diferentes de mirar una tarea: desde el punto del vista del profesor de Matemáticas que plantea la tarea a sus estudiantes, la visión del profesor de Física de la misma tarea, la del estudiante que la resuelve y la del investigador que tiene como campo de estudio la comprensión que muestran los estudiantes de los conceptos matemáticos cuando los aplican en un dominio diferente, como es el de la Física. La tarea que se propone versa sobre el concepto de Derivada pero contextualizado en la Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento sin atender a los motivos que lo produce). Además de la comprensión del concepto de Derivada en su resolución se ponen de manifiesto conceptos matemáticos previos y las conexiones entre las Matemáticas y la Física.

Palabras clave: Matemáticas, Física, Conexiones, Bachillerato.

1. Introducción

Según Johnson et al. (2017) en la clase de Matemáticas, el profesor, los estudiantes y las tareas son los elementos estructurales sobre los que se cimienta la actividad social de la clase. Concretamente en esta comunicación, nos centraremos en uno de esos elementos estructurales: la tarea. En particular, aquí nos centraremos en las diferentes perspectivas, estudiante-profesor-investigador, que tienen las tareas que les proponemos a nuestro alumnado. Además, incluimos una perspectiva más: distinguimos en la figura del profesor, al profesor de dos materias distintas, Física y Matemáticas. Es esta dualidad la que ofrece un nuevo punto de vista en la investigación.

En el nuevo paradigma educativo mundial, donde la metodología STEM tiene tanto peso (English, 2016; Goos et al., 2023), puede ser conveniente considerar cómo una misma tarea puede tener dos perspectivas distintas según la materia.

De igual forma, la comprensión que realizan los estudiantes de los conceptos matemáticos y la aplicación que hacen de estos en otras áreas es un tema de mucha actualidad dentro de las STEM (Goos et al., 2023). En las pruebas PISA 2022, todas las pruebas de Matemáticas tenían lugar dentro de un contexto, incluyendo dentro de los distintos tipos de contexto al científico: “aplicación de las matemáticas al mundo natural, así como los problemas y los temas relacionados con la ciencia y la tecnología” (Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, 2023).

Tal y como aparece en el nuevo currículo, una de las principales líneas de definición de las competencias específicas de Matemáticas es “el establecimiento de conexiones entre los distintos elementos matemáticos, con otras materias y con la realidad” (Real Decreto 243/2022, p. 46337).

La tarea considerada trata sobre el concepto matemático de Derivada pero dentro del contexto de la Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento sin atender a los motivos que lo produce).

El concepto de Derivada empieza a introducirse en la Educación Secundaria, en el nivel de Bachillerato (16-18 años). En el Real Decreto 243/2022, aparece dentro de la materia de Matemáticas I y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I con los saberes básicos del sentido de la medida, al igual que los conceptos matemáticos previos de límites y continuidad. La dificultad del concepto Derivada ha sido ampliamente estudiada en la Educación Matemática.

Mi experiencia, como graduada en Física y profesora de Educación Secundaria de Matemáticas, me ha permitido comprobar la enorme dificultad a la hora de integrar ambos currículos. Es decir, las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para establecer el concepto previo en un esquema coherente que pueda ser aplicado en otro dominio (Reed, 1993). Muchos estudiantes son capaces de llevar a cabo los ejercicios que se les proponen en el contexto matemático, y sin embargo muestran dificultades al aplicar estos conceptos en un contexto diferente (Ariza y Llinares, 2009). Esto es debido a que ambas asignaturas son tratadas como distintas y pertenecientes a diferentes departamentos (Carli et al., 2020).

Teniendo todo esto en cuenta, en esta comunicación nos hemos centrado en considerar cuatro perspectivas de una misma tarea (profesor de Matemáticas, profesor de Física, estudiante e investigador) en la etapa de Bachillerato, cuando se trabaja por primera vez el concepto matemático subyacente a la tarea: la Derivada.

2. Conexiones.

“Casi todas las preguntas y problemas en educación matemática, es decir, las preguntas y problemas que conciernen al aprendizaje humano y a la enseñanza de las Matemáticas, influyen y son influenciados por las relaciones entre las

Matemáticas y algunos aspectos del mundo real” (Niss et al., 2007, p. 12). El National Council of Teachers of Mathematics estableció cinco procesos matemáticos: la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, la representación, y finalmente, las conexiones (NCTM, 2000). Dentro del proceso

matemático de las conexiones, el NCTM incluye, conexiones intradisciplinares, con la experiencia e intereses del estudiante y conexiones interdisciplinares; en estas últimas es donde se enmarca la aplicación de las matemáticas en otros contextos no matemáticos.

Alsina (2020, p.172) defiende que "las conexiones entre las matemáticas y las otras áreas de conocimiento ponen de manifiesto que, a pesar de que actualmente la práctica educativa más habitual sigue siendo todavía el trabajo aislado de los contenidos matemáticos, las actividades interdisciplinares van ocupando un lugar cada vez más importante en las aulas de todas las etapas educativas." Concretamente, si nos centramos en la Física, la necesidad de establecer la conexión entre las Matemáticas y ésta es innegable. Cuando los estudiantes establecen estas conexiones su aprendizaje es más profundo y de mayor duración, puesto que comienzan a ver las Matemáticas como un todo coherente (NCTM, 2000).

3. Distintas perspectivas de la tarea

La tarea que proponemos aparece en la Imagen 1 y es una de las tareas propuestas en el marco de una investigación mayor.

La distancia recorrida por un autobús en los cinco primeros segundos desde que sale de una parada viene dada por la función $f(t) = t^2 + 2$.

a) ¿Qué velocidad llevará en el instante $t = 3$ *segundos? ¿Y en el t=4 segundos? Justifica tus respuestas.*
¿Cuál será su velocidad instantánea para cualquier t? Justifica tu respuesta.

Imagen 1.Tarea propuesta.

Esta tarea ha sido adaptada del libro de Vizmanos et al (2011). Es similar también con tareas empleadas en investigaciones previas de Educación Matemática

(Azcárate,1990; Ariza y Llinares, 2009).

La tarea se presenta en registro algebraico-numérico, y pregunta directamente el cálculo de la velocidad instantánea en dos momentos concretos a partir de la

expresión algebraica de la posición en función del tiempo; así como, la expresión algebraica de la velocidad instantánea para cualquier tiempo. Su objetivo es poner en relieve las conexiones entre velocidad y la función derivada

3.1. Tarea desde la perspectiva del profesor de Matemáticas.

Para el profesor de Matemáticas, si el estudiante conoce el pre-requisito de la Física de la velocidad como derivada de la función posición respecto al tiempo, la tarea planteada exige establecer conexiones con el concepto matemático de la derivada de una función, y una vez establecida la conexión resolver la tarea en el contexto matemático, lo que supondría resolver la tarea como se presenta en la Imagen 2.

Una función viene dada por la expresión $f(t) = t^2 + 2$ *. ¿Cuál será su derivada en* $t = 3$*? ¿Y en el punto t=4?*

¿Cuál será su función derivada para cualquier t? Justifica tu respuesta.

Imagen 2.Tarea análoga en el contexto matemático.

El concepto de Derivada se introduce como hemos dicho en la materia de Matemáticas I y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I con los siguientes saberes básicos del bloque B. Sentido de la medida: “Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en diferentes contextos” (Real Decreto, 243/2022, p.46340).

La resolución de la tarea incluye el proceso que se muestra en la Imagen 3. Es decir, se espera del estudiante que identifique la velocidad como derivada de la función posición y entonces derive una función polinómica de grado dos. Puesto que se pide la velocidad en dos instantes, deberá sustituir dichos valores del tiempo en la función velocidad que acaba de calcular.

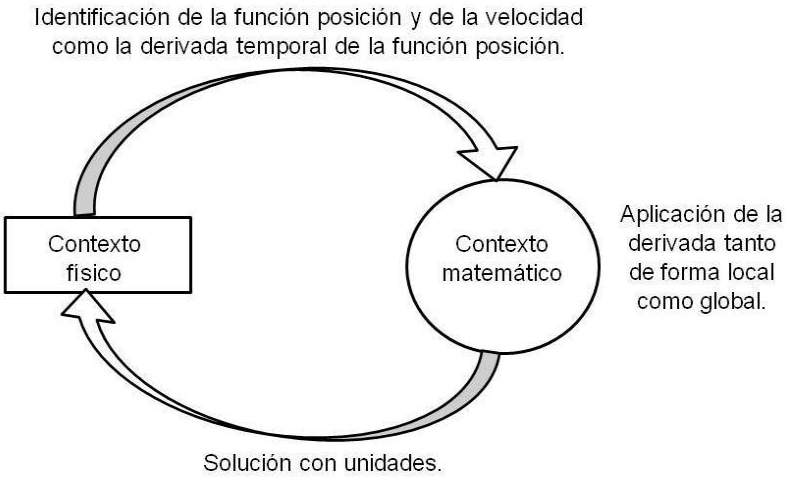


Imagen 3. Proceso de resolución de la tarea.

Así, el profesor cuando plantea esta tarea a sus estudiantes quiere identificar la forma en que estos usan la definición de derivada en un punto como límite del cociente incremental y si pone usa o no el operador derivada al aplicar las reglas de la derivación de una función polinómica de segundo grado. Es decir, su interés se centra dentro de lo que pasa en el contexto matemático de la Imagen 3. Parte del hecho de que las dos conexiones se van a establecer e incide en los procesos matemáticos que realizará el estudiante para resolver la tarea.

El uso de esta tarea pretende aportar evidencia de que los estudiantes han adquirido los saberes que el decreto recoge como básicos. Desde la mirada del profesor de Matemáticas, por tanto, la tarea sirve como un medio para conseguir los objetivos curriculares que marca la normativa.

3.2. Tarea desde la perspectiva del profesor de Física.

Si nos centramos en la figura del profesor de Física revisemos qué saberes básicos trabaja con la tarea propuesta en la Imagen 1. En los cursos de primero a tercero de Física y Química, en el Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo, aparecen los conceptos de Cinemática en el bloque D (La interacción): “predicción de movimientos sencillos a partir de los conceptos de la cinemática, formulando hipótesis comprobables sobre valores futuros de estas magnitudes, validándolas a través del cálculo numérico, la interpretación de gráficas o el trabajo experimental” (p. 41664).

Así mismo, en el cuarto curso vuelven a aparecer: “predicción y comprobación, utilizando la experimentación y el razonamiento matemático, de las principales magnitudes, ecuaciones y gráficas que describen el movimiento de un cuerpo, relacionándolo con situaciones cotidianas y con la mejora de la calidad de vida” (p. 41667).

En el Real Decreto 243/2022 de 5 de abril, en la materia de Física y Química de primero de Bachillerato aparece el bloque D que versa completamente sobre Cinemática: “Variables cinemáticas en función del tiempo en los distintos movimientos que puede tener un objeto, con o sin fuerzas externas: resolución de situaciones reales relacionadas con la física y el entorno cotidiano. Variables que influyen en un movimiento rectilíneo y circular: magnitudes y unidades empleadas. Movimientos cotidianos que presentan estos tipos de trayectoria. Relación de la trayectoria de un movimiento compuesto con las magnitudes que lo describen” (p. 46198). Mientras que en los saberes básicos de Física de 2º de Bachillerato no se hace referencia a la Cinemática.

En las unidades didácticas sobre el tema de Cinemática que aparecen en algunos libros de texto de 2º de la E.S.O., se aprecia que a los estudiantes les introducen el concepto de velocidad media como “la velocidad (v) es una magnitud que mide la rapidez de un movimiento. Para conocer la velocidad media en un movimiento se divide el espacio recorrido entre el tiempo empleado. (...). Velocidad instantánea es la velocidad que lleva el móvil en un instante de su recorrido” (2016, Grence Ruiz, p.106). En el libro de Zubiaurre et al. (2008) para Física y Química de 1º de Bachillerato sí se introduce la velocidad instantánea como “el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado tiende a cero” (p.36). Además de introducir en una nota en el margen del mismo libro el concepto de Derivada, “la velocidad instantánea es la derivada del vector posición con respecto al tiempo” (p.37).

Si comparamos las perspectivas de ambos docentes, observamos que el profesor de Física,en la Imagen 3, se centrará, sin embargo, no sólo en lo que suceda en el contexto matemático. Para él será importante comprobar que el estudiante identifica

la velocidad instantánea de forma correcta como función derivada de la posición con respecto al tiempo. E igualmente, que el estudiante es capaz de realizar la conexión en el sentido contrario, es decir, una vez ha resuelto la tarea en el contexto matemático vuelva al contexto físico a dar la solución en las unidades correctas.

3.3. Tarea desde la perspectiva del investigador.

El investigador utiliza la tarea de la Imagen 1 para saber el nivel de comprensión del concepto de Derivada que muestra el estudiante al resolver una tarea de Cinemática. De igual forma, si utiliza ambas tareas (tanto la de la Imagen 1 como la de la Imagen 2) puede estudiar si en la resolución del estudiante se está poniendo de manifiesto conexiones entre ambas materias.

El investigador toma como referencia un modelo hipotético de aprendizaje sobre el cual analizará la comprensión de los estudiantes en función de la resolución que hagan de la tarea. Uno de estos modelos hipotéticos de aprendizaje que puede utilizar es la descomposición genética del concepto de Derivada. Arnon et al. (2014) definen la descomposición genética como un modelo de la epistemología y cognición de un concepto matemático. En este caso, el investigador puede adaptar la descomposición genética del esquema de la Derivada presentada por Font, et al.

(2016) y refinada por Fuentealba (2017) al estudio de la Cinemática en Física.

Bajo este modelo, dos posibles procesos de resolución de la tarea planteada son:

- En primer lugar, estableciendo correctamente las relaciones de los *objetos* resultantes de las *encapsulaciones* para construir un *esquema* para la velocidad instantánea en un punto y tematizando este *esquema* en el *objeto* velocidad instantánea de una función en un punto. De esta forma, el estudiante derivará la función para cualquier t, a través del límite del cociente incremental o aplicando las reglas de derivación (operador derivada) y posteriormente sustituyendo los dos valores del tiempo dados.

- En segundo lugar, sustituyendo los puntos en la función y realizando procedimientos numéricos para el cálculo de la velocidad instantánea como un paso al límite de la velocidad media.

Por tanto, en la resolución de esta tarea se hará uso de los siguientes elementos físicos de Cinemática:

- velocidad instantánea como límite de la velocidad media (cuando h→0).

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- velocidad instantánea como derivada en un punto del desplazamiento con respecto al tiempo.

$$v_{instantánea} = \left. \frac{dPosición}{dTiempo} \right|_A$$

- velocidad instantánea en cualquier punto como la función derivada del desplazamiento con respecto al tiempo en todos los puntos.

- operador derivada: reglas de derivación.

$$f(t) = t^2 + 2 \rightarrow f(t) = 2 \cdot t$$

Además de la resolución de la tarea, si el investigador realiza una entrevista, se puede ver si el estudiante manifiesta que tiene construido el significado de velocidad instantánea con todas sus posibles relaciones, y no lo tiene sólo como algo "memorizado" de la instrucción previa.

Con respecto a las conexiones entre las Matemáticas y la Física se pone de manifiesto en esta tarea cuando los estudiantes interpretan la función dada como la posición (y no la confunden con la velocidad). De igual forma, cuando en su resolución distinguen entre velocidad media e instantánea y dan los resultados con las unidades correctas.

Si además el investigador complementa la tarea de la Imagen 1 con la de la Imagen 2, puede analizar de dónde vienen los problemas que podría manifestar el estudiante

en la resolución de las tareas, si del contexto matemático, físico o de las conexiones entre ambos.

Desde esta mirada, el investigador puede analizar la información obtenida por la tarea e inferir características de la comprensión del concepto de Derivada cuando el estudiante resuelve una tarea de Cinemática.

3.4. Tarea desde la perspectiva del estudiante.

Para analizar la perspectiva de los estudiantes frente a la tarea, utilizaremos la respuesta que han dado varios de ellos a la misma. Son estudiantes de 2º de Bachillerato de la modalidad científica que ya han estudiado los elementos físicos y matemáticos previamente en Matemáticas I y Física y Química de 1º de Bachillerato.

Destacamos tres respuestas que muestran distintas formas de resolver la tarea .

En el primer caso, encontramos a Luis que resuelve la tarea como se muestra en la Imagen 4. Utiliza de forma conjunta en la resolución de la tarea la velocidad instantánea como derivada en un punto de la función posición con respecto al tiempo, velocidad instantánea en cualquier punto como derivada de la función posición respecto del tiempo y las reglas de derivación.

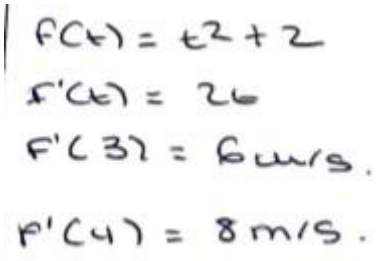


Imagen 4. Resolución de la tarea por Luis.

En el segundo caso, encontramos la resolución de Diego en la Imagen 5. Resuelve la tarea sustituyendo directamente el valor del tiempo en f(t) indicando que no entiende que le piden el valor de la velocidad y no de la posición. Puede indicar que tampoco tiene desarrollado plenamente el esquema de Función, como concepto matemático que es necesario para la construcción del esquema de Derivada. Muestra

que no realiza conexiones entre la Física y la Matemática al confundir sendas magnitudes (posición y velocidad).

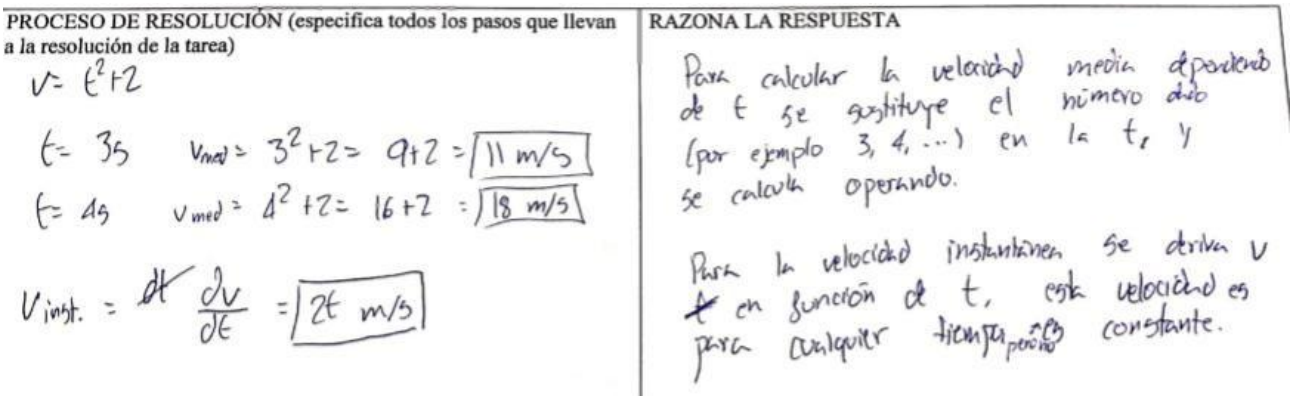


Imagen 5.Resolución de la tarea por Diego.

Con respecto al apartado (B), utiliza de forma conjunta la velocidad instantánea en cualquier punto como derivada de la función posición respecto del tiempo y las reglas de derivación.

Es decir, no es capaz de identificar la derivada de la función en un instante (t = 3s) como la velocidad instantánea, y sin embargo usa la derivada de la posición respecto al tiempo como la velocidad instantánea en el apartado B).

Finalmente, mostramos la resolución de Pablo en la Imagen 6.

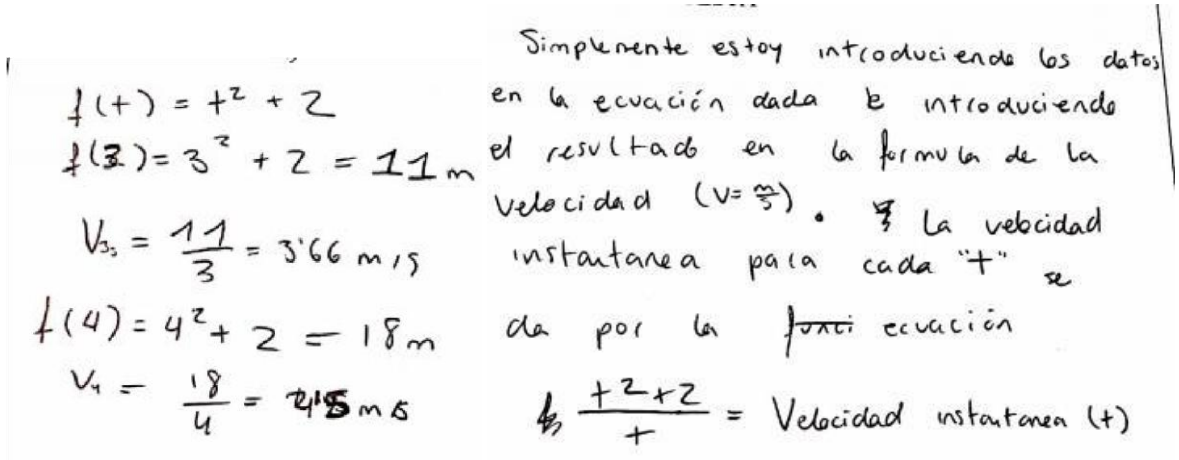


Imagen 6. Resolución de la tarea por Pablo.

Resuelve la tarea con el cociente de la posición (que calcula sustituyendo los puntos en f(t)) y el tiempo. No distingue entre velocidad media e instantánea, además

tampoco utiliza incrementos para calcular la velocidad media. Sobre el apartado (B) indica que sería el cociente de f(t) entre t y escribe la expresión del mismo. En las resoluciones de estos tres estudiantes podemos observar que Luis resuelve la tarea de forma correcta, mostrando establecer conexiones entre las Matemáticas y la la Física. Mientras que Diego no es capaz de identificar la derivada de la función en un instante como la velocidad instantánea, y sin embargo si usa la derivada de la posición respecto al tiempo como la velocidad instantánea, esto puede ser evidencia de que recuerda las reglas de derivación de la instrucción previa en Matemáticas. Y por último Pablo recuerda algunos rasgos de la definición de velocidad de la instrucción previa en Física.

Otro de los fallos que recurrentemente se ven en la resolución de la tarea es la ausencia de unidades al dar la solución, esto es una muestra de la ausencia de las conexiones entre las Matemáticas y la Física, puesto que al dotar a la tarea de un contexto físico resulta esencial el uso de las mismas.

4. Conclusiones

Desde la Educación Matemática se ha estudiado ampliamente como la comprensión de la noción de Derivada presenta grandes dificultades para los estudiantes; de igual forma, muchos son los estudios que hablan de las dificultades que aparecen cuando esperamos que nuestro alumnado transfiera el conocimiento entre las Matemáticas y otro dominio diferente.

Esta comunicación amplia las ideas propuestas por Sánchez-Matamoros (2007), ya que esta consideraba diferentes formas de mirar una tarea en el contexto de las Matemáticas mientras que en esta comunicación planteamos distintas perspectivas que puede tener una tarea en un contexto distinto al matemático, ampliando el estudio a las conexiones que pueden establecerse entre dos áreas de conocimiento las Matemáticas y la Física.

En el caso de la tarea propuesta (Imagen 1), las dificultades pueden venir asociadas o bien con la comprensión de los elementos físicos (velocidad instantánea), con la compresión de los saberes de Matemáticas (Derivada), con los pre-requisitos tanto

físicos como matemáticos (posición, velocidad media, tasa de variación media, función, límite, etc.) o con la ausencia de la conexión entre la Física y las Matemáticas que debería producirse en la resolución de la tarea.

No debemos olvidar que la Cinemática se introduce en 2º de la ESO con definiciones muy simplificadas debido a la ausencia de pre-requisitos matemáticos como función, tasa de variación media o instantánea. La instrucción de la Física en la materia de Física y Química de 2º de la ESO se centra en el estudio de movimientos concretos: movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado, dejando de un lado la definición de magnitudes como la velocidad y potenciando el uso de fórmulas dadas. Esto hace que cuando posteriormente, con los prerequisitos matemáticos estudiados, se retomen estos conceptos en Física las relaciones sean más difíciles de establecer. Como indican Moutsios-Rentzos et al. (2018) las Matemáticas y otras materias curriculares aparecen “artificalmente” compartimentadas.

Si no existe coordinación entre el profesor de Matemáticas y Física, el estudiante tendrá dificultades a la hora de establecer estas conexiones. Esto en el sistema educativo español es bastante complejo puesto que habitualmente se dejan los saberes relacionados con las funciones para final de curso haciendo imposible su coordinación con Física y Química.

Igualmente, es importante que el profesor de Matemáticas trabaje con distintas variables a la hora de realizar tareas de Análisis Matemático como pudiera ser la tarea aquí propuesta. Es decir, en lugar de limitar el trabajo a la variable x, el uso de t como variable puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre la Física y las Matemáticas de forma más sencilla.

En conclusión, como indica English (2016) “se requiere más investigación sobre formas de ayudar a los estudiantes a desarrollar conexiones STEM más transparentes y significativas entre disciplinas, (...) se requieren más investigaciones sobre formas de ayudar a los docentes a fomentar estas conexiones.” Puesto que nuestros estudiantes en muchos casos tienen dificultades a la hora de resolver este tipo de tareas.

Todo esto nos lleva a pensar en la necesidad de considerar las diferentes miradas que puede tener una tarea cuando la queremos utilizar o bien como docentes o como investigadores. Puesto que esta unión de perspectivas nos ampliará el potencial alcance de la tarea que queramos proponer.

Referencias

Alsina, Á. (2020). Conexiones matemáticas a través de actividades STEAM en Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.*, *58*, 168-190.

Ariza, Á., & Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de Derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. Enseñanza de las Ciencias, 27(1), 121-136.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education (1.ª ed.). Springer New York, NY. *https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6*

Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Universitat Autònoma de Barcelona.

Carli, M., Lippiello, S., Pantano, O., Perona, M., & Tormen, G. (2020). Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context. Physical Review Physics Education Research, 16(1), 10111. *https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010111*

English, L.D. STEM education K-12: perspectives on integration. IJ STEM Ed 3, 3 (2016). *https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1*

Font Moll, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. Educational Studies in Mathematics, 91(1), 107-122. *https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6*

Fuentealba Aguilera, C. (2017). Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios. [Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals]. http://hdl.handle.net/10803/458677

Goos, M., Carreira, S. & Namukasa, I.K. Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. ZDM Mathematics Education 55, 1199–1217 (2023). https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z

Grence Ruiz, T. (2016). *Física y Química. 2 ESO*. Santillana.

Johnson, H.L., Coles, A. & Clarke, D. Mathematical tasks and the student: navigating

"tensions of intentions" between designers, teachers, and students. *ZDM*

Mathematics Education 49, 813–822 (2017). https://doi.org/10.1007/s11858-0170894-0

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes. (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español Instituto Nacional de Evaluación Educativa.* https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/pisa-2022-programa-para-la-evaluacioninternacional-de-los-estudiantes-informe-espanol_183950/

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith,

Moutsios-Rentzos, A., Kritikos, G., & Fragkiskos, K. (2018). Interdisciplinary Mathematics Education and systemic school organisation. *Proceedings of the First Congress of Greek Mathematicians (FCGM-2018)*, 185-200.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.

H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education:*

The 14th ICMI Study (pp. 3-32). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_1

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del

Estado, 76, de 31 de marzo de 2022, pàgines 41571 a 41789.
https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 82, de 6 de abril de 2022, páginas 46047 a 46408. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-20225521

Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), Transfer on trial: Intelligence, Cognition and Instruction (pp. 39-67).

Norwood, NJ (U.S.A.): Ablex.

Sánchez-Matamoros-García, Gloria: *Tres formas de "mirar" una tarea matem tica sobre derivada.* Comunicación en congreso. XIII JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTCAS. Granada. 2007

Vizmanos, J. R., Hernández, J., & Alcaide, F. (2011). *Matemáticas I. Bachillerato.* SM

Zubiaurre, S., Arsuaga, J. M., Moreno, J., & Garzón, B. (2008). *Física y Química. Bachillerato 1.* Anaya.

Envases para contextualizar el análisis.

Jesús Cortés Velasco
Jesus.Cortes@uclm.es
Doctorando en el Depto. de Matemáticas de la UCLM

Elena Gajate Paniagua
Eegp16@educastillalamancha.es
IES Mº Juan de Ávila, Ciudad Real; profesora asociada en la UCLM

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

Expondremos la experiencia de dos actividades realizadas en el 1º curso de bachillerato científico tecnológico, en las que damos un contexto a dos problemas clásicos de optimización: maximizar el volumen de un prisma rectangular construido con un rectángulo dado y minimizar la superficie de un cilindro de volumen fijo. En el primer caso estudiaremos si los tetrabricks que utilizamos habitualmente se han plegado de forma "óptima" y en el segundo, si una lata se podía haber fabricado empleando menos material.

Palabras clave: modelización, optimización, sentido algebraico, GeoGebra

Introducción

Los saberes básicos en la asignatura de Matemáticas I engloban, dentro del apartado *Sentido algebraico*, contenidos de modelización, patrones, resolución de ecuaciones e inecuaciones, y "problemas de la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados"; y, dentro del apartado S*entido de la medida*, "derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en diferentes

contextos". Para trabajar conjuntamente estos contenidos y poder evaluar las competencias "Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología", así como "Representar conceptos" y "comunicar ideas matemáticas", se han diseñado dos actividades manipulativas en las que los alumnos se hacen preguntas, modelizan, investigan con ayuda de la tecnología y, por último, comunican sus hallazgos mediante un informe científico.

Estas actividades las estamos realizando desde el curso 2020-21; aunque la LOMLOE lo prescribe, ya los currículos anteriores establecían que la matemáticas deben verse como un todo, fomentando tanto sus conexiones internas como con otras áreas, por lo que desde hace ya varios cursos en Matemáticas I trabajamos conjuntamente el álgebra y las funciones; los contenidos los introducimos a partir de problemas contextualizados y los vamos trabajando por tipos de modelos funcionales, empezando por los polinómicos (lo que incluye ecuaciones, inecuaciones, representaciones, límites, cambio…), siguiendo con los racionales, etc. La actividad del tetrabrick se realiza al final del estudio de los modelos polinómicos, cuando ya han aprendido lo que es la derivada y su relación con el crecimiento, y la de la lata, al final de los modelos racionales.

Tetrabrick

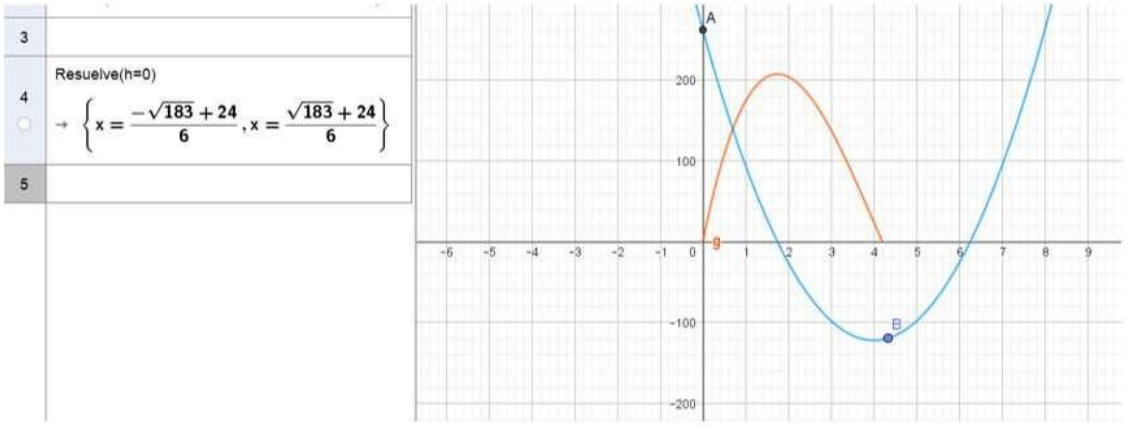
Este problema es una variante del clásico de la caja elaborada a partir de un rectángulo, pues los tetrabricks también se hacen plegando una lámina rectangular y su volumen varía según la distancia entre el borde de la lámina y el plegado. *Aquí* hay una modelización con GeoGebra que se proporcionó al explicar la actividad para ayudarles a entender la situación. Se les pidió que trajeran de casa un tetrabrick con forma de prisma y cúter para abrirlo y estudiar cómo había sido plegado. Después tenían que medirlo y estudiar cómo variaría el volumen si la distancia de plegado hubiera sido otra, variable. Para ello, una vez encontrada la expresión algebraica de la función (polinómica de tercer grado), debían dibujarla indicando su dominio, hallar su derivada y encontrar el máximo (todo esto con GeoGebra para evitar los cálculos tediosos que aparecen cuando se manejan medidas reales).

El trabajo se hizo íntegramente en clase, así como el informe posterior que debían realizar explicándolo todo.

Imágenes de los autores.

En el informe debían incluir fotografías y medidas del tetrabrick usado, la expresión algebraica de la función volumen y su derivada con sus gráficas respectivas, el valor donde se alcanza el máximo, la comparación con la medida real y una conclusión con comentario personal. Mostramos algunos extractos de estos informes:

Resolvemos(V'(X)=0), que es lo mismo que Resuelve(h=0):



El único valor que coincide es el primero, por lo que será la medida perfecta para aprovechar el volumen lo máximo posible.

Conclusión: Debido a que la "x" de nuestro brik es 3cm, deducimos que nuestro brik no es todo lo eficiente que podría ser, aunque opino que esto puede ser así para conseguir que el brik sea más resistente

Lata cilíndrica

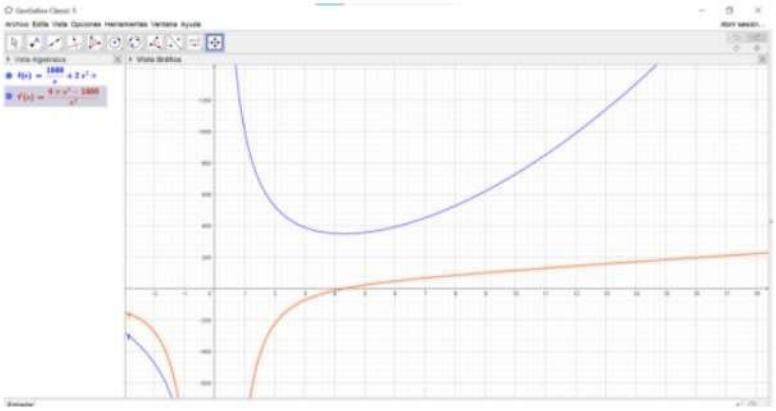
En esta actividad tratamos de averiguar si una lata cilíndrica se podría haber construido con el mismo volumen pero con menos superficie, y por tanto empleando menos material. La función que relaciona la superficie con las dimensiones es racional, por lo que se realizó después de estudiar este tipo de modelos funcionales. Se pidió a los alumnos que trajeran de casa un envase cilíndrico, evitando las latas de refresco o cerveza, ya que el rebaje que suelen tener hace que su forma no sea exactamente cilíndrica. Aún así, algunos trajeron este tipo de envase, lo que nos sirvió de excusa para hablar de la existencia de funciones con dos o más variables independientes, que no se trabajan en bachillerato. También se tuvo en cuenta que no es la misma función cuando hay una tapa que cuando hay dos, y se discutió la circunstancia de que el material que se emplea para fabricar las paredes no siempre es el mismo que el de las bases, lo que habría que tener en cuenta si se busca minimizar costes.

Imágenes de los autores.

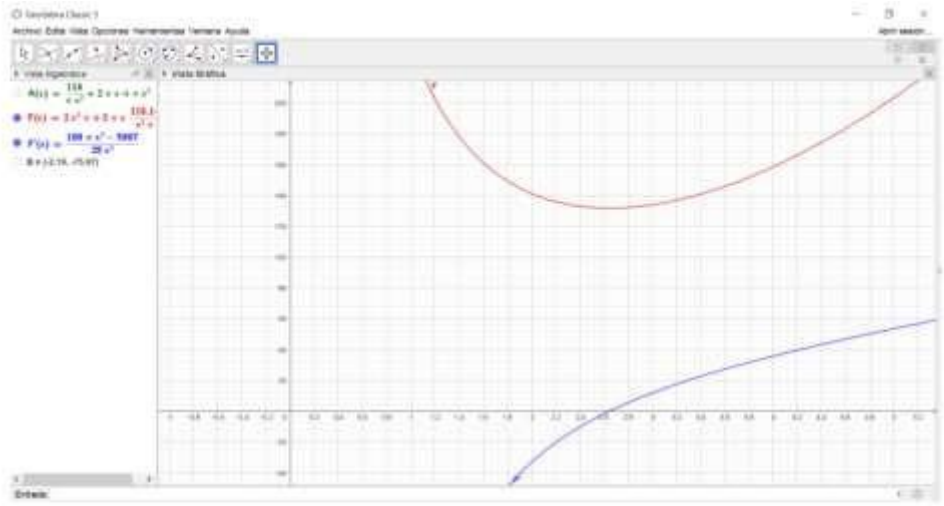
Igual que en el caso anterior, se les proporcionó un modelo dinámico construido con GeoGebra (*aquí*) para mejorar la comprensión del problema, así como instrumentos de medida y ordenadores portátiles, y se les pidió elaborar un informe explicando lo realizado y contestando a preguntas como: ¿Era óptima nuestra lata? Si no es así ¿Cuánto material (en términos absolutos y relativos) podría haberse ahorrado? ¿Qué margen de error tienen las medidas que tomamos? ¿Cuántos decimales tiene sentido tomar?

Incluimos algunos extractos de estos informes:

Acto seguido, necesitamos ver cual es su punto mas bajo, a ojo no se puede, pero si hacemos su derivada, podemos ver por que punto corta en el 0X, y asi, saber el radio aproximado que deberia de tener la lata:



Se veria asi, ahora, si hacemos una intersección entre la derivada y el eje horizontal, nos daria el tamaño del radio para que la lata contenga $500cm^3$ aprox y con la menor superficie posible, el cual seria 4,3 $\approx$, si hacemos f(4,3013) sale que tendriamos una superficie de 348,73, y f(3,25) es 389,88, si



Si observamos con delicadeza podemos llegar a observar que el radio optimo tendría que ser 2.6cm, el diámetro optimo seria como 5.2cm y la altura optima seria unos 130cm. Esta seria las mejores mediadas para tener el mismo volumen que la original, pero usando menos materiales.

En conclusión es mejor que sea más alta en ver de ser tan ancha como es mi lata ya que podíamos ahorrar bastante material ya que es mejor que sea alta y fina en ver de baja y gorda.

Conclusiones

Creemos que la profundidad y el rigor no están reñidos con las conexiones con la "vida real". De hecho, éstos son problemas que se han hecho siempre, pero normalmente descontextualizados ¿Merece la pena el tiempo extra invertido? Es cierto que no incidimos tanto en la operatividad (los cálculos los hace GeoGebra, aunque el alumno tiene que decidir qué cálculos, para qué, qué soluciones son válidas…) sino en el sentido de lo que aprenden, que creemos sale reforzado.

Como siempre que hacemos una actividad de este tipo, vemos la perplejidad de muchos alumnos que aún no tienen claro lo que es una variable o una función, aunque sepan manipularlas algebraicamente; normalmente las han estudiado de forma abstracta y no siempre han asimilado del todo el concepto. Además, algunos se sienten inseguros: quieren instrucciones continuamente, en lugar de pensar y hacerlo solos.

También les cuesta mucho explicar en un informe lo que han hecho (para algunos es la primera vez). A las dificultades tecnológicas (desconocimiento del editor de ecuaciones o de gráficos) se une un déficit comunicativo importante; es muy común, por ejemplo, que crean que explicar o justificar consiste en traducir la notación matemática. “He igualado la función a 0 y he resuelto la ecuación y me ha dado que x vale 4.75”. Como se les han hecho anotaciones en la corrección y se han permitido reentregas, en el segundo trabajo se observó cierta mejoría en este aspecto.

Dada la importancia de las competencias matemáticas que se involucran, creemos que precisamente estas dificultades justifican la necesidad de seguir realizando este tipo de actividades.

Una trayectoria hipotética de aprendizaje para construir el concepto de límite de una función en un punto

Joan Pons Tomàs

joanpons50@yahoo.es

Profesor IES Mutxamel

Julia Valls González

julia.valls@ua.es

Profesora colaboradora honorífica Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Núcleo temático: Procesos. Formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo presentar una trayectoria hipotética de aprendizaje de límite de una función en un punto, en el contexto de estudiantes de primer curso de bachillerato de Ciencias que se inician en la noción de límite. Las dificultades que presenta el concepto de límite, y el poco éxito que tienen los estudiantes en la comprensión de este importante concepto matemático, nos ha llevado a investigar estrategias pedagógicas que nos ayuden a superar esta situación. La trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 2022) propuesta tiene como objetivo que los estudiantes obtengan una sólida imagen del límite de una función, compatible con la definición formal. La propuesta consta de diez tareas asociadas a dos límites que se presentan en diferentes modos de representación.

Palabras clave: trayectoria hipotética de aprendizaje, descomposición genética, límite de una función, estudiantes de bachillerato, modos de representación

1. Introducción

La noción de límite es un concepto fundamental del análisis matemático. El primer contacto que tienen los estudiantes con la noción de límite, lejos de ser la definición formal, suele ser la idea de aproximación (Cornu, 1991) mediante la concepción dinámica de límite. La primera dificultad con la que se encuentran los estudiantes es diferenciar entre la imagen y la definición del concepto. La imagen del concepto describe la estructura cognitiva asociada al concepto, e incluye representaciones mentales y propiedades. La definición del concepto es la definición formal (Tall y Vinner, 1981). En general, los estudiantes tienen dificultades para obtener una sólida y fiable imagen del concepto de límite, pero es complicado encontrar soluciones a esta situación (Mamona-Downs, 2001). La revisión de diferentes trabajos (Arce et al., 2016; Arias, 2019; Elia et al., 2009; Paez y Hitt, 2003; Pons et al., 2022; Pons y Valls, 2023a, 2023b, 2023c; Valls et al., 2011) sobre cómo los estudiantes comprenden el concepto de límite de una función y las dificultades que tienen nos ha permitido identificar, a lo largo del tiempo, diferentes propuestas didácticas, como las descomposiciones genéticas de Cottrill et al. (1996) y de Swinyard y Larsen (2012); las propuestas pedagógicas de Mamona-Downs (2001) y Aquere et al. (2009); y trayectorias hipotéticas de aprendizaje, Mira, et al., (2013), que pasamos a describir a continuación.

1.1. Descomposición Genética de Cottrill et al. (1996)

Esta propuesta didáctica está dirigida a estudiantes de un curso experimental de cálculo y consiste en una combinación de actividades computacionales, trabajos de clase sin ordenador, y debates donde los estudiantes podían reflexionar sobre lo que habían hecho utilizando ordenadores y lo que habían hecho con lápiz y papel. Los autores en su propuesta plantearon una descomposición genética, entendida como un modelo cognitivo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante necesita construir con la finalidad de aprender una noción matemática, en este caso, el concepto de límite de una función. La construcción de esta descomposición genética se llevó a cabo mediante un análisis

de la forma en que posiblemente los estudiantes podrían construir el concepto. Esta descomposición genética constaba de siete niveles:

Nivel 1. La acción de evaluar *f* en un solo punto *x*, considerado próximo, o a veces igual a "*a*".

Nivel 2. La acción de evaluar la función *f* en unos pocos puntos, que de forma sucesiva están cada vez más próximos a "*a*".

Nivel 3. Construcción de un esquema de coordinación como:

a. Interiorización de la acción del Nivel 2 para construir un proceso en el dominio mediante el cual *x* tiende a "*a*".

b. Construcción de un proceso en el rango mediante el cual *f(x)* tiende a *L*.

c. Coordinación de los niveles 3a y 3b, mediante *f*. Es decir, la función *f* se aplica al proceso de *x* tendiendo a "*a*" para obtener el proceso de *f(x)* tendiendo a *L*.

Nivel 4. Realizar acciones con el concepto de límite sobre, por ejemplo, límite de combinaciones de funciones. En este sentido, el esquema del nivel 3 es encapsulado para llegar a ser un objeto.

Nivel 5. Reconstrucción del proceso de coordinación del nivel 3c en términos de intervalos y de desigualdades como estimaciones numéricas de la proximidad de las tendencias, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nivel 6. Aplicar el esquema de los cuantificadores para reconstruir el proceso de los niveles 3 y 4 para obtener la definición formal de límite.

Nivel 7. Aplicar la concepción ε-δ en situaciones específicas.

No hubo ningún estudiante que progresara más allá de los niveles 6 y 7 de la descomposición genética. La principal aportación pedagógica estaba basada en la

construcción de un proceso en el dominio y un proceso en el rango utilizando la función para coordinarlos.

1.2. La descomposición genética de Swinyard y Larsen (2012)

Swinyard y Larsen (2012) para su estrategia didáctica construyeron una descomposición genética con seis niveles, los tres primeros forman parte de la descomposición genética propuesta por Cottrill et al. (1996), y los otros tres fueron propuestos por ellos:

Nivel 1. La acción de evaluar *f* en un solo punto *x*, considerado próximo a "a", o a veces igual a "*a*".

Nivel 2. La acción de evaluar la función *f* en unos pocos puntos, que de forma sucesiva están cada vez más próximos a "*a*".

Nivel 3. Construcción de un esquema de coordinación como:

a. Interiorización de la acción del Nivel 2 para construir un proceso en el dominio mediante el cual *x* tiende a "*a*".
b. Construcción de un proceso en el rango mediante el cual *y* tiende a *L*.
c. Coordinación de los niveles 3a y 3b, mediante *f*. Es decir, la función *f* se aplica al proceso de *x* tendiendo a "*a*" para obtener el proceso de *f(x)* tendiendo a *L*.

Nivel 4. Construir un proceso mental en el cual se pone a prueba si un valor, previamente elegido, es un límite:

a. Elegir una medida de proximidad al valor límite *L* a lo largo del eje y.
b. Determinar si hay un intervalo alrededor del punto *a*, para el que cada valor de la función, excepto el del punto a, sea suficientemente próximo a *L*.
c. Repetición del apartado anterior para medidas cada vez más pequeñas en proximidad.

Nivel 5. Asociación de la existencia de un límite con la capacidad de continuar (teóricamente) este proceso, siempre sin dejar de producir el intervalo

deseado alrededor del punto *a*, o equivalentemente con la observación de que no hay ningún punto en el que es imposible encontrar ese intervalo.

Nivel 6. El encapsulamiento de este proceso mediante el concepto de proximidad arbitraria, que implica darse cuenta de que el proceso en el paso 4 funcionará para cada posible medida de proximidad, comprobando que funcionará para una medida de proximidad arbitraria.

La estrategia para reinventar la definición formal de límite sugiere que la habilidad de utilizar de forma flexible, tanto la perspectiva del esquema de coordinación (nivel 3) en la concepción dinámica de límite (Blázquez y Ortega, 2002): sea *f* una función y *a* un número real, el número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y debería de escribirse, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si cuando *x* tiende al número *a*, siendo distinto de *a*, sus imágenes, *f(x),* tienden a *L*; como la perspectiva formal (Nivel 4)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

permite a los estudiantes desarrollar una rica y robusta comprensión del concepto de límite y de su definición formal.

1.3. La propuesta pedagógica de Mamona–Downs (2001)

Esta propuesta tenía por objetivo presentar una secuencia didáctica para qué los estudiantes discutieran sus intuiciones y, partiendo de ellas, avanzaran en la comprensión de la definición formal de límite de una sucesión. Esta propuesta sobre la enseñanza introductoria del concepto de límite se basaba en tres niveles didácticos:

Nivel 1. Iniciar y desarrollar las intuiciones que se han producido como consecuencia de las discusiones promovidas en el entorno del aula. (Concepciones espontaneas).

Nivel 2. Introducir la definición formal y analizarla conjuntamente con las cuestiones que han aparecido en el primer nivel. Introducir una

representación particular.

Nivel 3. Hacer suyas o revocar las opiniones dadas en el primer nivel mediante la comparación con la definición formal dada en la representación del segundo nivel.

Su estrategia era identificar el núcleo central de la definición (la distancia entre un término de la sucesión y el límite han de ser menor que cualquier número dado) y construir la comprensión de límite en los estudiantes, paso a paso, empezando por el núcleo central.

1.4. La propuesta pedagógica de Aquere et al. (2009)

Esta propuesta está dirigida a estudiantes de educación post-obligatoria y consistía en una reflexión sobre las dificultades con las que podían encontrarse los estudiantes, asumiendo que si hay construcción hay proceso y en el camino nace la posibilidad de enfrentarse a errores. Las características de esta propuesta fueron:

1. Trabajar colaborativamente en pequeños grupos para que cada uno de los estudiantes del grupo defendiese su postura.
2. Aprender a confrontar ideas que en muchos casos son diferentes entre compañeros, consensuando cuál debía ser la postura tomada para la resolución y la entrega.
3. Analizar enunciados, observar, comparar, discriminar, interpretar datos o información presentada en distintas representaciones algebraicas, numéricas, tabulares y gráficas, realizando procesos de conversión entre los diferentes tipos de representaciones.
4. Escribir y hacer transferencias en diferentes registros de representaciones del límite.
5. Conseguir justificar y consensuar entre los integrantes del grupo, sobre los errores cometidos, mediante la auto-reflexión, la escritura simbólica y el lenguaje natural.

El trabajo colaborativo, en pequeños grupos, fue una estrategia acertada al conseguir que los miembros de los grupos resolvieran las diferentes actividades y,

posteriormente, participaran en el debate para revisar y analizar los errores desde la óptica de los diferentes grupos de trabajo.

1.5. La trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de límite de Mira et al. (2013)

Esta trayectoria está dirigida a estudiantes de educación post-obligatoria. Este modelo teórico (Simon, 2022) consta de tres componentes:

a) un objetivo de aprendizaje, que en el caso de Mira et al. (2013) fue (1) recordar aspectos relativos a las funciones, y (2) desarrollar el significado de tendencia, de aproximación y de límite, integrando distintos modos de representación (algebraico, gráfico y numérico);

b) un hipotético proceso de aprendizaje, que en este caso está formado por los siguientes niveles de progresión del aprendizaje:

Nivel 1. Hallar la imagen de un punto a través de la función *f*.

Nivel 2. Realizar aproximaciones a un punto "*a*"

Nivel 3. Discriminar los límites laterales, estableciendo relaciones entre estos y la existencia del límite de la función en diferentes modos de representación.

Nivel 4. Coordinar los procesos *f(x)* se acerca a *L*, como *x* se acerca a "*a*".

Nivel 5. Establecer el límite como cuantificación de distancias métricas que tienden a cero.

c) un conjunto de tareas, que en este caso fueron una combinación de actividades de iniciación, de reflexión y de anticipación, utilizando el soporte computacional del programa *Matemáticas Derive 6.0* que permitió centrar las gráficas y hacer zoom. Estas tareas presentaban las siguientes características:

1. Identificar, reconocer y producir aproximaciones laterales a un punto,

representando esos procesos mediante diferentes registros (numéricos, tabulares y gráficos).

2. Identificar las tendencias laterales de una función, representando esos procesos.
3. Diferenciar los límites laterales, coincidentes y no coincidentes, y caracterizar gráficamente la existencia o no existencia del límite finito.
4. Relacionar las aproximaciones a un punto con las distancias y estimar la más óptima como la que nos llevará al límite, representando esos procesos.
5. Identificar las tendencias coordinadas a cero de las distancias al punto y límite en el dominio y en el rango de la función como límite por aproximación métrica.

Mira et al. (2013), en sus conclusiones indican que la construcción por parte de los estudiantes del significado de cuantificación vinculada a la doble aproximación intuitiva posiblemente favorezca la construcción del significado del concepto de límite, las evidencias reunidas parecen apoyar la conjetura de que es el requerimiento de construir un esquema implicando la coordinación de dos procesos junto con la necesidad de un uso sofisticado de la idea de cuantificación lo que dificulta el proceso de construcción del significado de límite.

Las propuestas didácticas reseñadas señalan que la comprensión del límite de una función en un punto contiene diferentes objetos que van más allá de la mera definición formal. Además, es necesario diferenciar el objeto matemático de límite de una función de su representación (Duval, 2006); relacionar las tendencias de los valores de la función con las tendencias de los valores en el dominio, a fin de potenciar una comprensión que vaya más allá de la manipulación procedimental, así como considerar el desarrollo de la comprensión como un concepto dinámico que vaya incorporando nuevos elementos.

Partiendo de las consideraciones anteriores, nos hemos planteado como objetivo presentar una trayectoria hipotética de aprendizaje de límite de una función en un punto y, específicamente, en el contexto de estudiantes de primer curso de bachillerato de Ciencias que se inician en la noción de límite.

1. Una propuesta de trayectoria de aprendizaje para el concepto de límite de una función en un punto

Esta propuesta se integra en una problemática más general de aspecto cognitivo que tiene como objetivo favorecer que el alumnado de bachillerato (16-18 años) aprenda significativamente el concepto de límite de una función en un punto. La trayectoria de aprendizaje que se presenta va dirigida a estudiantes de primer curso de Bachillerato (educación post obligatoria). En esta propuesta, el objetivo de aprendizaje, proviene del currículum de la enseñanza postobligatoria en la materia de Matemáticas I, y viene definido como: estimar y calcular, a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica, el límite de una función (BOE, 2022, p. 265). La segunda componente, el proceso hipotético de aprendizaje, está basado en la descomposición genética (Arnon et al., 2014; Cottrill et al, 1996) y las investigaciones realizadas por los autores (Pons, 2014; Pons y Valls, 2023a, 2023b, 2023c). La tercera componente, el conjunto de tareas, son diez tareas que muestran dos límites presentados en distintos modos de representación, en uno las tendencias laterales de la función coinciden, y en el otro no coinciden. Pasamos a describir con detalle, la segunda y tercera componente.

2.1. Proceso hipotético de aprendizaje del concepto de límite de una función

El proceso hipotético de aprendizaje de límite de una función se presenta como una descomposición genética en la que se han tenido en cuenta, dos perspectivas, la dinámica (Tabla 1) y la métrica (Tabla 2). Este hipotético proceso de aprendizaje se plantea desde los valores de la función, puesto que la definición formal se inicia con los entornos de la función.

Tabla 1. Proceso hipotético de aprendizaje de la concepción dinámica de límite de una función en un punto

Nivel 1. Obtener el valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$	
Nivel 2. Establecer tendencias por la izquierda: a. f(x) tiende a L_1 b. x tiende por la izquierda al punto "a"	Concepción dinámica de límite por la izquierda de una función
Nivel 3. Coordinar por la izquierda las imágenes f(x) tienden a L_1, cuando x tiende por la izquierda, al número a^-	
Nivel 4. Establecer tendencias por la derecha: a. f(x) tiende a L_2 b. x tiende por la derecha al punto "a"	Concepción dinámica de límite por la derecha de una función
Nivel 5. Coordinar por la derecha las imágenes f(x) tienden a L_2, cuando x tiende por la derecha, al número a^+	
Nivel 6. Establecer las tendencias: a. f(x) tiende a $L=L_1= L_2$ b. x tiende al número "a"	Concepción dinámica de límite de una función
Nivel 7. Coordinar las imágenes a. f(x) tienden a L, cuando x tiende al número a b. f(x) no tienden a L, cuando x tiende al número a, al ser $L_1 \neq L_2$	
Nivel 8. Expresar la existencia de: a. Límite L de la función en el punto a b. Límites laterales diferentes de f(x) en el punto a	

Tabla 2. Proceso hipotético de aprendizaje de la concepción métrica de límite de una función en un punto

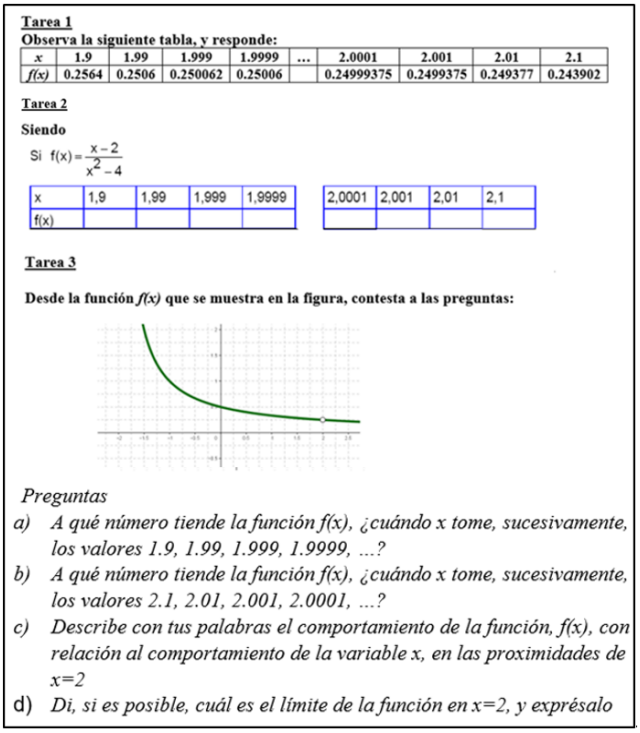
Nivel 1. Establecer distancias por la izquierda: a. Distancia entre f(x) y L_1 b. Distancia entre x y a, siendo $x<a$	Concepción métrica de límite por la izquierda de una función
Nivel 2. Coordinar por la izquierda las distancias $\lvert f(x) - L_1 \rvert$ tienden a 0, cuando las distancias $\lvert x - a \rvert$ tienden a 0, siendo $x < a$	
Nivel 3. Establecer distancias por la derecha: a. Distancia entre f(x) y L_2 b. Distancia entre x y a, siendo $x>a$	Concepción métrica de límite por la derecha de

Nivel 4. Coordinar por la derecha las distancias $\|f(x) - L_2\|$ tienden a 0, cuando las distancias $\|x - a\|$ tienden a 0, siendo $x > a$	una función
Nivel 5. Coordinar las distancias: a. $\|f(x) - L\|$ tienden a 0, cuando las distancias $\|x - a\|$ tienden a 0, siendo $L=L_1=L_2$ b. $\|f(x) - L\|$ no tienden a 0, cuando las distancias $\|x - a\|$ tienden a 0, siendo $L_1 \neq L_2$	Concepción métrica de límite de una función

2.2. Conjunto de tareas de la trayectoria de aprendizaje del concepto de límite de una función

Para la propuesta del conjunto de tareas se han tenido en cuenta los resultados de distintas investigaciones realizadas por los autores de esta comunicación (Pons y Valls, 2023a, 2023b, 2023c), entre los que destacamos: (a) los estudiantes, independientemente del modo de representación o de la coincidencia o no de las tendencias laterales, tienen mayores dificultades para comprender las concepciones laterales por la derecha, que por la izquierda, así como de comprender la concepción dinámica cuando las tendencias laterales de la función no coinciden, que cuando estas coinciden (Pons y Valls, 2023b, 2023c); (b) si un estudiante comprende la concepción dinámica por la derecha, entonces es probable que comprenda la misma concepción por la izquierda (Pons y Valls, 2023c); (c) los estudiantes inician la comprensión de la concepción dinámica en modo numérico, progresan en modo algebraico-numérico y la consolidan en modo gráfico, independientemente de que las tendencias laterales de la función coincidan o no (Pons y Valls, 2023c); (d) los estudiantes deberían comprender que el límite no es el valor de la función en el punto, sino lo que pasa en las proximidades del punto (Pons y Valls, 2023b); (e) los estudiantes inician su capacidad para explicar el significado de límite con funciones en modo algebraico-numérico y, la consolidan en modo gráfico de representación (Pons y Valls, 2023a).

En función de estos resultados se han generado un conjunto de diez tareas, Las seis primeras hacen referencia a la concepción dinámica de límite de una función en un punto. Las tareas 1, 2 y 3 representan el mismo límite en modo numérico (N), algebraico-numérico (AN) y gráfico (G), respectivamente, con tendencias laterales coincidentes, y con idénticas preguntas que hacen referencia a la concepción dinámica de límite. (Figura 1). La tarea 2 es una adaptación de Engler et al. (2007).



Tarea 1

Observa la siguiente tabla, y responde:

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	0.2564	0.2506	0.250062	0.25006		0.24999375	0.2499375	0.249377	0.243902

Tarea 2

Siendo

Si $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)								

Tarea 3

Desde la función *f(x)* que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

Preguntas

a) *A qué número tiende la función f(x), ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, ...?*

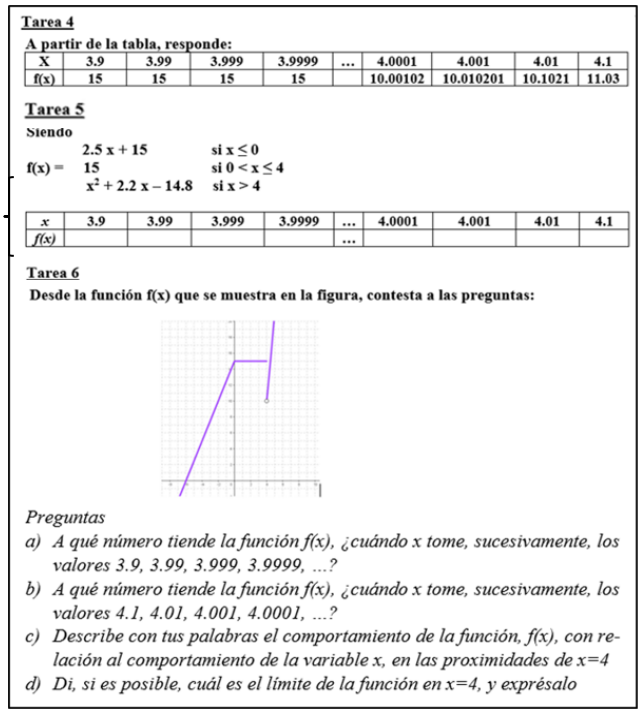
b) *A qué número tiende la función f(x), ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ...?*

c) *Describe con tus palabras el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x, en las proximidades de x=2*

d) *Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x=2, y exprésalo*

Figura 1. Tareas 1, 2 y 3 en modos de representación N, AN y G

Las tareas 5, 6 y 7 presentan el mismo límite en modos de representación numérico (N), algebraico-numérico (AN) y gráfico (G), respectivamente, con tendencias laterales no coincidentes y con idénticas preguntas que hacen referencia a la concepción dinámica (Figura 2).



Tarea 4

A partir de la tabla, responde:

X	3.9	3.99	3.999	3.9999	…	4.0001	4.001	4.01	4.1
f(x)	15	15	15	15		10.00102	10.010201	10.1021	11.03

Tarea 5

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2.5\,x + 15 & \text{si } x \le 0 \\ 15 & \text{si } 0 < x \le 4 \\ x^2 + 2.2\,x - 14.8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	…	4.0001	4.001	4.01	4.1
f(x)					…				

Tarea 6

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

Preguntas

a) A qué número tiende la función f(x), ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999, 3.9999, …?

b) A qué número tiende la función f(x), ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001, 4.0001, …?

c) Describe con tus palabras el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x, en las proximidades de x=4

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x=4, y exprésalo

Figura 2. Tareas 5, 6 y 7 en modos de representación N, AN y G

Las preguntas planteadas en las seis tareas, descritas en los párrafos anteriores, obligan al estudiante a hacer un razonamiento desde la perspectiva dinámica del eje OY (puesto que la definición formal se inicia con los entornos de la función), *y* a establecer una imagen de la concepción dinámica de límite a través de una aproximación arbitrariamente próxima de los valores de la variable independiente, imagen compatible con la definición formal (Roh,2008), para, posteriormente, poder comprender la complejidad y la sutileza de la definición formal (Swinyard, 2011).

Estas seis tareas tienen como objetivos:

1. Colaborar y cooperar con otros para afianzar nuevos conocimientos, intercambiando ideas y reflexionando sobre ellas.
2. Utilizar la idea de función real de variable real para calcular valores cada vez más cercanos a "*a*".
3. Reconocer tendencias laterales a un punto.
4. Calcular, en distintos modos de representación, las tendencias laterales de una función, observando si son o no coincidentes.
5. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual o colectiva, expresando los hechos, los conceptos y los procedimientos de forma verbal, analítica o gráficamente.

Por su parte, las tareas 7 y 8, presentan los dos límites en modos algebraico y gráfico, respectivamente, cuando las tendencias laterales coinciden, T7, y no coinciden, T8. Estas tienen como objetivo que el estudiante pueda recorrer el camino inverso, es decir, que sea capaz de explicarle a un hipotético estudiante el significado de límite de una función en un punto (Figura 3).

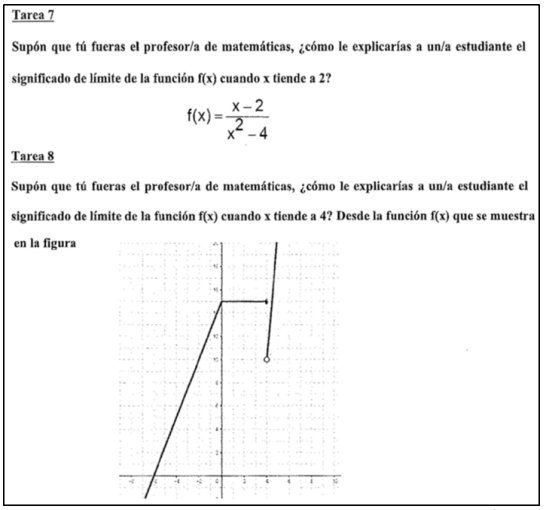


Figura 3. T7 en modo algebraico y T8, en modo gráfico

Finalmente, las tareas 9 y 10, en modos algebraico y numérico, respectivamente, cuando las tendencias laterales coinciden, T9, y no coinciden, T10 (Figura 4), tienen como objetivo:

1. Calcular las distancias laterales respecto de *a* y de *f(a),* observando si tienden o no a cero.
2. Descubrir vínculos entre conceptos matemáticos presentados en diferentes modos de representación.
3. Utilizar el pensamiento computacional para identificar los aspectos más relevantes del cálculo de límites para descomponer el problema y poderlos codificar.

Tarea 9

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Tarea 10

A partir de la tabla, responde:

X	3.9	3.99	3.999	3.9999	…	4.0001	4.001	4.01	4.1
f(x)	15	15	15	15		10.00102	10.010201	10.1021	11.03

Preguntas

a. Representa la gráfica de la función f(x).

b. Elabora una tabla de valores de la función cuando la variable independiente tome valores próximos a x=2, por la izquierda y por la derecha (T9)

c. Elabora una tabla con las distancias entre los valores de la función y 0.25 (T9) y 15 (T10), por la derecha y por la izquierda. ¿Cómo son esas distancias conforme la f(x) tiende a 0,25 (T9) a 15 (T10)? ¿A qué número tienden los valores de las distancias cuando f(x) tiende a 0,25 (T9) a 15 (T10)?

d. Elabora una tabla con las distancias entre los valores de la variable independiente y el valor x=2 (T9) y x=4 (T10), por la derecha y por la izquierda. ¿Cómo son esas distancias conforme la x tiende a 2 (T9), a 4 (T10)? ¿A qué número tienden los valores de las distancies cuando x tiende a 2 (T9), a 4 (T10)?

e. Elabora una tabla con las distancias entre los valores de la función y 0.25 (T9) y 15 (T10) y entre los valores de la variable independiente y el valor x=2 (T9) y x=4 (T10). Observa de forma conjunta la tendencia de los valores de las dos distancies anteriores.

Figura 4. Tarea 9 en modo Algebraico y T10 en modo Numérico

Conclusión

El objetivo de este trabajo ha sido presentar una trayectoria hipotética de aprendizaje de límite de una función en un punto y, específicamente, en el contexto de estudiantes de primer curso de bachillerato de Ciencias que se inician en la noción de límite.

La trayectoria hipotética de aprendizaje de límite propuesta en esta comunicación se integra en una problemática más general de aspecto cognitivo que tiene como objetivo favorecer que el alumnado de bachillerato (16-18 años) aprenda significativamente el concepto de límite de una función en un punto.

Para alcanzar el objetivo de educación postobligatoria “estimar y calcular el límite de una función a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica (BOE, 2020, p. 265)” se ha propuesto un proceso hipotético de aprendizaje basado en las perspectivas dinámica y métrica de límite de una función, apoyándose en la idea de que no se debe iniciar a los estudiantes con la definición formal de límite, en consonancia con las propuestas de Cottrill et al. (1996), Mamona- Downs (2001), Aquere et al. (2009), Swinyard y Larsen (2012) y, Mira et al. (2013). Se han planteado un conjunto de diez tareas en tres modos de representación: Numérico, Algebraico-Numérico y Gráfico. En todas ellas se han diferenciado dos clases de funciones según las tendencias laterales fuesen coincidentes o no coincidentes. Con las seis primeras

tareas los estudiantes podrían construir la concepción dinámica de límite en términos de tendencias; con la séptima y octava tarea, invertir el sentido, es decir, explicar, a otro estudiante, cuál es su imagen del significado de límite y, por último, con la novena y décima de las tareas, construir la concepción métrica de límite en términos de distancias.

Bibliografía

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias, nº 34* (1), 149-179. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1706

Aquere, S., Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., Gregorini, M., y Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Premisa, nº 40*, 14-24.

Arias, A.N. (2019). *Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación.* Tesis Doctoral. Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç. A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, nº. 30,* 67-82.

Cornu, B. (1991). *Limits.* In D. Tall (Ed.), Advances Mathematical Thinking (pp. 153–166). Kluver.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, nº. 15* (2), 167–192. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(96)90015-2

Duval, R (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, nº. 61,* 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Elia, I., Gagatsssi, A., Panaoura, A., Zachariades, T. y Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, nº. 7 (*4), 765-790. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-009-9149-z

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, D., Müller, D. y Gregorini, M.I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite de una función de variable finita. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº. 11*, 11-132.

Mamona–Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, nº. 48,* 259–288. https://doi.org/10.1023/a:1016004822476

Mira, M., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº. 36,* 89-107.

Páez, R.E. y Hitt, F. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, nº. 32*, 97-108.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante).

Pons, J., Valls, J. i Llinares, S. (2022). Influencia de los modos de representación en la imagen de límite de una función en estudiantes de bachillerato. *XIX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (19 JAEM),* 153-180. Asociación Galega de Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA).

Pons, J. i Valls, J. (2023a). ¿Cómo explican los estudiantes de bachillerato su imagen intuitiva de límite de una función? *XX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza*

de las Matemáticas (20 JAEM), 221-238. Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi". FESPM.

Pons, J. i Valls, J. (2023b). Dificultats que presenten els estudiants de batxillerat al construir la imatge de límit d'una funció en un punt. *XIV Jornades de la Comunitat Valenciana. Societat d'Educació Matemàtica del País Valenciá*. SEMPV.

Pons, J. i Valls, J. (2023c). La construcción de la imagen de la concepción dinámica de límite. Un análisis implicativo. En J.C. Régnier, *Analyse statistique implicative. Aplications multidisciplinaires d'une analyse quali-quantitative des associations orientées entre variables ou grupe de variables*, 200-219. Actes du 12eme colloque sur l'ASI.

Real Decreto 242/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, BOE, núm. 82, de 6 de abril de 2022

Roh, K. (2008). Students' Images and their Understanding of Definition of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics, nº. 69*, 217-233. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Simon, M. (2022). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. In *Encyclopedia of mathematics education,* 354-357. Cham: Spring International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. T*he Journal of Mathematical Behavior, nº. 30* (2), 93-114. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.001

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, nº. 43* (4), 465-493. http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, nº. 12* (2), 151–169. http://dx.doi.org/10.1007/bf00305619

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, nº. 29*(3), 325-338. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.637

Las Matemáticas en el Bachillerato Andorrano

Yolanda Colom Torrens
ycolom@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya

Núria Rosich Sala
nuriarosich@ub.edu
Universitat de Barcelona

Núcleo temático: Procesos

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Bachillerato

RESUMEN

La introducción de las competencias matemáticas en los currículos escolares de los últimos años ha propiciado la realización de la modelización entre las actividades matemáticas. Presentamos aquí las relaciones entre las competencias matemáticas y los procesos de modelización, siguiendo el modelo de Bloom y Leis (2006) de la escuela andorrana en el bachillerato. El principal objetivo es mostrar un ejemplo de proyecto matemático de las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales en el que la modelización matemática está presente en todo momento. Explicando el desarrollo de dicha unidad y mostrando las producciones finales de los alumnos. Destacando el trabajo colaborativo de los alumnos y focalizando el proceso de aprendizaje debido a la modelización matemática.

Palabras clave: Modelización matemática, proyectos, resolución de problemas

1. Introducción

La modelización matemática es uno de los temas más relevantes de las últimas reformas educativas llevadas a cabo en los distintos países occidentales. En nuestro caso queremos mostrar las relaciones existentes entre la modelización y las competencias matemáticas en las unidades didácticas que realizan los alumnos de bachillerato de la escuela andorra.

En el sistema andorrano se realiza una enseñanza basada en un modelo competencial. Y dentro del modelo competencial la idea de modelización matemática tiene un papel muy destacable. Por este motivo, es muy importante que los alumnos entiendan en que consiste la modelización que es diferente a resolver problemas de matemáticas. Deben de comprender que en nuestro entorno se dan situaciones que en un principio puede parecer que no tienen relación con las matemáticas, pero una vez se planteen alguna situación real donde estas están presentes, verán que para resolverla será preciso recurrir a ellas.

En este tipo de actividades de modelización es muy importante la planificación, tener claros los objetivos y prever que preguntas, soluciones, metodologías podemos esperar de los alumnos y como se realizará la evaluación.

También conviene que los alumnos experimenten la autonomía en la realización de su proyecto. Los alumnos deben de ser los buscadores de las respuestas, Blomhoj y Kjeldsen (2006) ya que según estos autores consideran crucial como se realiza la puesta en escena del trabajo.

2. Referentes teóricos

Dado que el contexto de estudio de nuestra investigación es la Escuela Andorrana de Bachillerato, dedicamos este apartado del Marco Teórico a describir el currículum del Bachillerato General Andorrano, en general y las asignaturas de matemáticas, en particular

2.1. Curriculum del Bachillerato General Andorrano

En este apartado trataremos la idea de modelización que compartimos y desde la cual se trabaja con los alumnos de bachillerato andorrano.

La modelización matemática es uno de los temas más relevantes en la educación matemática de los últimos 40 años, pero no siempre ha sido así, hasta finales de los años 70 del siglo pasado era prácticamente un tema que no preocupaba demasiado en los currículos escolares. A finales del siglo XX aparecen cambios importantes en el mundo de la educación. El más destacable a nuestro parecer, es la aparición de las competencias en los currículos escolares en la mayoría de los países del mundo occidental. Este enfoque fuerza la idea de una enseñanza significativa de las matemáticas, situando los problemas en contextos reales para que los alumnos sepan ver y plantear las matemáticas del mundo donde vivimos. En España aparecen las competencias a partir de la LOE (2006) y su desarrollo curricular el año 2007.

Entre los distintos modelos de modelización existentes hemos elegido en nuestro caso el de Blum i Leiss (2007), porqué entendemos que da una visión más profunda y global de todo el proceso, pero lo tomamos en su forma más simplificada que es el que aparece en la documentación de las pruebas PISA. el cual mostramos su esquema en la figura 1

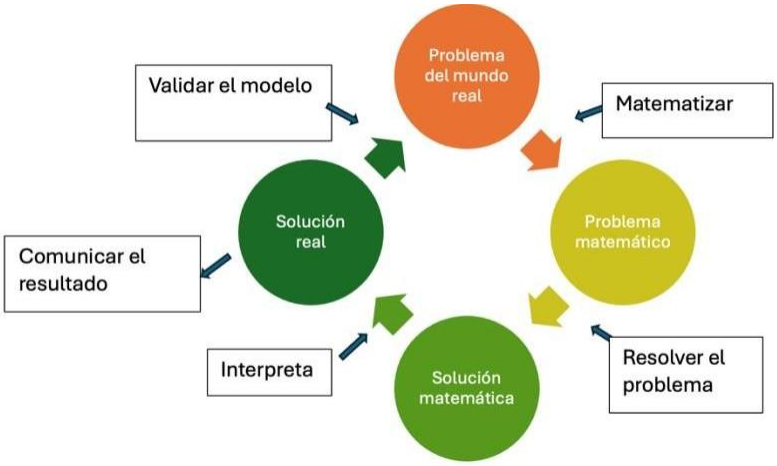


Imagen.1. Representación del ciclo de modelización de PISA 2003

En el caso andorrano la reforma del currículum parte de la última reforma educativa[36] llevada a cabo en el año 2021. En dicha ley se concretan las finalidades, la estructura, la evaluación y la titulación que han de tener los docentes para ejercer en este nivel educativo.

El Decreto está formado por 63 artículos, distribuidos en 9 capítulos, una disposición transitoria, una disposición derogatoria y tres disposiciones finales.

El Plan de Estudios de bachillerato que es él nos ocupa se distribuye en 5 bloques, entre asignaturas obligatorias y de libre elección. Las matemáticas se encuentran en el bloque cuatro, junto a las ciencias y se diferencian en: a) matemáticas científicotécnicas (4h) y b) Matemáticas aplicables a las Ciencias Sociales (4h).

2.1.1 Programa

El programa es el "documento oficial que ordena la enseñanza, el aprendizaje y evaluación en el nivel de bachillerato del sistema educativo andorrano" (Artículo 17).

Los elementos curriculares del programa son (Artículo 18):

1. **Competencias específicas**: recursos de aprendizaje necesarios para afrontar exitosamente situaciones complicadas o problemas de la vida diaria relacionados con una o varias asignaturas de un determinado ámbito de conocimiento.

2. **Competencias transversales**: recursos de aprendizaje que se requieren para resolver con éxito situaciones complejas o problemas de la vida real relacionados con todas las disciplinas escolares o aspectos multidisciplinares.

3. **Recursos de aprendizaje**: conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales necesarios para desarrollar las competencias específicas y transversales.

[36] (Decret del 7-3-2019 d'ordenament del nivell de batxillerat general del Sistema Educatiu Andorrà. BOPA núm. 25)

4. **Expectativas de fin de ciclo**: indican el nivel de desarrollo esperado de las competencias, específicas y transversales, al final de cada ciclo.

5. **Criterios de evaluación**: calidades de las competencias que permiten emitir un juicio de valor sobre el desarrollo competencial de los alumnos.

2.2 La competencia matemática

Se define en el Decreto del programa de la asignatura de matemáticas científicotécnicas del bachillerato general de la Escola Andorrana (2019), como “la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas en una gran variedad de situaciones y contextos”. p.3. Es decir, adquirir unas destrezas matemáticas y ser capaz de aplicarlas a los problemas de la realidad.

Los programas de la Escuela Andorrana de Bachillerato, en el caso de las matemáticas, contemplan los siguientes ejes didácticos: la resolución de problemas, la modelización, el razonamiento matemático y la competencia comunicativa matemática.

2.2.1 Las matemáticas científico-técnicas

Las matemáticas científico-técnicas

Se definen a partir de los cuatro ejes didácticos anteriores y de allí emergen las cuatro competencias específicas contempladas en el programa de las matemáticas científico-técnicas:

C1. Razonar matemáticamente con varios recursos lógicos.

C2. Resolver problemas matemáticos y aplicados a contextos científico-técnicos.

C3. Modelizar matemáticamente situaciones científico-técnicas usando recursos numéricos, algebraicos, funcionales o estadísticos.

C4. Comunicar con lenguaje matemático y herramientas tecnológicas los procesos y resultados de una situación matemática.

En la siguiente tabla (2) presentamos las dimensiones y criterios de evaluación que caracterizan las cuatro competencias específicas de la asignatura Matemáticas científico-técnicas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS		
	DIMENSIONES	**CRITERIOS DE AVALUACIÓN**
C . Razonar matemáticamente con diversos recursos lógicos	1. Utilizar diferentes tipologías de razonamiento matemático: inducción, deducción, analogía, reducción al absurdo. 2. Valorar la necesidad de las demostraciones matemáticas. 3. Conjeturar en lenguaje matemático. Razonamiento plausible. 4. Validar las propias conjeturas. 5. Seleccionar los criterios lógicos teniendo en cuenta las limitaciones y contrastes con otros tipos de análisis.	C1.CA1. Adecuación -Razonamiento adecuado al contexto del problema C1.CA2. Coherencia -Conexión entre los razonamientos y los argumentos matemáticos C1.CA3. Sentido Crítico -Reflexión metacognitiva sobre la validez de los razonamientos utilizados para mejorarlos o modificarlos en su caso.

C2. Resolver problemas matemáticos y problemas aplicados a contextos científico-técnicas	1. Utilizar estrategias heurísticas. 2. Seleccionar los recursos numéricos, algebraicos, funcionales o estadísticos adecuados. 3. Aplicar un plan de actuación con sentido crítico.	C2. CA1. Adecuación -Selección y aplicación de las estrategias heurísticas y de los recursos matemáticos adecuados. C2.CA2. Sentido crítico -Reflexión metacognitiva para revisar o mejorar, en su caso, el proceso de resolución de problemas, las heurísticas y los resultados. C2.CA3. Eficiencia -Utilizar los recursos y estrategias óptimas para resolver los problemas.
C . Modelizar matemáticamente situaciones científico-técnicas usando recursos numéricos, algebraicos, funcionales o estadísticos	1. Formular modelos matemáticos a partir de situaciones reales. 2. Desarrollar el modelo matemático experimentando con recursos numéricos, algebraicos, funcionales o estadísticos. 3. Revisar críticamente el modelo inicial a la vista de sus resultados. 4. Rehacer el modelo, en su caso.	C3. CA1. Adecuación -El modelo formulado es adecuado y los recursos matemáticos corresponden al modelo. C3.CA2. Precisión -Se aplican las técnicas matemáticas adecuadas y se relacionan los conceptos. C3.CA3. Sentido Crítico -La modelización se acompaña de una reflexión para reafirmar el enfoque o para plantearse la necesidad de revisar el modelo.

C4. Comunicar con lenguaje matemático y herramientas tecnológicas los procesos y resultados de una situación matemática	1. Utilizar software matemático para explorar, simular y representar situaciones matemáticas. 2. Comunicar con lenguaje matemático el proceso seguido.	C4. CA1. Adecuación -Se eligen las herramientas tecnológicas y los lenguajes matemáticos adecuados para comunicar los razonamientos matemáticos y los resultados obtenidos, integrando soportes que mejoren la comprensión (dibujos, representaciones...) C4.CA2. Claridad -La utilización de los lenguajes y códigos matemáticos se hace de forma ordenada y pulida, para favorecer la comprensión.

Tabla 2. Competencias, dimensiones y criterios de evaluación de las matemáticas científico-técnicas del Bachillerato General Andorrano

2.2.2 Las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

En el caso de las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, las cuatro competencias específicas contempladas son:

C1. Resolver problemas de matemáticas y aplicados en contextos de las ciencias sociales.

C2. Modelizar matemáticamente situaciones de las ciencias sociales.

C3. Razonar matemáticamente con varios recursos lógicos.

C4. Comunicar procesos y resultados de una situación matemática con lenguaje matemático

En la siguiente tabla (3)

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS		
	Dimensiones	**Criterios de avaluación**
C1. Resolver problemas de matemáticas y aplicados a contextos de las ciencias sociales	1. Identificar los datos relevantes y sus relaciones para resolver problemas 2. Diseñar planes de actuación para resolver problemas con herramientas heurísticas 3. Aplicar el plan de actuación con heurísticas para resolver problemas 4. Elaborar conjeturas plausibles sobre la solución de un problema a partir de casos particulares 5. Validar las soluciones del problema explicando el proceso de resolución	C1.CA1. Pertinencia -Uso de información relevante y de procesos y objetos matemáticos pertinentes C1.CA2. Precisión -Precisión al utilizar objetos y procesos matemáticos C1.CA3. Coherencia -El conjunto de la resolución con las soluciones obtenidas son conexas
C2 Modelizar matemáticamente situaciones de las ciencias sociales	1. Utilizar estrategias heurísticas 2. Seleccionar los recursos numéricos, algebraicos, funcionales o estadísticos adecuados 3. Aplicar un plan de actuación con sentido crítico	C2. CA1. Adecuación -Seleccionar un modelo que se ajuste a la situación a estudiar C2.CA2. Precisión -Utilizar con precisión los objetos y procesos al modelizar C2.CA3. Sentido crítico -Valorar la potencia y las limitaciones del modelo matemático elegido para analizar, interpretar y resolver situaciones de las ciencias sociales
C3. Razonar matemáticamente con diversos recursos lógicos	1. Distinguir entre definiciones, conjeturas y teoremas 2. Elaborar conjeturas plausibles a partir de casos particulares 3. Argumentar con razonamientos lógicos la validez general de una propiedad matemática o refutarla a partir de un caso particular	**C3. CA1. Pertinencia** -Seleccionar y utilizar casos particulares para realizar conjeturas **C3.CA2. Destreza** -Utilizar fluidamente recursos lógicos para argumentar o refutar resultados **C3.CA3. Sentido crítico** - Reflexión metacognitiva sobre los tipos de razonamientos empleados y utilizar los más adecuados para explicar, argumentar o refutar la situación matemática a trabajar
C4 Comunicar procesos y resultados de una situación matemática con lenguaje matemático	1. Expresar con lenguaje matemático tanto los procesos de resolución y modelización como los resultados obtenidos 2. Construir representaciones matemáticas de conceptos y procesos 3. Traducir de una representación matemática a otra con herramientas tecnológicas	**C4. CA1. Claridad** -Cuando permite entender fácilmente los razonamientos, objetos, procesos y conclusiones de un proceso matemático C4.CA2. Eficiencia -Utilización de un lenguaje matemático óptimo para representar objetos y procesos matemáticos

Tabla 3. Competencias, dimensiones y criterios de evaluación de las matemáticas aplicadas en las Ciencias Sociales.

3. Desarrollo de la experiencia

La metodología elegida ha sido el estudio de casos, porqué en nuestro estudio nos interesaba conocer como los alumnos de nuestra aula desarrollaban los procesos de modelización y saber las dificultades con que se encontraban, así como conocer las competencias curriculares que se desarrollaban.

Esta experiencia se ha llevado a cabo en dos aulas de primero de bachillerato de matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 18 alumnos. La primera unidad didáctica que realizamos tenía el objetivo de realizar inicialmente un repaso de los conocimientos previos necesarios para poder empezar el temario de bachillerato e introducir el programa de primero de bachillerato. La producción final de la unidad es la realización de un poster científico. Con el objetivo de introducir a los estudiantes una nueva manera de sintetizar los estudios realizados durante la unidad, y poniendo de relieve la metodología de estudio y los resultados que han obtenido al exponer su producción final.

3.1. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

En el caso de las matemáticas aplicadas el objetivo de estudio era analizar la evolución de los precios del consumo. Es decir, determinar cuál era el centro comercial que ofrecía la cesta de la compra más asequible a los ciudadanos.

Por este motivo, la pregunta de la Unidad 1 es ¿Cómo influye en la economía familiar la diferencia de precios de los productos que conforman la cesta de la compra, según los puntos de venta donde se adquieren los mismos? Y ¿Cómo identificamos mediante los códigos estos productos?

Por lo que, en la unidad de aprendizaje se establecen las siguientes preguntas en relación con la pregunta o situación complejas:

1.- ¿Cómo varía el precio final de la cesta de la compra según sean los productos que la conforman y según sea el punto de venta?

2.- ¿Cuál es la información que hay detrás de un código?

Destacamos que en esta unidad se trabajan las competencias C1 y C4.

Con relación a la C1 se tendrá en cuenta Resolución de problemas matemáticos de estadística unidimensional y bidimensional y de codificación utilizando de forma pertinente la información esencial encontrada en la investigación realizada en los diferentes establecimientos. El alumno debe diseñar un plan de resolución para poder analizar de forma coherente los resultados obtenidos. Por eso debe ser preciso en la selección y aplicación las heurísticas adecuadas (utilizando, por ejemplo, el estudio sistemático de casos), así como los recursos aprendidos (variable estadística, gráficos y las medidas de centralización, dispersión y posición. Así como los conceptos de la estadística bidimensional…). Para poder determinar de forma coherente las soluciones obtenidas del problema.

Con relación a la C1 los indicadores de evaluación son:

MAT1 Interpreta de forma pertinente el enunciado de un problema con un lenguaje propio, utilizando, gráficos, esquemas o expresiones aritméticas.

MAT2. Utilización de la información dada en el problema para utilizar los recursos adecuados para llegar a una solución.

MAT3. Identifica los datos del problema.

MAT4. Establece un planteamiento del problema.

MAT5. Determina una resolución del problema.

MAT6 Da una posible solución a la pregunta planteada.

Y en relación con la C4 Comunicación con lenguaje matemático del estudio de precios y codificación de diferentes productos que consumimos. En este caso se valora la eficiencia en la utilización de herramientas tecnológicas. Claridad en el uso del vocabulario propio del lenguaje matemático para comunicar de forma precisa los resultados. Los indicadores de evaluación son:

MAT 7 Comunica con claridad utilizando un vocabulario matemático los procesos y resultados obtenidos.

MAT 8. Comunica con eficiencia utilizando el software matemático los conceptos y procesos matemáticos utilizando la representación más adecuada.

A continuación, en la siguiente tabla especificamos cuáles son los recursos trabajados a lo largo de la unidad

Conceptos	Procedimientos
Matriz. Operaciones con matriz	Identificación de situaciones donde es necesario utilizar números enteros, racionales e irracionales
Números irracionales	Cálculo con números reales en situaciones cotidianas y de las ciencias sociales
Números reales	Aproximación decimal de los resultados de las operaciones con números reales y determinación de errores
Expresión decimal de los números reales	Resolución de problemas contextualizados con números grandes
Aproximación y error	Clasificación y ordenación de las variables estadísticas
Números grandes y pequeños. Orden de magnitud. Notación científica	Interpretación y construcción de los distintos gráficos estadísticos
Suma, resta, multiplicación y división de números reales	Comparación y análisis de los parámetros de centralización, dispersión y posición.
Potencias de exponente entero y fraccionario. Radicales	Interpretación de las medidas estadísticas
Aproximación decimal de las operaciones con números reales	Utilización de software para la realización de un estudio estadístico.
Variable estadística	Identificación de variables estadísticas bidimensionales
Gráficos estadísticos	Obtención de frecuencias absolutas y relativas de variables bidimensionales
Medidas: centralización, dispersión y posición	Elaboración de las tablas de distribución de frecuencias
Variable estadística bidimensional	Representación de una serie estadística con dos variables mediante una nube de puntos (diagramas de racimo)
Diagrama de dispersión	Obtención de la covarianza de una variable bidimensional
Correlación	Interpretación y obtención de los coeficientes de correlación
Rectas de regresión	Análisis de los datos de correlación obtenidos entre dos variables
Variables aleatorias	Determinación de las rectas de regresión y obtención de estimaciones a partir de aquéllas

Tabla 4. Recursos de la unidad de aprendizaje.

La propuesta de producción de la unidad es un Póster científico explicativo del trabajo realizado e informe escrito sobre las conclusiones de los diferentes precios encontrados, determinando cual es el supermercado o tienda que tiene los productos más económicos. Los alumnos son los que establecen como deben de realizar el análisis y la presentación de los resultados obtenidos con los gráficos más idóneos para mostrar la información. Los alumnos también deben elaborar su propio código identificativo de los productos.

Por este motivo, para poder realizar dicho proyecto se introducían los recursos matemáticos a lo largo de las sesiones y de forma paralela los alumnos realizan su proyecto. Los alumnos forman grupos colaborativos en el cual cada alumno tiene un rol establecido, en el que marcan cuales serían los pasos que deben seguir para poder llegar a una conclusión. En primer lugar los alumnos determinaron cuales eran para ellos 15 productos básicos que debían de conformar su cesta de la compra, estableciendo inicialmente que producto y marca eran la que decidían comprar y también realizando la comparativa con la marca blanca de cada centro comercial (Bon área, Carrefour, Sant Elio, River, Eclaire,…) de los centros comerciales de Andorra. Para ello tenían en cuenta los diferentes centros de venta en las diferentes parroquias y comparando los precios de los pequeños establecimientos con los centros comerciales de las grandes áreas.

Para motivar a los alumnos, se realizó una presentación del estudio que lleva a cabo en España la OCU sobre el precio de la cesta de la compra y cuál es el establecimiento español que obtiene la mejor cualificación por tener más ajustados los precios. Este video nos permite plantear la pregunta: ¿cuánto nos podemos ahorrar en la cesta de la compra una familia formada por cuatro integrantes en Andorra?

Esta actividad la realizan a lo largo de 6 sesiones en clase. En el que se centran los puntos clave, distribuir los trabajos específicos que deben de realizar cada uno de los integrantes del grupo, siempre con la mirada atenta del profesor y en el caso que sea necesario su intervención para guiar y acotar el estudio realizado.

En la siguiente tabla se muestra la temporización de la actividad

Sesiones	Función	Temporización de la actividad dentro de la programación
Nº 1	Presentación de la actividad de estudio. Los alumnos deben de saber que se espera de ellos. Deben de resolver un problema situado en un contexto real. La solución se debe de presentar con un Poster científico. Formación de grupos y roles de los alumnos. Distribución de las tareas a realizar	1h
Nº 2	Determinar cuáles son los productos esenciales de una cesta de la compra para un mes. Cuáles son las marcas que son objeto de estudio y tener en cuenta las marcas blancas de cada establecimiento (si las tienen)	1h
Nº 3	Decidir cuáles y cuantos son los centros comerciales objeto del estudio y planificar la obtención de los datos.	1h
Nº 4	Toda la información encontrada volcarla en una tabla de Excel para poder realizar el estudio estadístico. Plantear las diferentes preguntas que pueden ser de interés para mostrar los resultados obtenidos.	1h
Nº 5	Aplicar los recursos matemáticos introducidos en las sesiones anteriores para poder analizar si existe correlación entre los datos en función del tipo de establecimiento, del lugar del establecimiento, de las dimensiones...	1h

Nº 6	Planificar y realizar el Poster en función del estudio realizado.	1h: 50min
Nº 7	Presentar sus producciones al resto de los compañeros de la clase indicando: los resultados obtenidos, las conclusiones, lo que han aprendido, las limitaciones, propuestas de mejora y líneas futuras.	1h:50min

Tabla 5. Planificación de las sesiones de trabajo.

4. Producciones de los alumnos

A continuación, se muestran algunas producciones finales realizadas por los alumnos y las valoraciones que ellos realizan de la actividad propuesta.

En relación con la actividad de los precios del consumo tenemos que los alumnos realizaron una exposición oral de 20 minutos mostrando con la ayuda de su poster la información que querían destacar.

A continuación, mostramos tres producciones totalmente diferentes:

En la imagen (1) exponemos la primera producción realizada por un grupo formado por 5 alumnos. Destacamos que sólo establecen el precio final según su lista de productos de 10 establecimientos. Y no aportan más información.

Imagen 2. Primera producción.

En cambio, en la segunda producción resaltan la información obtenida en cinco supermercados teniendo en cuenta su ubicación. Indicando si los productos analizados eran de marca blanca o no. Y explican las diferentes fases de su trabajo.

Imagen 3. Segunda producción

Y la tercera producción que mostramos estos alumnos han escogido un establecimiento de cada parroquia. Y han analizado los productos estableciendo el supermercado que resulta más económico.

Imagen 4. Tercera producción

Y por último mostramos la producción más detallada. En la que se realiza un análisis más exhaustivo indicado: descripción breve de la situación a modelizar, los objetivos, el método, los resultados y las conclusiones.

Image n 5. Cuarta producción

Cabe destacar que los alumnos realizaron una exposición de su trabajo y también adjuntaron un dosier con todos los datos en formato Excel y todos los cálculos y conclusiones realizadas.

5. Conclusiones

La modelización matemática presente en los proyectos obliga a los alumnos a implicarse en el proceso de resolución del problema, esto ha llevado a que los alumnos se han visto obligados a trabajar de forma colaborativa en toda la realización del proyecto proporcionando la oportunidad de generar un aprendizaje matemático. El intercambio cooperativo, produce que los alumnos compartan ideas que ha llevado a la resolución del problema y sin las clarificaciones o correcciones de las aportaciones o razonamientos de todos los integrantes del grupo no es posible la resolución. Este resultado es coincidente con Webb, Ender y Lewis, (1986) que afirman que existe mayor colaboración e involucración por parte de los alumnos cuando estos trabajan en grupo.

La propuesta de la actividad en modelización debe de ser lo suficientemente abierta y contextualizada en una situación del mundo real para que los alumnos tomen conciencia de la importancia de las matemáticas para resolver problemas cotidianos. Y delante de una situación planteada sean capaces de establecer metodologías para poder determinar la mejor solución y respuesta al problema que se les plantea. Dando a los alumnos la suficiente autonomía para que sean ellos mismos los que proporcionen la metodología de resolución y resuelvan dicho problema. Incluso dando la posibilidad, como fue el caso, que delante las diferentes producciones realizadas, debido a los diferentes enfoques, estos establecieron propuestas de mejora en la realización del estudio. Proporcionando nuevas preguntas que llevaban a establecer nuevos enfoques.

La modelización matemática es una competencia matemática presente en el currículo del sistema andorrano y esto implica que muchas de las actividades son abiertas, con situaciones en las que la creación de modelos se hace imprescindible para poder evaluar dicha competencia.

Referencias

Blomhoj, M. i kjeldsen, T.H. (2006) *Teaching modelling trough project work. A Zentralblatt f ’ur Didaktik der Mathematik* (ZDM) vol 38 Núm 2.

Blum, W y Leiss, D. (2006). The Modeling cycle according. WEB Context 1. … representation is based upon cognitive psychological research on the behaviour of pupils and students working on modeling assignments (Borromeo Ferri, 2006). Kaiser (1995)

Blum, W. y Leiss, D. (2007). “Filling Up”- the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: Bosch, Marianna (Ed.): CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 1623-1633.

BOPA nº 29. Decreto de publicación del programa de la asignatura de matemáticas científico-técnicas del bachillerato general de la Escola Andorrana, 27-03-2019, p.3 *https://www.bopa.ad/Documents/Detall?doc=GD20190322_10_46_46*

Webb, N. M., Ender, P., & Lewis, S. (1986). Problem-solving strategies and group processes in small groups learning computer programming. *American Educational Research Journal, 23*(2), 243–261. *https://doi.org/10.2307/1162957*

OPTIMIZANDO LA SOLUCIÓN

Vielba Iglesias Álvaro
alvaro.vieigl@educa.jcyl.es / alvaro.vielba@uva.es
I.E.S. Jorge Manrique. Palencia / Facultad de Educación de Palencia
(Universidad de Valladolid)

Zamora Pérez Rosario Fátima
rfzperez@gmail.com / mfzamora@educa.jcyl.es
I.E.S.Jorge Manrique, Palencia

Núcleo temático: Recursos para el aula; Procesos

Modalidad: Comunicación,

Nivel educativo: Bachillerato

RESUMEN

La dificultad que tiene el alumnado en relacionar los distintos tipos de representación constituye el fundamento de este proyecto. Se requiere la evolución hacia un sistema capaz de encauzar a los estudiantes hacia trayectorias más adecuadas a sus capacidades, que estimulen el espíritu emprendedor. Es preciso propiciar el oportuno cambio metodológico, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje.

Numerosas investigaciones en didáctica de las matemáticas son el pilar en el que se basa esta forma de exponer los temas de análisis matemático; mediante el programa de software “Geogebra” el alumno aprende a cambiar los distintos tipos de representación, de un lenguaje formal pasa a una imagen que le permita obtener una función; se pasa de una imagen estática a una dinámica observando e interpretando el mensaje de la propuesta.

Palabras clave: Análisis matemático, optimización, representación, Geogebra.

1. Introducción

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas han tenido un progreso substancial, debido, entre otros factores, al análisis de la respuesta a preguntas del tipo: ¿El funcionamiento del pensamiento matemático, es independiente del lenguaje y de otros sistemas de representación semióticos utilizados?

En diferentes trabajos de investigación se observa que la adquisición del conocimiento matemático no introduce a la mayoría de los estudiantes en las formas del pensamiento matemático, como por ejemplo en la habilidad para cambiar el registro de representación (Duval, 2006)

Coincidimos con la idea de Fernández (1994), de que la meta final de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, en este momento, de Bachillerato, ha de ser que el alumno adquiera desenvoltura en la interpretación y escritura del lenguaje simbólico, así como el empleo del lenguaje gráfico, interpretando por tal la expresión mediante tablas, esquemas gráficos, etc., que sea capaz de verbalizar lo así tratado y su traducción al lenguaje simbólico.

La producción de cada nuevo conocimiento matemático, su aprendizaje y su enseñanza pone de relieve procesos específicos únicos. Sucede lo mismo con la percepción de los mecanismos que intervienen en una actividad matemática original y necesita investigaciones en que las matemáticas juegan un papel relevante, no sólo como objeto sino también como instrumento de estudio.” (Brousseau, 2001)

La didáctica de las matemáticas estudia una serie de problemas que se plantean con relación a una teoría o a un concepto. Es preciso tener en cuenta la manera en que se enseña, las dificultades que plantea la asimilación del tema de estudio y el interés que presenta el alumno en el aprendizaje de las matemáticas. Así, la didáctica de la matemática tiene como objetivo la mejora de la práctica docente y en ella deben validarse las investigaciones y sus resultados.

Puntualizando lo expresado establecemos algunos dominios propios de la competencia del didacta de la matemática:

i. Analizar cómo los alumnos adaptan los conocimientos matemáticos.
ii. Proponer un mundo de situaciones, de problemas y de ejercicios en el que estos conocimientos encuentran su función y su significado.

Ya en Godino (1996) se propone desarrollar materiales y recursos para mejorar la instrucción matemática usando los conocimientos en tecnología. “El conocimiento científico teórico condiciona el conocimiento tecnológico y el práctico, esto es, desempeña un papel dominante y de control” (p. 135).

La manera de enseñar matemáticas es determinante en la respuesta del alumno. Si se presentan como una materia en la que lo fundamental son los procedimientos algorítmicos realizados mecánicamente este deduce, entre otras suposiciones, que:

- Todos los problemas deben tener una respuesta correcta y un método determinado de resolución.
- Resolver ejercicios mediante el método de ensayo-error, no es adecuado.
- Comprender las matemáticas sólo está al alcance de las mentes brillantes, y además las matemáticas no tienen por qué tener sentido (Duval, 1996).

Otro factor que incide en los resultados del aprendizaje es el juicio que, a priori, tiene el alumno ante la materia. Si se siente incapaz de afrontar el reto, cualquier dificultad le lleva a aumentar su ansiedad, no pregunta porque teme ser etiquetado de forma negativa y no realiza práctica porque se siente incapaz de salvar cualquier dificultad que se le plantee. Esta actitud defensiva le impide alcanzar un aprendizaje significativo.

Las TIC brindan condiciones tecnológicas para la transformación de la enseñanza en un proceso educativo más personalizado, centrado en un aprendizaje significativo. Este medio de enseñanza potencia situaciones de enseñanza y aprendizaje motivadoras, de una forma lúdica-recreativa ya que su uso de manera científica favorece el desarrollo de la individualidad de los estudiantes (Rico y otros, 1999).

La utilización de la tecnología, complementada con los medios educativos tradicionales, ayuda a **visualizar conjeturas**, **buscar soluciones**, **explorar hipótesis**, y permite mejorar el aprendizaje

2. CONCEP-IMAGE

El concepto de imagen se compone de toda la estructura cognitiva en la mente del individuo que está asociada con un concepto dado.

Tall y Vinner (1981) utilizan las siguientes definiciones:

Concept definition: son las palabras que se emplean para definir formalmente un concepto.

Concept image: son las estructuras cognitivas que un individuo asocia a un concepto.

Estas definiciones van asociadas a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, (en este trabajo) asociado a conceptos de análisis matemático: Problemas de optimización.

Un rasgo distintivo de la matemática en un nivel de bachillerato es la complejidad de los contenidos (en realidad en todos los niveles, pues cuando el nivel es más bajo también es menor la edad del alumno). El éxito en matemáticas se puede relacionar con la riqueza y la flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos. (Azcárate, 1998)

Todo tipo de representaciones: numéricas (usando software que escriba tabla de valores, hojas de cálculo), simbólicas (como los símbolos de función, de derivada) y visuales (Gráficos, por ejemplo Geogebra permite desplazar la imagen en la pantalla y acercar o alejar el objeto de estudio para visualizar detalles), muestran el funcionamiento como proceso y como concepto.

Tesis doctorales como las de Blázquez (1999) y de Gatica (2007) y los artículos posteriores derivados de las mismas y divulgados en diversas insisten en la importancia de utilizar los cuatro registros: verbal, gráfico, simbólico y numérico; y recomiendan trabajar las conversiones entre ellos (Blázquez y otros 2009).

3. Competencias Clave de Bachillerato

Entre las competencias clave, LOMLOE, según el artículo 16 del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, está la **Competencia Matemática**, …: "*La materia aportará las herramientas de análisis, abstracción y síntesis que requiere la competencia STEM. Permitirá al alumnado construir modelos que permitan dar soluciones a los problemas científicos y tecnológicos en ciencia, Tecnología e ingeniería (STEM)*

STEM1. Selecciona y utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático.

STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar fenómenos relacionados con la modalidad elegida, planteándose hipótesis y contrastándolas o comprobándolas mediante la observación, la experimentación y la investigación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y limitaciones de los métodos empleados.

STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de investigaciones de forma clara y precisa, en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos.) y aprovechando la cultura digital.

La **Competencia digital** (CD) tiene que ver con el uso de herramientas digitales en el tratamiento de la información y en la resolución de problemas científicos y tecnológicos, así como con el desarrollo del pensamiento computacional.

La resolución de problemas, basada en la modelización de situaciones reales, la investigación, la formulación y la comprobación de conjeturas contribuye de manera eficaz a la **Competencia emprendedora** (CE), ya que requiere creatividad y flexibilidad en la toma de decisiones para aplicar los conocimientos específicos a la resolución eficaz e innovadora de distintos retos.

3.1. Competencias específicas

En las competencias específicas de la materia tenemos:

1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.

2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.

3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.

7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

7.1 Representar ideas matemáticas seleccionando las tecnologías más adecuadas.

7.2 Seleccionar y utilizar diversas formas de re0resentación, valorando su utilidad para compartir la información.

8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

4. Contenidos de Bachillerato en Castilla León

4.1 Cambio

Resolución de problemas de optimización en situaciones sencillas: aplicación de la derivada.

La derivada como razón de cambio en la resolución de problemas de optimización en contextos diversos.

4.*2 Relaciones y funciones*

Análisis, representación gráfica e interpretación de relaciones mediante herramientas tecnológicas

4.3 Pensamiento computacional

Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados.

5. Propuesta de trabajo. Problemas de optimización de funciones.

[37]Las definiciones teóricas son el punto de partida de esta práctica. Los manuales de consulta corresponden a distintas editoriales, a elección del alumno, y presentan los contenidos conceptuales de análisis matemático.

La relación de ejemplos presentados es una pequeña muestra de la enorme colección de propuestas de este tipo de ejercicios. Están tomados de las Pruebas de Acceso a la Universidad del territorio español y muchos de los enunciados formulados, en estos más de treinta años, son repetitivos, si no en los datos si en la propuesta y requisitos.

Previamente se enseñan los comandos y la forma de escribir las instrucciones en GeoGebra. Por otra parte, la herramienta informática va “interactuando” con el estudiante en el supuesto de que la sentencia no esté bien introducida.

[37] Las definiciones y teoremas del libro de texto, se usan como base y se incide en la necesidad de que utilicen un manual de referencia.

La práctica de los ejercicios conlleva el tránsito entre los diferentes registros de representación pues, como se ha expuesto anteriormente, los cambios de un registro a otro enriquecen las imágenes conceptuales que un individuo tiene sobre un determinado concepto.

Es un trabajo de aula que refleja el desarrollo didáctico del tema. Tras la lectura y comprensión de las condiciones que se reflejan en el enunciado, el alumno representa gráficamente la situación a estudiar; comenzando con la comprensión visual de los distintos valores que puede tomar una función que, posteriormente, se deduce y escribe; terminando con la comprobación de la solución, obtenida mediante cálculos de derivación.

Los problemas que se muestran a continuación se recogen en el siguiente libro de GeoGebra como apoyo a la comunicación:

https://www.geogebra.org/m/qhhcbsbe

1.- Desde una casa situada en el punto $P=(7\,,0)$ se quiere hacer un camino recto para conectarla con una carretera cuyo trazado viene dado por la curva de ecuación $y=\sqrt{1+2\,x+2\,x^{\,2}}$. ¿Con qué punto de la carretera conecta el camino más corto posible? *(Andalucía, 1997)*

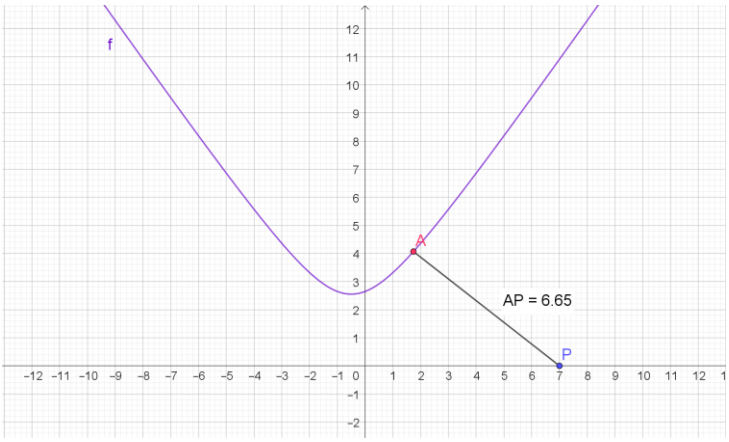


Imagen 1. Problema 1

2.- Dada la función $f:[1,e] \rightarrow R$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$, (donde $\ln(x)$es el logaritmo neperiano de *x*), determínese cuál de las rectas tangentes a la gráfica de *f* tiene la máxima pendiente. *(Andalucía, 1999)*

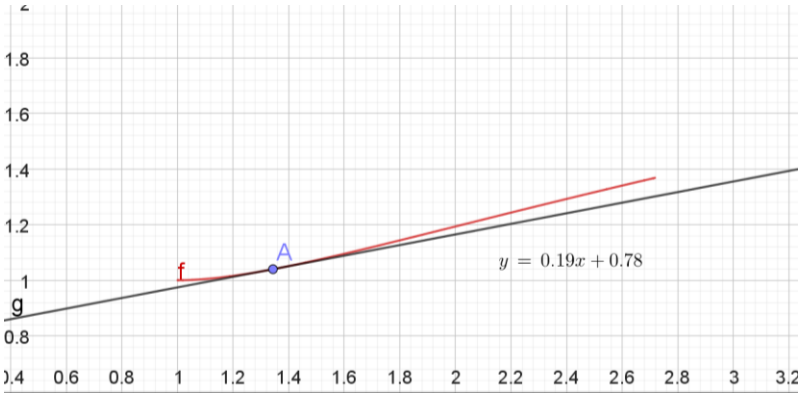


Imagen 2. Problema 2

3.- Dentro del triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta $2x+y=8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a,0)$, $(0,0)$, (a,b) y $(0,b)$. Determinar el punto (a,b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.

(*Castilla y León, 1999)*

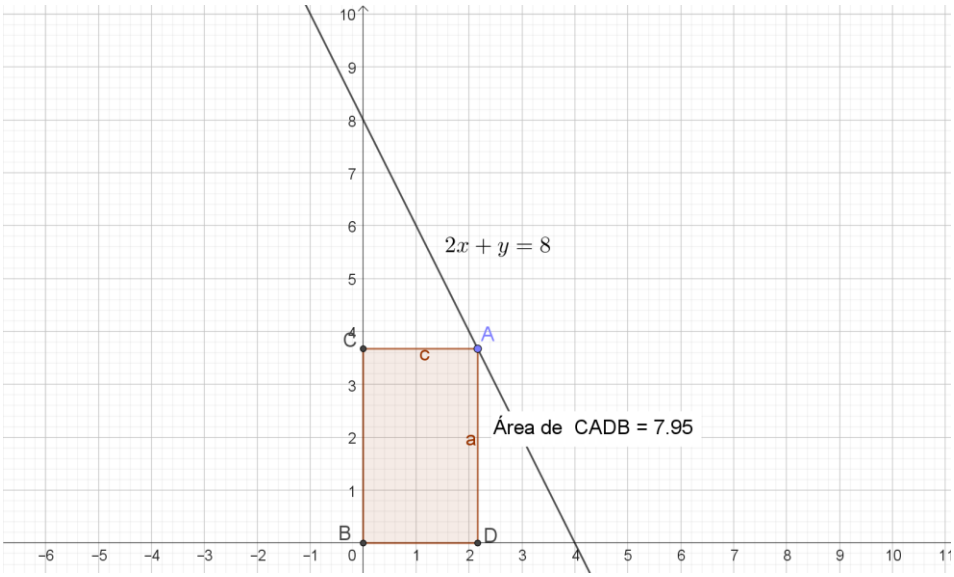


Imagen 3. Problema3

4.- Hallar sobre la recta $x+3y=30$ un punto P con la propiedad de que la suma de sus distancias al origen y al eje OX sea mínima. *(Castilla y León, 2000)*

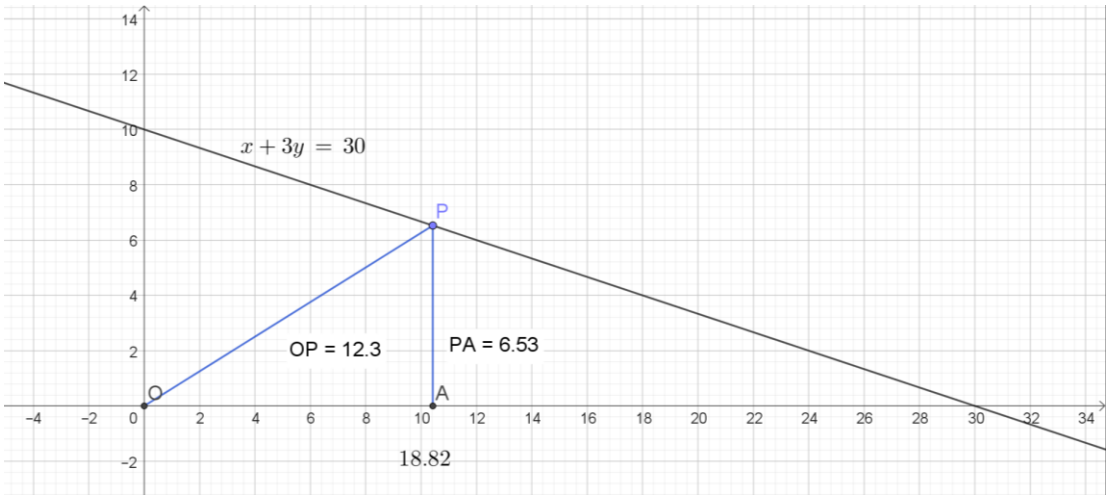


Imagen 4. Problema 4

5.- El lado desigual de un triángulo isósceles mide 12 m y la altura sobre este lado es de 5 m.

a) Dado un punto cualquiera sobre esta altura, obtenga una expresión de la suma de las distancias desde este punto a cada uno de los vértices del triángulo.

b) Determine los puntos sobre la altura que cumplen que la suma de las distancias a los tres vértices del triángulo sea máxima y los puntos para los cuales sea mínima.

(Cataluña, 2000)

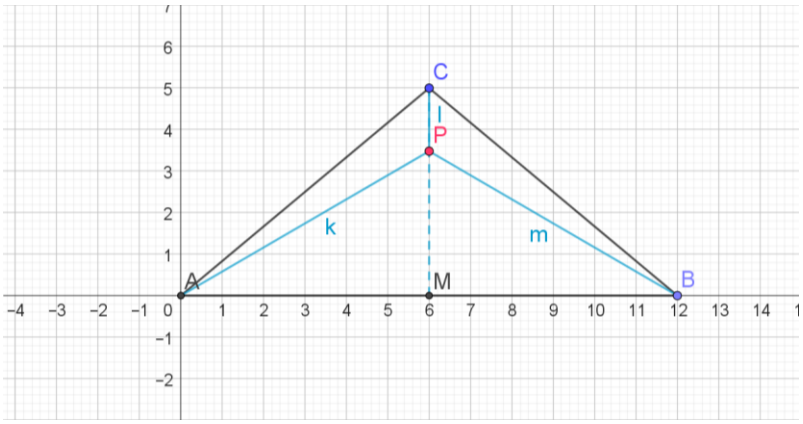


Imagen 5. Problema 5

6.- Determina las dimensiones de los lados y el área del rectángulo de área máxima que, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro, se puede inscribir en un semicírculo de 2 m. de radio. (*Murcia, 2000)*

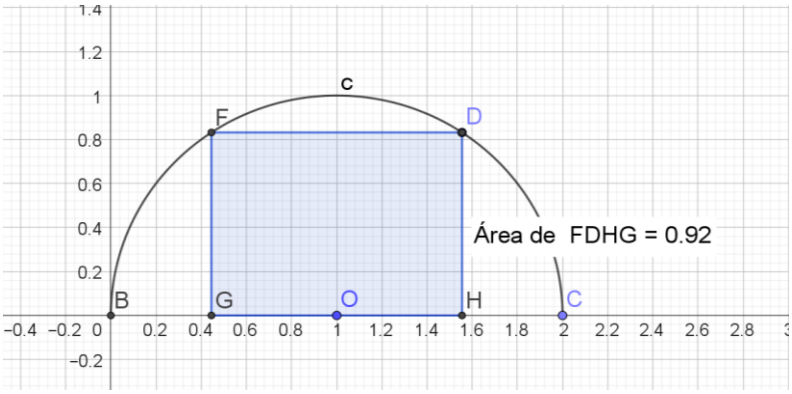


Imagen 6. Problema 6

7.- Un pequeño islote dista 1 km de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía está situada en la costa en un punto distante 1 km del punto de la costa

más próximo al islote. El coste del tendido submarino por unidad de longitud es $\frac{5}{3}$ del tendido en tierra. ¿A qué distancia de la fuente de energía debe empezar el tendido para conseguir un coste mínimo? *(Zaragoza, 2001)*

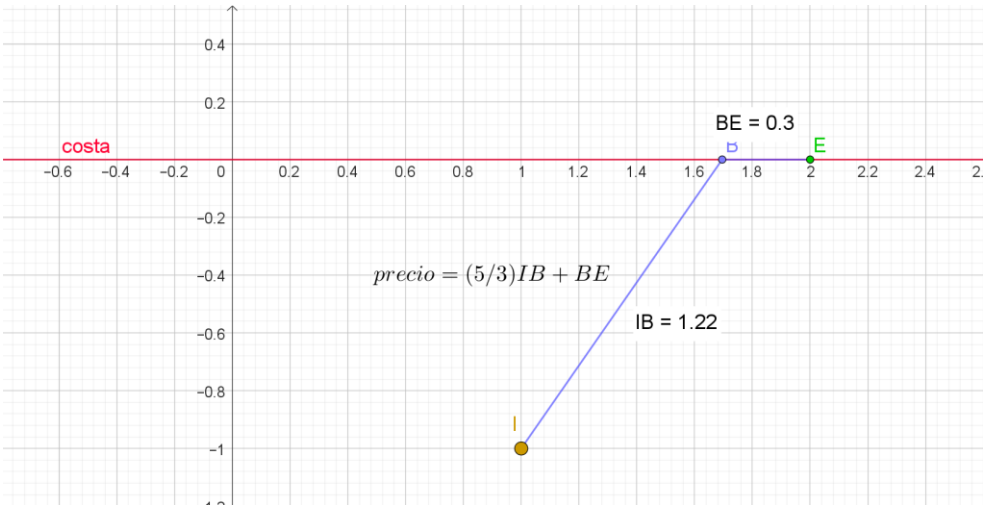


Imagen 7. Problema 7

8.- Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las torres tenemos que poner otra torreta de 5 metros de altura y tenemos que extender un cable que una los extremos de la parte de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de la parte de arriba de ésta con la segunda torre. ¿Dónde tenemos que situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? ¿Cuánto vale la longitud del cable en este caso?

(Baleares, 2017)

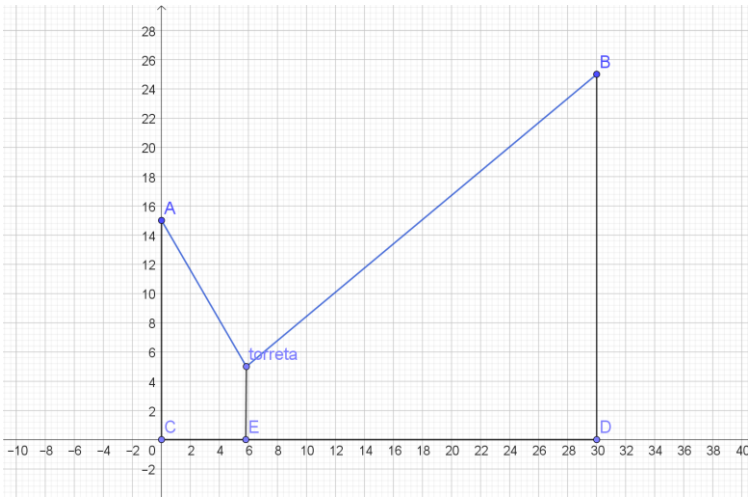


Imagen 8. Problema 8

9.- Sea $P(a, sen\, a)$ un punto de la gráfica de la función $f(x) = sen(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Sea r_P la recta tangente a dicha gráfica en el punto P y A_P el área de la región determinada por las rectas r_P, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

Calcúlese el punto P para el cual el área A_P es mínima. (Nota: Puede asumirse, sin demostrar, que la recta r_P se mantiene por encima del eje OX entre 0 y π)

(*Castilla y León, 2005)*

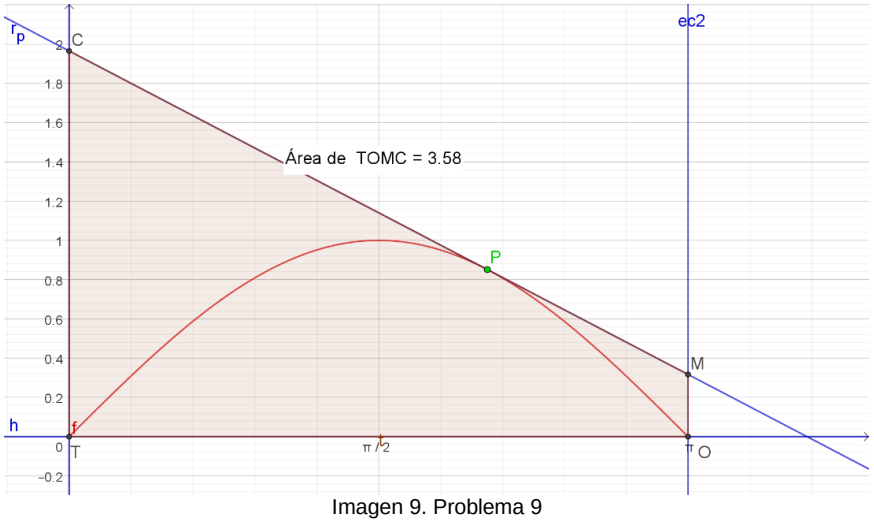


Imagen 9. Problema 9

10.- Considérense las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{-x}$. Para cada recta r perpendicular al eje *OX*, sean *A* y *B* los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g, respectivamente. Determínese la recta r para la cual el segmento *AB* es de longitud mínima. (*Castilla y León, 2006)*

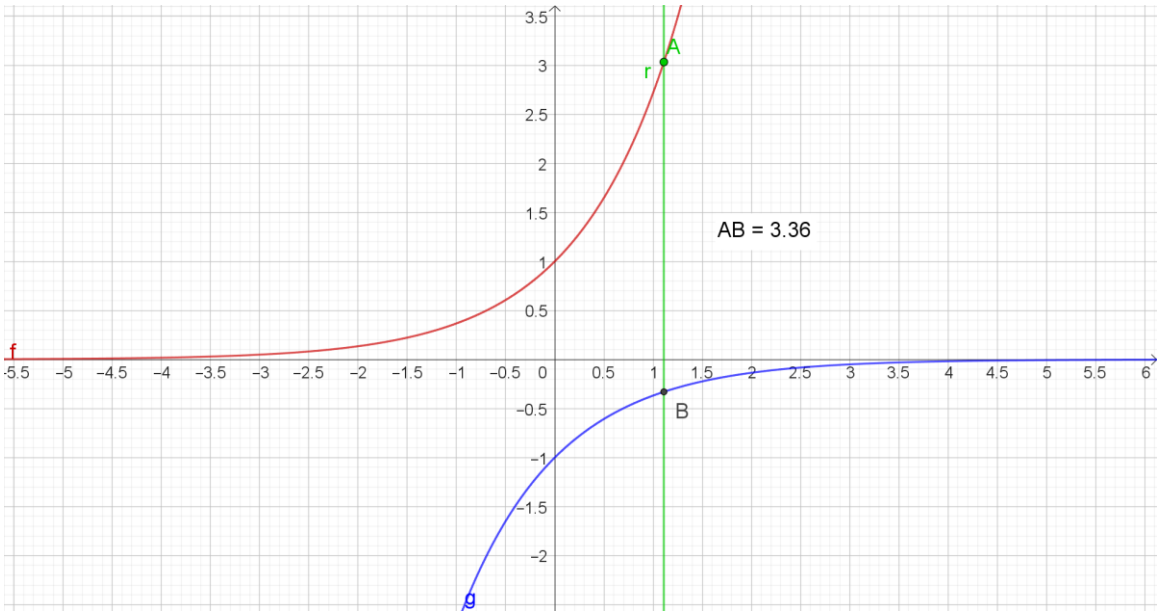


Imagen 10. Problema 10

11.- Calcula las dimensiones del triángulo isósceles, inscrito en una circunferencia de radio 1, que tiene área máxima. (*La Rioja, 2003)*

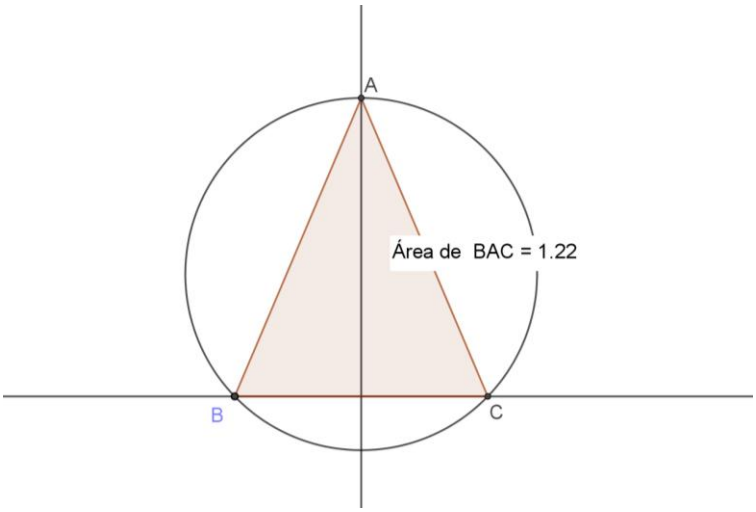


Imagen 11. Problema 11

12.- La recta tangente a la parábola $y = 3 - x^2$ en un punto *M* situado en el primer cuadrante ($x > 0, y > 0$), corta al eje OX en el punto A y al eje OY en el punto B.

a) Haz un gráfico de los elementos del problema.

b) Encuentre las coordenadas del punto M que hacen que el triángulo OAB tenga el área mínima. (*Cataluña, 2005)*

Imagen 12. Problema 12

Por otra parte, en la comprensión del concepto de optimización, y del uso de las derivadas en la resolución de problemas reales, se generan en el alumno una serie de conflictos en los que intervienen muchas variantes, pero se pueden realizar una serie de acciones que potencian el aprendizaje del cálculo (Rico y otros, 1999), entre ellas

- Enriquecer las concreciones de los conceptos.
- Mejorar los ejemplos y contraejemplos.
- Potenciar el uso del ordenador, tanto en el aula como en el autoaprendizaje.
- Observar que no todos los conceptos tienen una representación gráfica sencilla.
- Secuenciar los contenidos.

Según Flores (2016), el uso de GeoGebra permite realizar investigaciones, plantear conjeturas al observar qué ocurre cuando se dinamiza una situación pues incluye mover, cambiar y desplazar algunos elementos. Este tipo de construcción dinámica no sustituye a la demostración y resolución formal que se deduce de la variación pero ayuda a comprender las situaciones que se presentan en los distintos enunciados, el

intercambio de ideas en el aula contribuye a formalizar la función y el gráfico dinámico justifica la existencia de distintos valores y la búsqueda de la solución que optimiza el resultado.

REFERENCIAS

Azcárate, C. (1998) *Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado.* Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. Vol.1.2, 235-243

Blázquez, S.; Gatica, N.; Ortega, T. (2009). *Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional*. La Gaceta de la RSME, Vol.12.1, 145-168

Boletín Oficial de Castilla y León, (BOCYL) 30 de septiembre de 2022, nº 190.

Brousseau, G.; Christo, L G. (2001) *Los estudios de doctorado de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad* La Gaceta de la RSME, Vol. 4.3591-615

Duval, R. (2006) *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME, Vol.9.1, 143-168

Fernández M. (1994) *Sobre los diversos lenguajes matemáticos y del paso de unos a otros*. I Seminario Nacional sobre lenguaje y matemáticas Revista SUMA 16, 35-47

Flores, P. (2016). Materiales y recursos en el aula. En Rico, L y. Moreno, A., *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria*. Madrid: Pirámide; 275-292.

Godino, J.D. (1996) *Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza*. En Puig, L y Calderón, J. Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid: M.E.C. (CIDE).

Rico, L.; Sierra, M.; y Castro, E. (1999). Didáctica de la matemática. En Rico, L y Madrid, D. (Eds.) *Las disciplinas didácticas en las Ciencias de la Educación y las Áreas curriculares*. Madrid: Sintesis.

Tall, D.; Vinner, S. (1981) *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics Education, 12, 151-169

Biografías matemáticas.

Juan Francisco Hernández Rodríguez
Colegio Hispano Inglés Rambla de Santa Cruz, 94 38004 Santa Cruz de Tenerife
juanfisicahzrz@gmail.com

Núcleo temático: Recursos para el aula, Comunicación y divulgación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

Ya lo decía Eric Temple Bell: “Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas”

No existe dentro del extensísimo currículo de matemáticas la opción de tratar el estudio de la Historia de las Matemáticas, ni la biografía de grandes matemáticos, el origen de distintos conceptos, porqué surgieron y a qué intentaban dar respuesta,… Sin embargo, dentro del enfoque flipped classroom existen múltiples posibilidades de tratar estas y otras cuestiones tan relevantes para nuestro alumnado gracias al aprendizaje semipresencial (Blended Learning). Por ejemplo, utilizando la plataforma Google Classroom que permite la creación de aulas virtuales dentro de una misma institución educativa y facilita el seguimiento del aprendizaje de los alumnos.

Acciones: Llevar la biografía de grandes matemáticos a los alumnos.

Procedimiento: Aprovecho las múltiples posibilidades del enfoque flipped classroom para tratar estas biografías tan relevantes para nuestro alumnado

Palabras clave: inconformismo, excelencia, divulgación, currículo, historia.

1. Recursos utilizados:

Videos de canales fiables de ciencia de YouTube (Derivando, Date un blog,…)

Plataforma Google Classroom

Cuestionarios de Google

2. Objetivos

Conocer la historia de las matemáticas a través de la vida de los matemáticos y su contexto.

Acercar unas biografías muy valiosas a los alumnos a la que, de otra forma, sería muy probable que ellos no accediesen.

Estimular la curiosidad

Complementar la enseñanza con contenidos extracurriculares, pero, probablemente, más importantes y necesarios que los que lo son

3. Resultados obtenidos

De la práctica educativa: Mis alumnos y también yo nos ponemos al día con los contenidos más importantes y relevantes de la historia de las matemáticas. Adjunto uno de los comentarios anónimos de mis alumnos: “En mi caso, disfruto de esta experiencia de aprendizaje puesto que me permite profundizar en temas que me son de interés y que, de no ser obligatorios dichos vídeos, probablemente nunca habría indagado por mi cuenta ni habría descubierto nuevos aspectos de las matemáticas que me eran desconocidos.”

De los estudiantes y su aprendizaje: El 95% de los alumnos (57 de 60) realiza semanalmente esta actividad.

4. Objetivos evaluables:

- Reconocer la importancia de la historia de las matemáticas, de la vida de los matemáticos y de su contexto.
- Aprender a elaborar cuestionarios autoevaluables de Google y sacarles partido en el ámbito de las matemáticas.
- Buscar que el proceso de aprendizaje es fiable.
- Descubrir la importancia de modificar el cuaderno de evaluación para dar cabida a este tipo de actividades.

Evidencias:

Algunos trabajos de los alumnos sobre EULER:

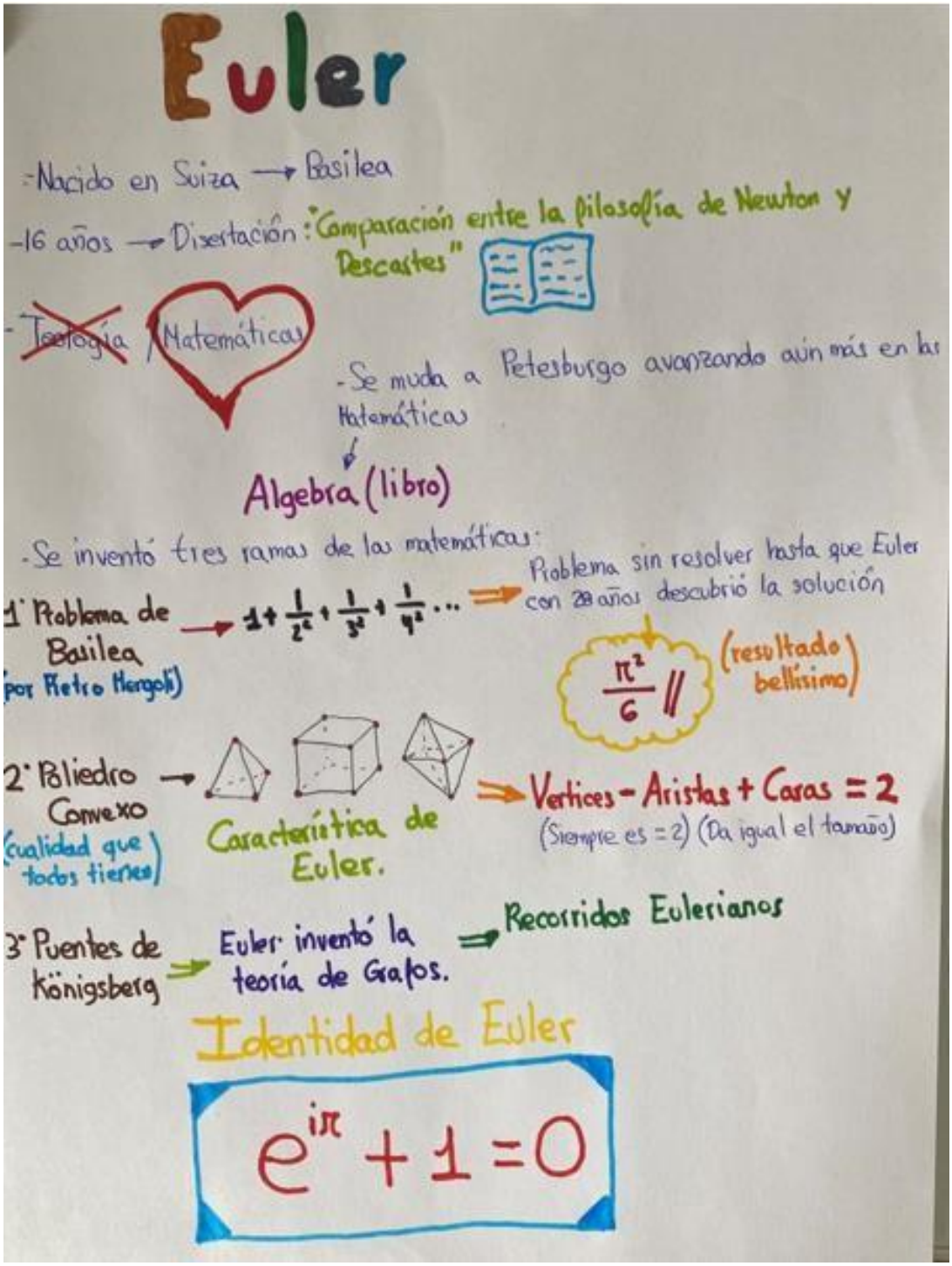


Ilustración 1 Trabajo de Carlos Eduardo

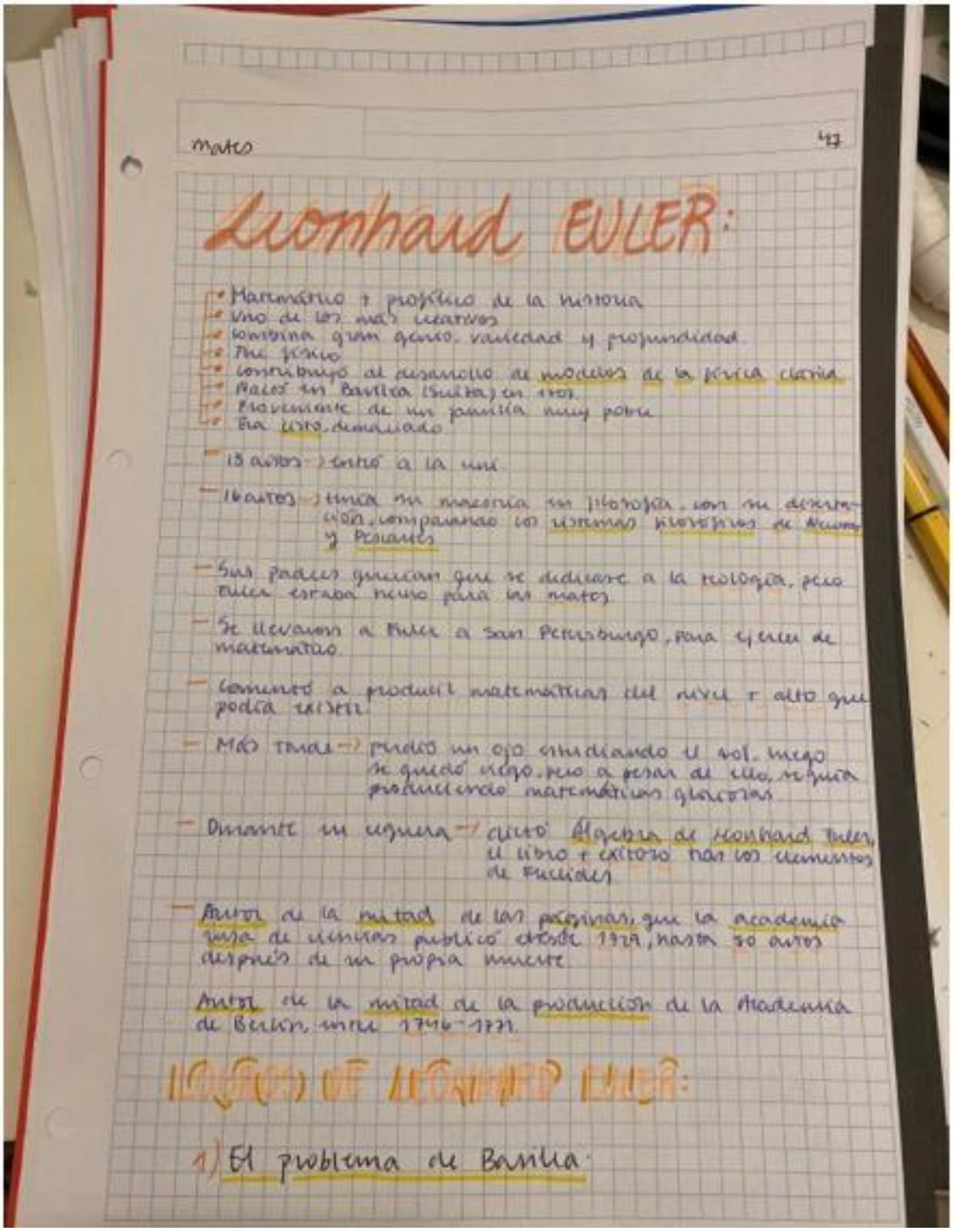


Ilustración 2 Trabajo de Sara R (1ª parte)

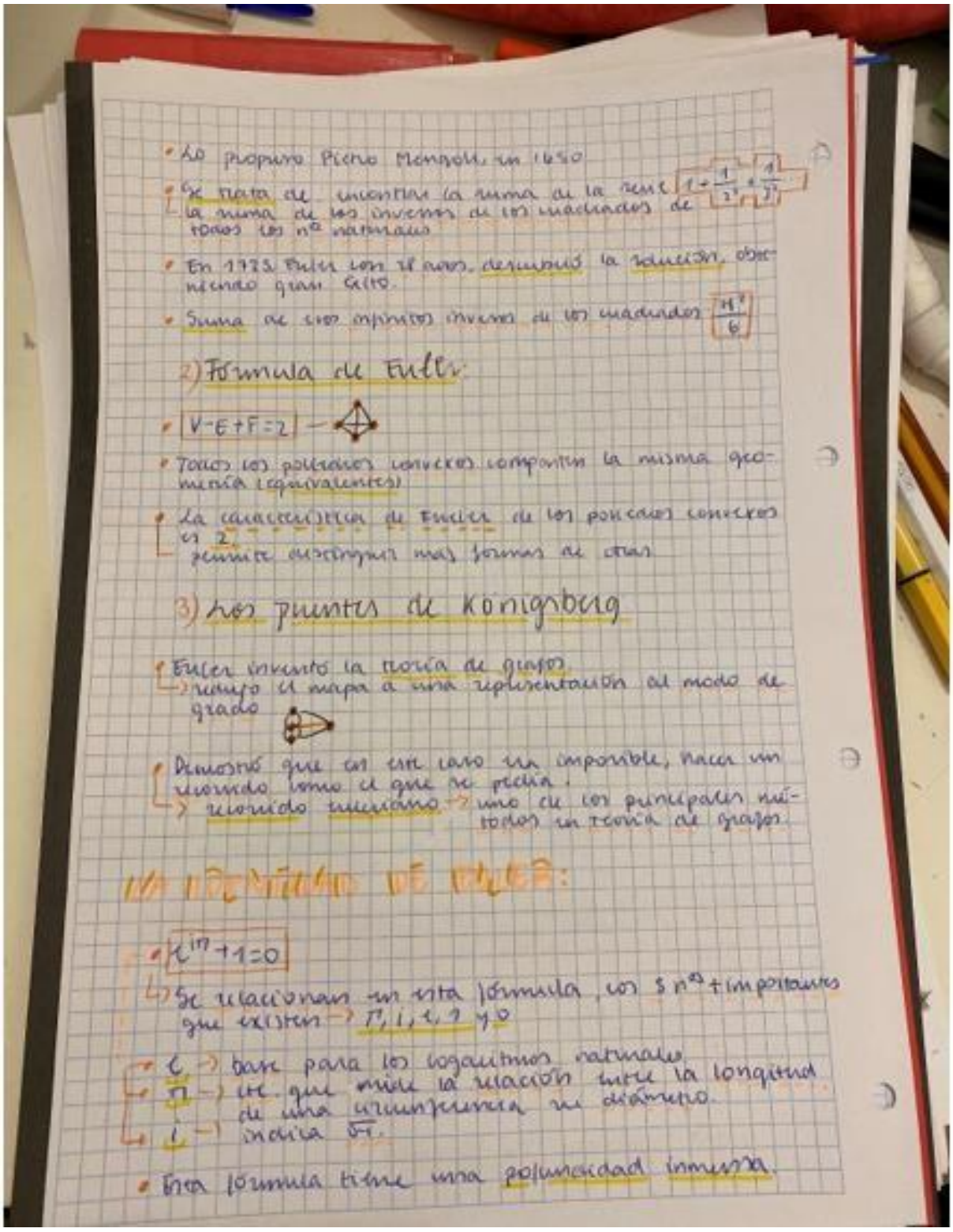


Ilustración 3 Trabajo de Sara R (2ª parte)

Ilustración 4 Trabajo de Elena L

Algunos trabajos de los alumnos sobre GAUSS:

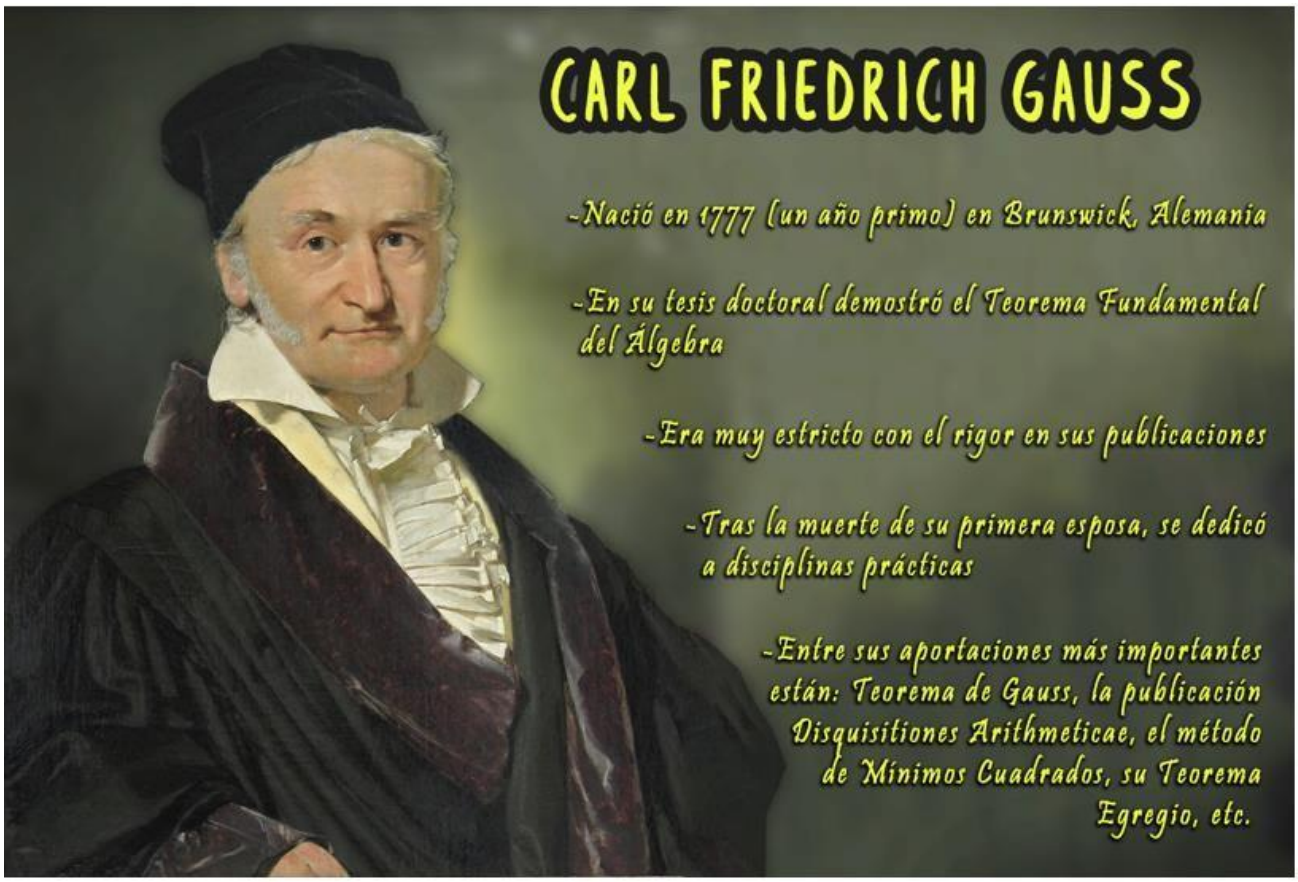


Ilustración 5Trabajo de Iker P.

Ilustración 6Trabajo de Carlota C.

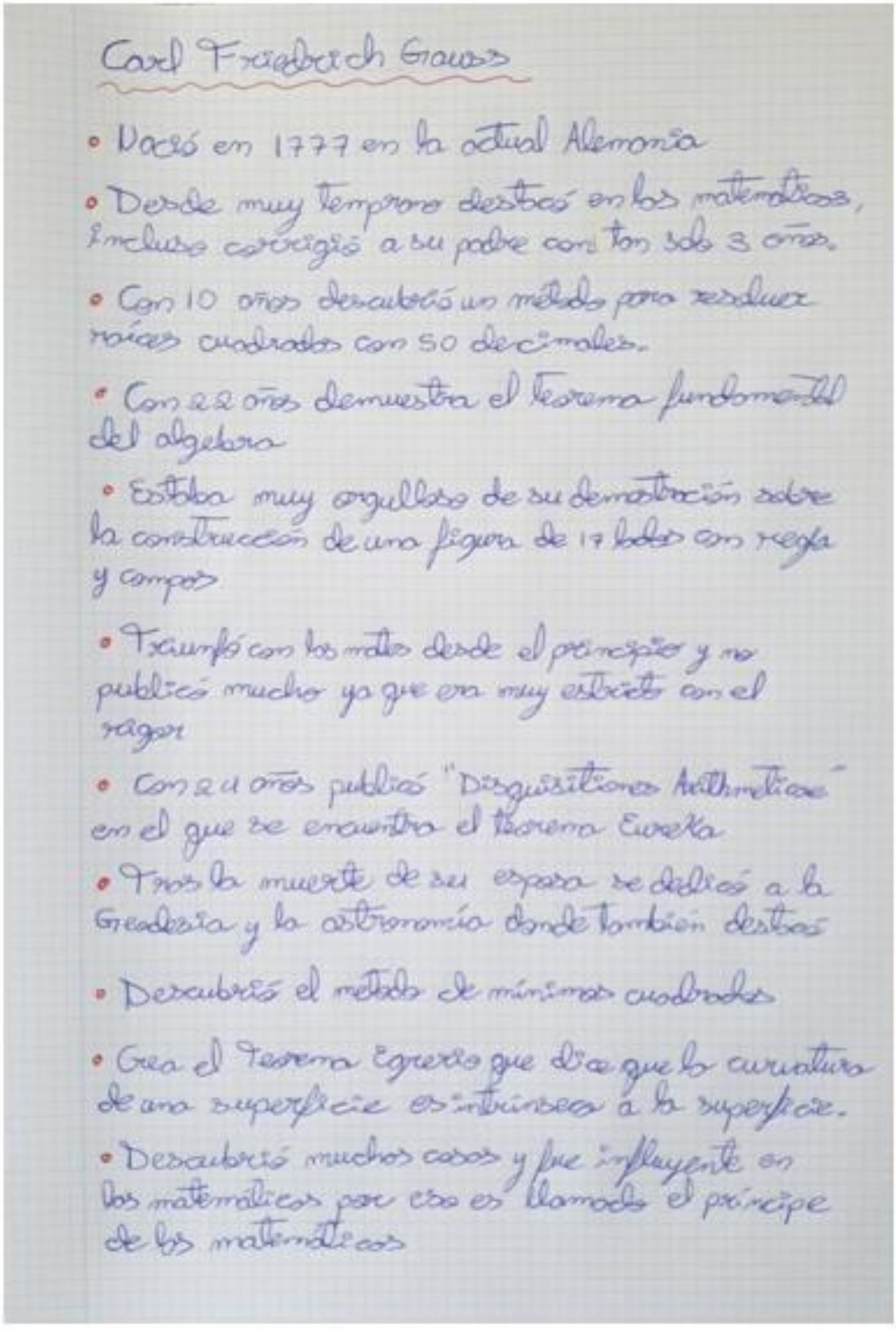


Ilustración 7 Trabajo de Daniel G.

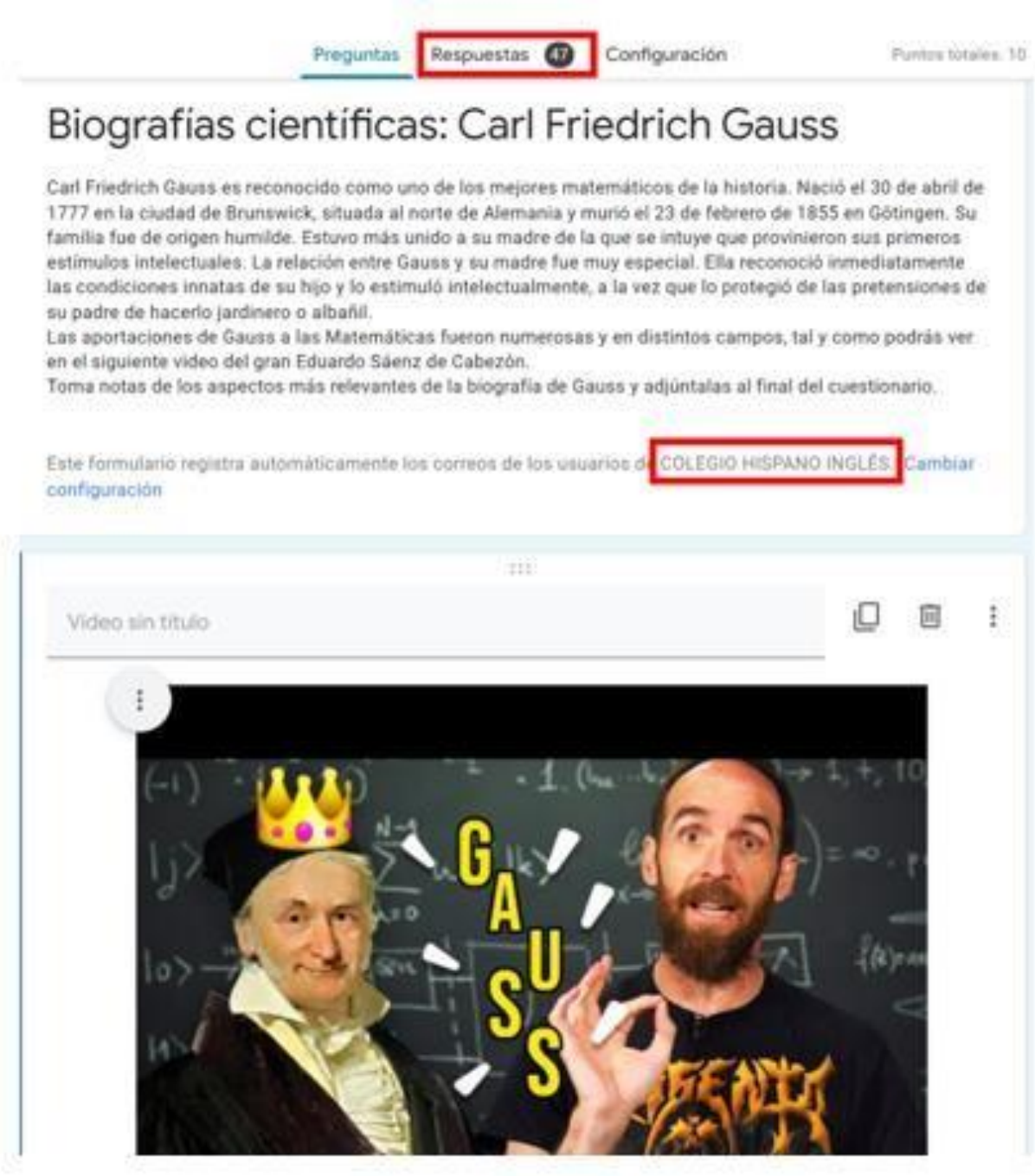
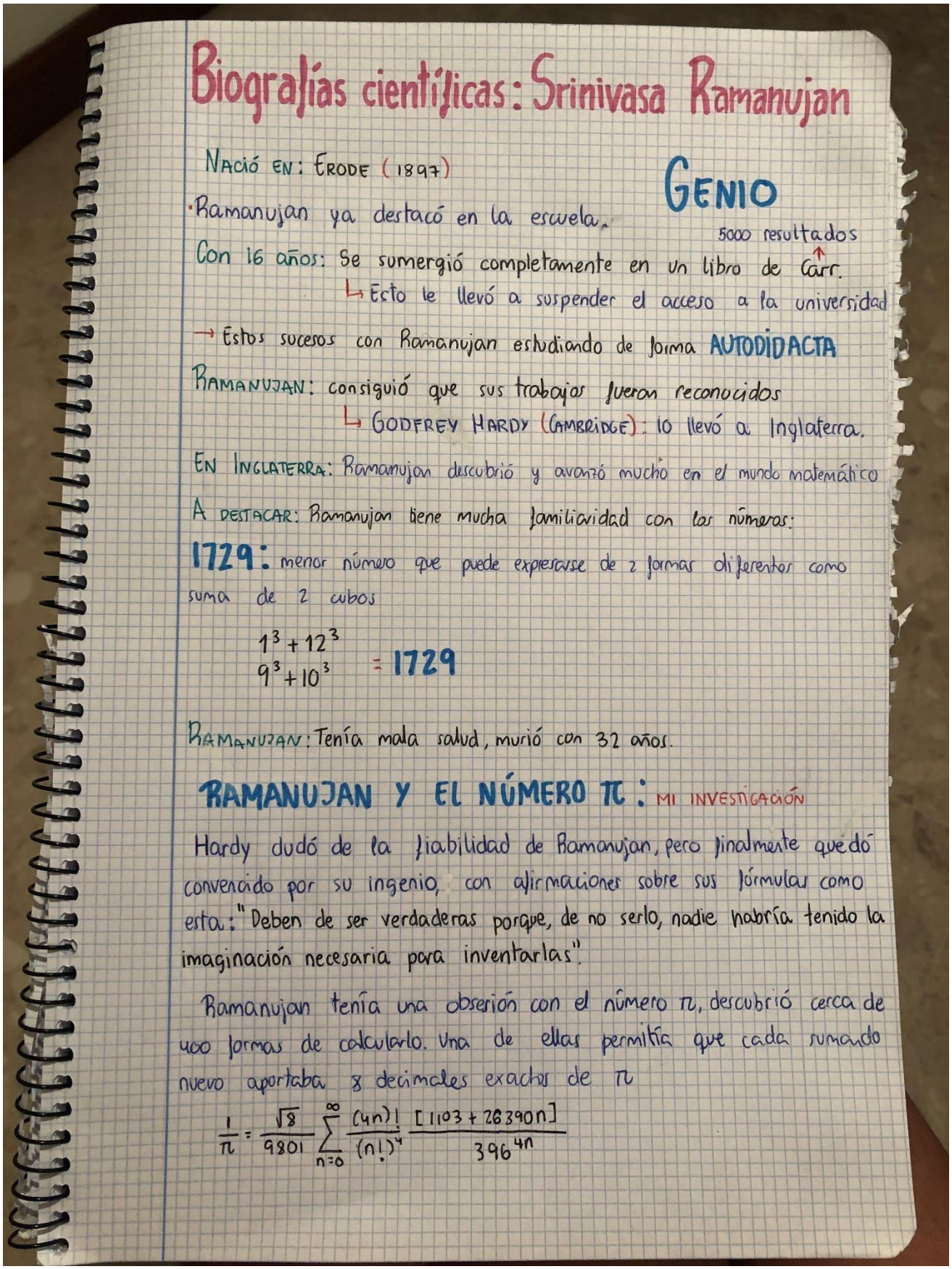


Ilustración 8 Cuestionario vinculado al video de Gauss

Algunos trabajos de los alumnos sobre RAMANUJAN:

Ilustración 9 Cuestionario vinculado al video de Ramanujan

Ilustración 10 Trabajo de Carlota C



Biografías científicas: Srinivasa Ramanujan

NACIÓ EN: ERODE (1897)

GENIO

·Ramanujan ya destacó en la escuela.

5000 resultados

Con 16 años: Se sumergió completamente en un libro de Carr.

↳ Esto le llevó a suspender el acceso a la universidad

→ Estos sucesos con Ramanujan estudiando de forma AUTODIDACTA

RAMANUJAN: consiguió que sus trabajos fueran reconocidos

↳ GODFREY HARDY (CAMBRIDGE): lo llevó a Inglaterra.

EN INGLATERRA: Ramanujan descubrió y avanzó mucho en el mundo matemático

A DESTACAR: Ramanujan tiene mucha familiaridad con los números:

1729: menor número que puede expresarse de 2 formas diferentes como suma de 2 cubos

$$1^3+12^3 \\ 9^3+10^3 = 1729$$

RAMANUJAN: Tenía mala salud, murió con 32 años.

RAMANUJAN Y EL NÚMERO π: MI INVESTIGACIÓN

Hardy dudó de la fiabilidad de Ramanujan, pero finalmente quedó convencido por su ingenio, con afirmaciones sobre sus fórmulas como esta: "Deben de ser verdaderas porque, de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas".

Ramanujan tenía una obsesión con el número π, descubrió cerca de 400 formas de calcularlo. Una de ellas permitía que cada sumando nuevo aportaba 8 decimales exactos de π

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103+26390n]}{396^{4n}}$$

Ilustración 11 Trabajo de Elena L

Referencias:

[1] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/04/30/biografias-cientificas-srinivasaramanujan/

[2] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/04/19/biografias-cientificas-carlfriedrich-gauss/

[3] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/04/06/biografias-cientificas-leonhardeuler/

[4] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/01/11/biografias-cientificas-isaacnewton/

[5] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2022). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2022/05/30/biografias-cientificas-grandesmatematicas/

Enseñanza del ámbito magnitudinal medida a través de talleres cooperativos: Construyendo y diseñando actividades de aprendizaje

Antequera-Barroso, Juan Antonio(1)

jaab@unex.es(1)

Universidad de Extremadura/Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Extremadura (1)

Cáceres García, María José(2)

majocac@usal.es(2)

Universidad de Salamanca/Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Salamanca(2)

Sánchez Barbero, Beatriz(3)

beatrizsanchezb@usal.es(3)

Universidad de Salamanca/ Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Salamanca (2)

Núcleo temático: Procesos y Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Universidad (Grado de Educación Infantil).

RESUMEN

La metodología STEAM promueve el uso integrado de diferentes disciplinas, no siempre empleando la totalidad de ellas. Se habla del uso de esta metodología para el desarrollo competencial en el alumnado, concepto importante a tener en cuenta según la legislación vigente. A la hora de llevarlo al aula los/as docentes juegan un papel trascendental. De ahí, ha surgido uno de los objetivos que nos hemos planteado, conocer si realmente los/as futuros docentes son conscientes del uso o de la necesidad de estas disciplinas a la hora de plantear algunas actividades para su

alumnado. Para ello hemos diseñado un minitaller para trabajar el ámbito magnitudinal-medida en Educación Infantil. Se les pidió la construcción de instrumentos de medida y diseño de actividades con ellos. También se les pasó un cuestionario pre y post minitaller del que se pudo concluir que el único conocimiento que consideraban que debían tener era matemático.

Palabras clave: Educación Infantil, Formación inicial, STEAM, Ámbito MagnitudMedida, Desarrollo Profesional.

Breve fundamentación teórica

Muchas veces cuando se habla de STEM o STEAM o STEM+A (Yakman, 2008) no tenemos totalmente claro en qué consiste o qué es esta nueva metodología. No sólo se trata de una amalgama de disciplinas recogidas en su nombre, se trata de la relación o necesidad que se establece entre las mismas a la hora de realizar distintas actividades o resolver determinados problemas. Greca, Ortiz-Revilla y Arriassecq (2021) indican que es un enfoque complejo y discutido centrado en la resolución de problemas relevantes, cercanos al alumnado y con preferencia del uso de abordajes interdisciplinarios y transdisciplinarios. De igual manera indican Vargas, Cueros y Rivero (2020) citando a Habib et al. (2020) que esta metodología:

> *Permite integrar los conocimientos de ciencias, tecnologías, arte, ingeniería y matemáticas para el desarrollo de habilidades científicas y tecnológicas que aportan a la toma de decisiones asertivas que permitan brindar soluciones reales al contexto de cada estudiante, promoviendo el aprendizaje a lo largo de toda la vida, como lo plantea la UNESCO (p. 327)*

Aparecen aspectos muy estructurados propios de disciplinas STEM y aspectos más creativos como los asociados a las disciplinas artísticas (A) tal y como indican Yakman y Lee (2012). Por tanto, como indica Bybee (2010) algunos aspectos destacables de esta metodología,), son: 1) mejora el entendimiento sobre el funcionamiento de los objetos, 2) aumenta el uso de la tecnología y 3) integración de los principios de la ingeniería en la educación. A estos aspectos se le une 4) la creatividad y la innovación para la solución de los problemas (Kennedy y Odell, 2014; Quigley y Herro, 2016) al incorporar las artes.

Estos aspectos hacen que esta metodología activa sea motivadora y permita al alumnado abordar la resolución de un problema desde varias perspectivas (Oh, Lee y Kim, 2013). La metodología STEAM puede ofrecer una hoja de ruta para diferentes enfoques educativos promoviendo la creatividad como elemento motivador a través de la autoeficacia (Conradty, Sotiriou y Bogner, 2020). El alumnado es consciente de los resultados de su tarea o actividad y adquiere confianza y motivación hacia las disciplinas que forman STEAM (Clapp y Jiménez, 2016).

Desarrollo del minitaller

Este minitaller pretende recoger los tres momentos metodológicos que trabajamos en la asignatura Educación Matemática en Educación Infantil. El primer momento metodológico consiste en la reconstrucción del conocimiento relacionado con el ámbito magnitudinal-medida trabajado en gran grupo. A continuación, se trabaja el segundo momento metodológico, el aprendizaje del ámbito. Y, por último, se desarrolla el tercer momento metodológico relacionado con la enseñanza del ámbito de conocimiento. Este momento es el principal de este minitaller para fomentar el desarrollo profesional de los/as futuros/as maestros/as. En él, los/as estudiantes del Grado de Educación Infantil, en pequeños grupos de 4 o 5, exponen sus ideas previas sobre el conocimiento que quieren trabajar, analizan las oportunidades que pueden surgir, así como posibles problemas a los que ellos, como futuros docentes, y su alumnado se deberían enfrentar. Todo ello a través de un proceso de negociación y diálogo que desemboca en el diseño consensuado y la construcción de diferentes instrumentos de medida y de actividades que se deberán realizar con los/as niños/as de Educación Infantil para el desarrollo del conocimiento magnitudinal-medida.

En este minitaller el/la docente de la asignatura interactúa tanto en gran grupo como con cada uno de los pequeños grupos en los que se ha dividido el gran grupo para la realización de los seminarios de prácticas a modo de guía o asesor. El/la docente al inicio del taller plantea la situación problemática a la que pretende que den respuesta su estudiantado. Se generan así oportunidades de desarrollo del conocimiento al conectar un discurso sobre el conocimiento trabajado y el problema planteado en el ámbito de conocimiento. Para todo ello el docente facilita lecturas formativas para

poder comentar tanto en pequeños grupos como en gran grupo, dando lugar así a una construcción individual y grupal de conocimiento trabajado cuando se da respuesta a los interrogantes planteados en la situación problema. Se genera así un ambiente de debate y contraste de ideas que mejora las condiciones de trabajo en el aula tal y como indica Lyons (1999).

Planificación del trabajo en pequeños grupos

Para la recogida de información se diseñaron un par de cuestionarios Google Form que se pasarían al principio y al final del minitaller para rellenar de manera individualizada y anonimizada. Los cuestionarios tenían tres partes: Una primera parte relacionada con los conocimientos propios del ámbito, una segunda parte relacionada con su creencia sobre la utilización de otras disciplinas para la construcción de los instrumentos. Y una última parte relacionada con su creencia sobre la utilidad del taller. En todas estas partes se introdujo un apartado para que el estudiantado pudiese mostrar o justificar su opinión sobre la respuesta dada. Otro de los instrumentos de recogida de información fue un informe en el que los/as estudiantes elaboraron un discurso propio sobre todo aquello que consideraron relevante, incluyendo sus reflexiones/discusiones sobre el ámbito, sus diseños, tanto bocetos como fotos, y sus propuestas de actividades.

Este trabajo se realizó de manera grupal, pequeños grupos, en los que sus miembros debatieron entre sí, hicieron propuestas, plantearon dudas e interaccionaron con el/la docente para construir los instrumentos de medida con material reciclado que ellos/as aportaron al grupo. Este trabajo les planteó el reto de diseñar, construir y adaptar dichos instrumentos para cumplir los objetivos que se plantearon en sus actividades. Instrumentos originales y llamativos para poder ser usados en un aula de Educación Infantil.

El guion propuesto para el desarrollo del minitaller para el diseño y construcción de los instrumentos fue:

1º.- Ser creativo e imaginativo. Dejar volar la imaginación para crear algo útopico, algo que considerasen llamativo para su alumnado. De manera individual.

2º.- Poner en común sus ideas y llegar mediante el diálogo y la negociación con sus iguales llegar a un consenso sobre los instrumentos y las actividades a desarrollar.

Trabajo en pequeños grupos.

3º.- Plasmar en un boceto sus ideas consensuadas. Trabajo en pequeños grupos. 4º.- Utilizar materiales reciclados para su construcción con lo cual también contribuimos a los objetivos de desarrollo sostenible. Trabajo en pequeños grupos. 5º.- Construcción y reformulación, en su caso, de los instrumentos y sistema de medidas. Trabajo en pequeños grupos.

6º.- Exposición a sus compañeros/as de clase de sus instrumentos y sistemas de medida. Así como de alguna de las actividades planteadas. En gran grupo.

Objetivos del minitaller

El minitaller trataba de desarrollar tres objetivos generales:

Favorecer el desarrollo de la competencia didáctico-matemática de los/as estudiantes en el diseño de situaciones y actividades de aprendizaje a través del uso de los instrumentos de medida diseñados.

Determinar los conocimientos necesarios para la correcta realización de los instrumentos de medida y de las actividades planteadas.

Favorecer la colaboración entre los/as estudiantes en el taller para el correcto desarrollo del diseño y construcción de los instrumentos de medida.

Resultados y discusión

A continuación, se muestran los resultados recabados en los cuestionarios Google Forms tanto al inicio como al final del cuestionario. Como se indicó anteriormente, las primeras cuestiones se encuentran relacionadas con sus conocimientos sobre distintas nociones relacionadas con el ámbito magnitudinal-medida.

La primera de las preguntas que contestaron era sobre su conocimiento sobre la noción de magnitud. Como se pudo observar en la Figura 1, los/as estudiantes consideraron al inicio del minitaller que tienen claro que es una magnitud y en menor medida los que respondieron que no lo sabían o que no sabían qué contestar. Al final del minitaller se pudo observar como aumentaba el porcentaje de estudiantes que decían conocer mejor el concepto de magnitud.

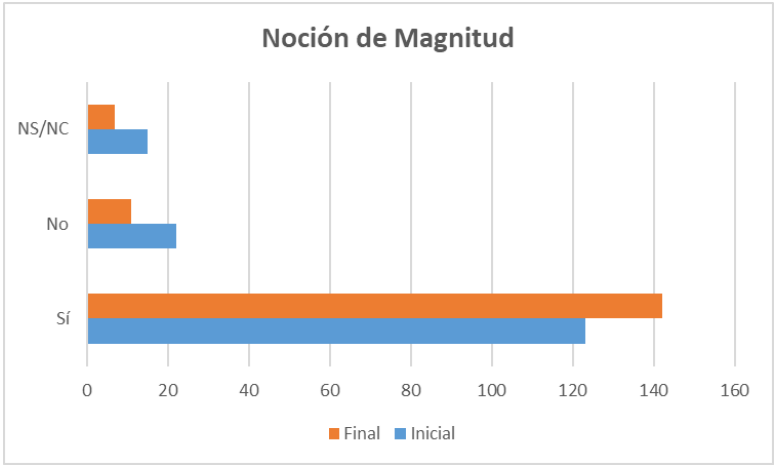


Figura 1.- Opinión de los/as estudiantes sobre su conocimiento sobre la noción de magnitud.

La segunda de las nociones por las que se preguntó fue sobre unidades de magnitud, véase Figura 2. De nuevo, mayoritariamente tanto al principio como al final del minitaller muestraron que sí conocían el concepto de unidad. Fue sorprendente que aumentase ligeramente el porcentaje de estudiantes que respondían que no sabían, no contestaban. La razón podría residir en la ruptura del concepto que ellos tenían antes y que han modificado, aunque no lo han interiorizado.

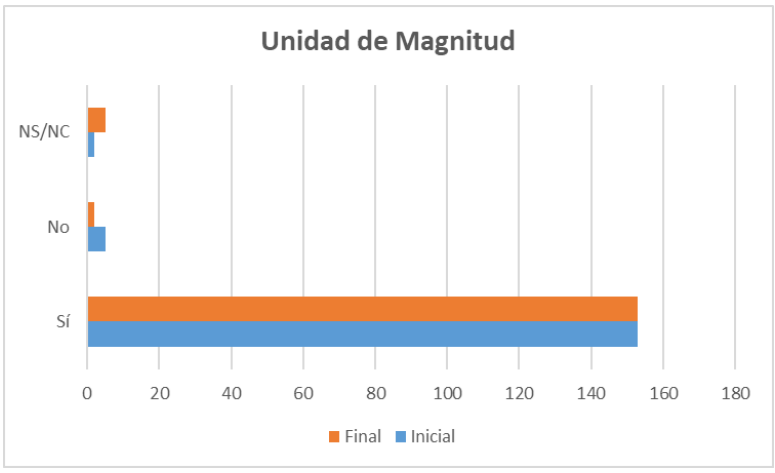


Figura 2.- Opinión de los/as estudiantes sobre su conocimiento sobre la noción de unidad de magnitud.

La tercera cuestión que se planteó fue si conocían qué era un sistema de medidas. De nuevo en la Figura 3, se pudo observar cómo mejoró el conocimiento sobre esta noción al final del minitaller, aunque el número de estudiantes que consideraron que no sabían qué es un sistema de medidas no ha variado a pesar de realizar el minitaller. De nuevo las razones podrían encontrarse en el conocimiento que ya tenían previamente interiorizado y que cuesta modificar.

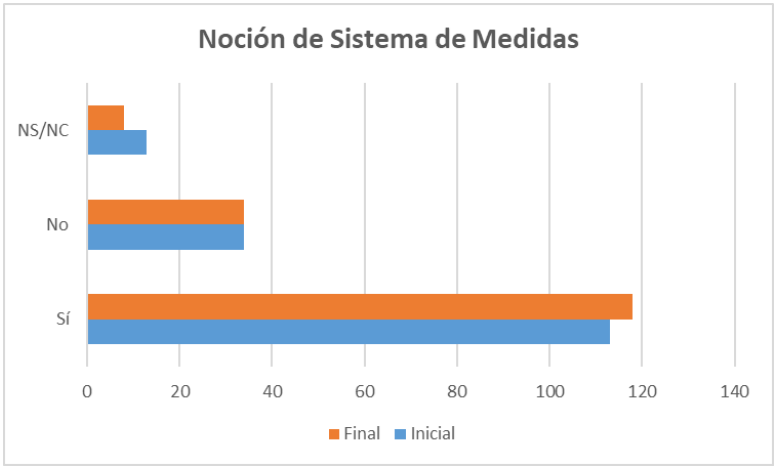


Figura 3.- Opinión de los/as estudiantes sobre su conocimiento sobre la noción de sistema de medidas.

La última cuestión de este bloque del cuestionario versó sobre el uso de instrumentos de medida. Mayoritariamente los/as estudiantes consideraron que conocían perfectamente el uso de instrumentos. Aunque al final del minitaller algunos/as

estudiantes consideraron que habían mejorado su conocimiento a través del minitaller como pudo verse en la Figura 4.

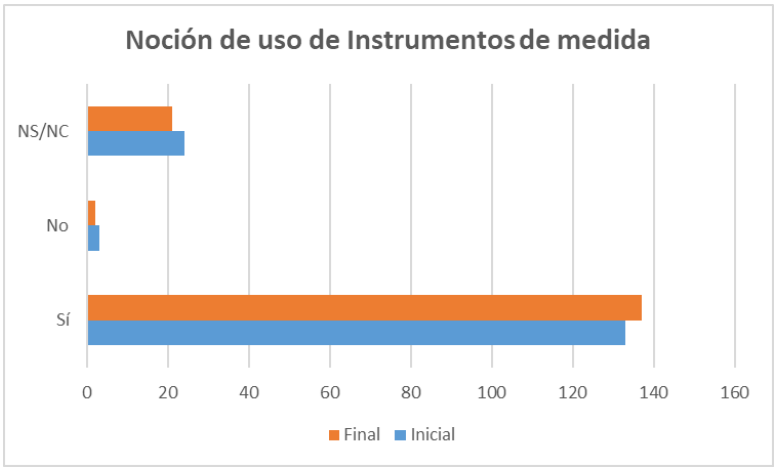


Figura 4.- Opinión de los/as estudiantes sobre su conocimiento sobre la noción del uso de instrumentos de medida.

Las respuestas dadas a las cuestiones planteadas se entiendieron mejor al analizar los comentarios que dejaron los/as estudiantes al final del bloque. Los comentarios se podían resumir en las siguientes afirmaciones.

Estudiante 1.- Las medidas, los sistemas y los instrumentos de medida son algo que conocemos de siempre. Nos los han dado en “mates” y en “ciencias”

Estudiante 2.- Lo que recuerdo de las medidas era lo de la escalera de medidas. Fue algo que nos insistieron mucho, multiplicar por 10 o dividir por 10 para pasar de una a otra unidad. Aunque a día de hoy sigo sin tenerlo claro.

Estudiante 3.- Las medidas se aprendían de memoria. Nos hacían pasar de una a otra repetidamente. Usábamos la escalera de medidas, multiplicar o dividir para pasar de una a otra. Así las aprendí. Los instrumentos los he aprendido en casa con mis padres, en clase era en plan teórico con el libro.

El segundo bloque del cuestionario preguntaba sobre el grado de acuerdo con la necesidad de utilizar otras disciplinas para la elaboración de sus instrumentos de medida para Educación Infantil. Para ello se utilizó una escala tipo Likert, donde 1 es

totalmente desacuerdo y 4 totalmente de acuerdo. En concreto las afirmaciones se centraron en las disciplinas tipo STEAM.

En la Figura 5 se observaron las respuestas dadas sobre la necesidad o no de utilizar nociones de Ciencias (S) en el diseño y construcción de los instrumentos de medida. La gráfica mostró como los/as estudiantes mayoritariamente indicaron que se encuentraban tanto al inicio como al final de taller algo de acuerdo con la necesidad de usar nociones de Ciencias en la elaboración de su instrumento de medida. En el informe mostraron nociones como equilibrio, densidad, punto de apoyo, que al colocar un objeto en uno de los brazos este bajaba, etc. Sin embargo, también hay un número elevado de estudiantes que se mostraron algo desacuerdo con el uso de las nociones de Ciencias. Alguno de los argumentos esgrimidos versó sobre su creencia en que no son necesarias estas nociones porque son de “mates” o es algo que ha comentado el “profe”.

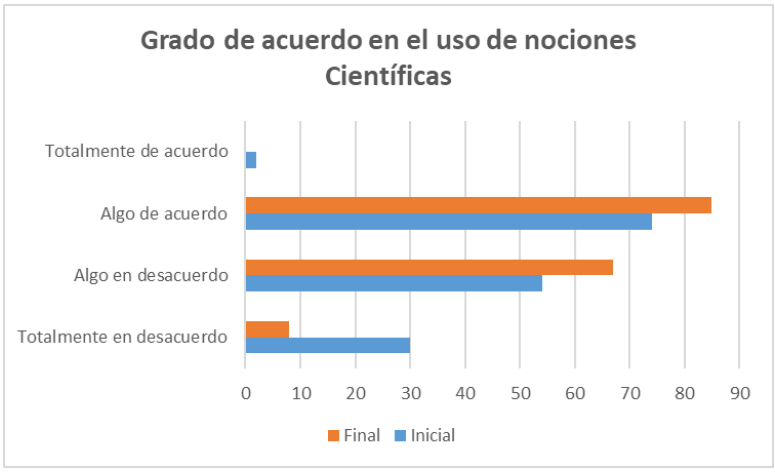


Figura 5.- Grado de acuerdo de los/as estudiantes sobre la necesidad de usar nociones de Ciencias.

La siguiente cuestión se relacionó con el acuerdo con el uso de nociones sobre tecnología (T). La respuesta mayoritaria tanto al inicio como al final del minitaller, como se pudo ver en la Figura 6, es que se mostraron algo en desacuerdo, aunque al final del taller aumentó el número de estudiantes que se mostraban algo de acuerdo con el uso de este tipo de nociones. Frases como “lo más tecnológico que hemos usado ha sido el portátil para compartir el documento en Drive o el móvil para hacer fotos y pasarlas al grupo”. O “hemos intentado hacer el boceto a ordenador ya que no somos buenos/as pintando, pero nos ha sido imposible”. O “esto me suena a las clases de tecnología en el “insti”, aunque esto lo usábamos para trabajar la

perspectiva, creo". Estas opiniones podrían justificar la respuesta mayoritaria al uso de nociones de tecnología.

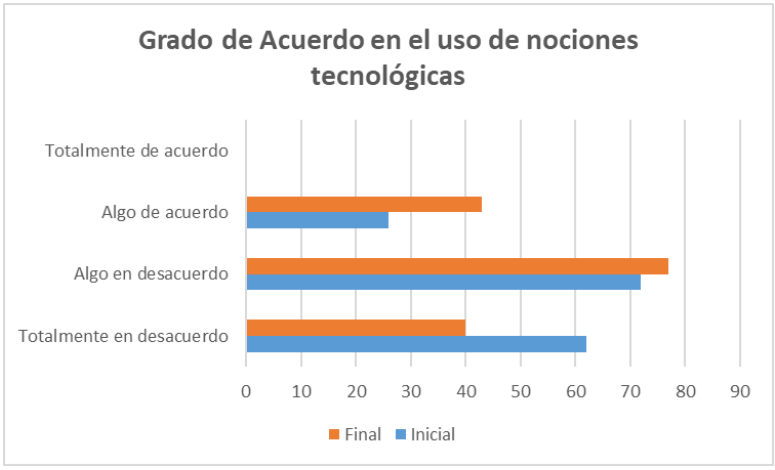


Figura 6.- Grado de acuerdo de los/as estudiantes sobre la necesidad de usar nociones de Tecnología.

En la Figura 7 se mostraron las respuestas al grado de acuerdo de los/as estudiantes al uso de nociones sobre Ingeniería (E). De nuevo, la respuesta mayoritaria para los/as estudiantes fue algo en desacuerdo, aunque al final del minitaller aumentó el número de estudiantes que se mostraron algo de acuerdo. La justificación para el grado de algo en desacuerdo podría residir en el hecho que refleja un estudiante al decir que: "Voy a ser maestro, no ingeniero". Y el aumento en algo de acuerdo, podría estar en el hecho de que, al pasar del boceto, su idea, al modelo físico este no funcionaba como lo tenían pensado o no tenía las medidas que consideraron adecuadas para poder usarlos. Por lo que tuvieron que reformular su boceto, aunque también algunos/as no tenían claro si eso son nociones de ingeniería.

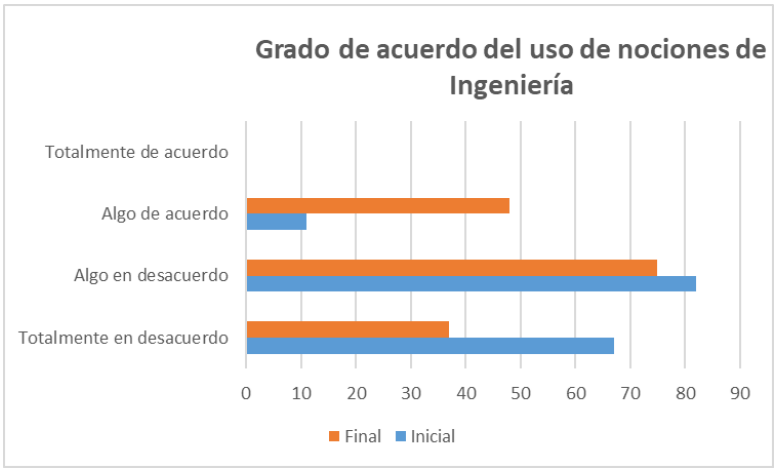


Figura 7.- Grado de acuerdo de los/as estudiantes sobre la necesidad de usar nociones de Ingeniería.

Las nociones de Arte (A) pasaron más desapercibidas para los/as estudiantes. Fijándonos en la Figura 8 se pudo observar como las respuestas oscilaban entre algo y totalmente en desacuerdo, aunque al final aumentó el número de estudiantes que consideraron que sí las habían utilizado, viéndose reflejado en los que marcaron algo de acuerdo. Las razones dadas por los/as estudiantes se podían resumir en "lo más artístico que hemos hecho ha sido el boceto, el dibujo que nos ha pedido el profe". O, "no veo la necesidad de usar nada de arte lo único que hemos hecho ha sido usar material que ya teníamos y unirlo". Precisamente este último argumento aparece recogido en la opinión de un/a estudiante que indicó que "está algo de acuerdo ya que han unido los materiales, han usado engrudo, pintura, purpurina y otras cosas para darle un aspecto divertido, original y llamativo".

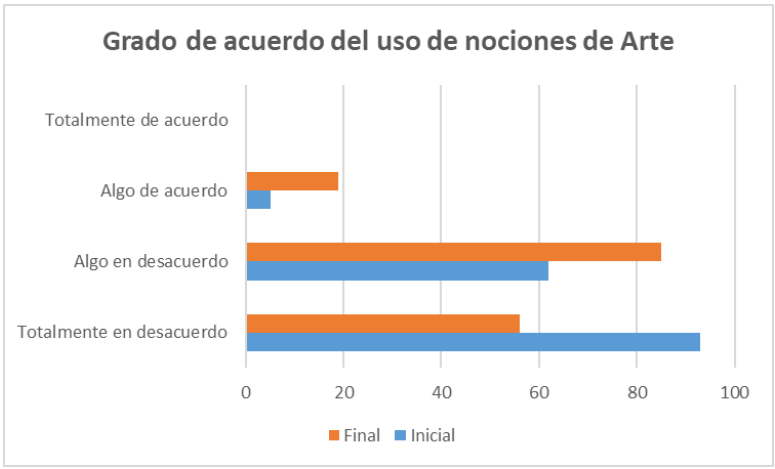


Figura 8.- Grado de acuerdo de los/as estudiantes sobre la necesidad de usar nociones de Arte.

La última de las afirmaciones sobre las que se pidió su grado de acuerdo fue sobre la necesidad de usar nociones matemáticas (M). Tal y como se pudo ver en la Figura 9, los/as estudiantes mayoritariamente se encuentraban algo de acuerdo, tanto al principio como al final del minitaller, con la necesidad de usar nociones de Matemáticas. De hecho, la respuesta más dada por los/as estudiantes sobre la necesidad de usar este tipo de nociones es: "Si estamos en "mates" y esto es una tarea de mates pues habrá que usarlas, ¿no?" Otra de las respuestas que justificaría el aumento al final del minitaller de la respuesta algo de acuerdo podría ser como decía un/a estudiante que afirmaba que "habían necesitado otras cosas además de las matemáticas". Esta respuesta se encontraría relacionada con uno de los objetivos

marcados en el minitaller, descubrir si son capaces de encontrar la necesidad de otras disciplinas para resolver el problema planteado al principio.

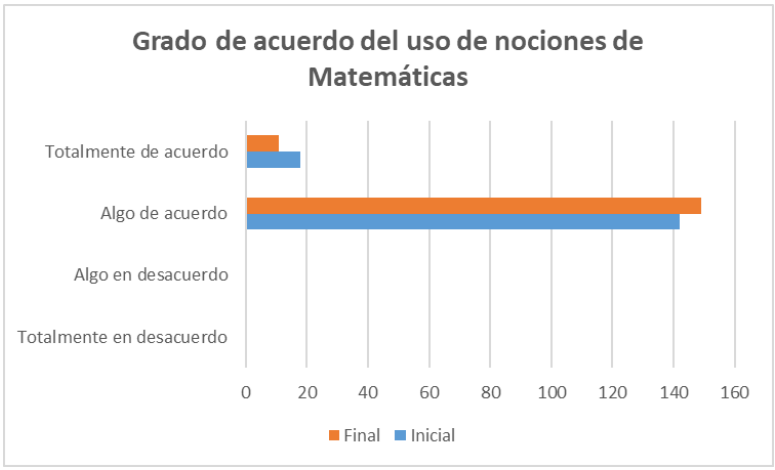


Figura 9.- Grado de acuerdo de los/as estudiantes sobre la necesidad de usar nociones de Matemáticas.

Por último, el cuestionario Google Form recogía dos cuestiones de cierre. La primera sobre su creencia en la utilidad del minitaller. Y la segunda relacionada con la dificultad que le atribuían. Ambas cuestiones se realizaron tanto al principio como al final del minitaller.

A la cuestión sobre su creencia en la utilidad del taller, como se pudo ver en la Figura 10, mayoritariamente consideraron que fue útil el taller. Las razones argumentadas principalmente versaban sobre la nueva perspectiva que les había dado el minitaller, que era una manera distinta de enseñar las medidas a la que estaban acostumbrados/as, algo más divertido. Sin embargo, podemos observar como ha aumentado el número de respuestas negativas, en este caso alguno de los argumentos dados es que “esta manera no es aplicable a otras etapas educativas, que ya hay material establecido para ello”.

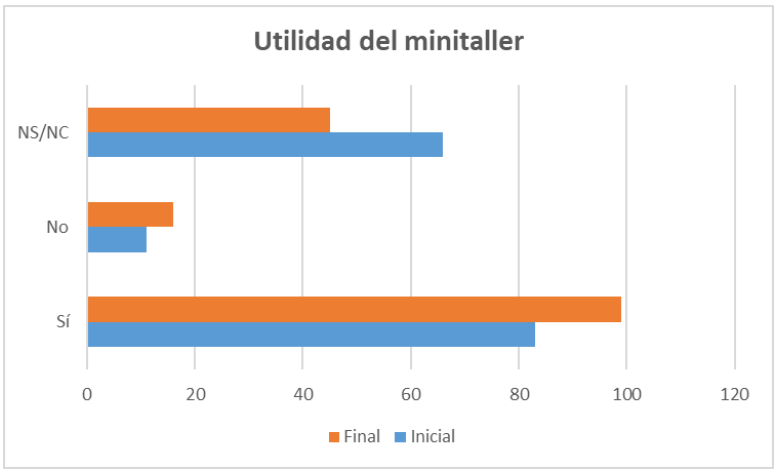


Figura 10.- Creencia de los estudiantes sobre la utilidad del minitaller.

Con respecto a la creencia de la dificultad del taller pudimos ver, Figura 11, como la mayoría de nuestros/as estudiantes consideraba que la dificultad es alta o muy alta, siendo 1=muy baja y 5=muy alta. Aunque pudimos observar como ha bajado la consideración de muy alta y aumentado la consideración de muy baja. Las razones de sobre la dificultad de este taller podría residir en las ideas negativas que tienen hacia el conocimiento matemático. De hecho, al indagar entre los distintos grupos una de las respuestas que más dan son que no son buenos/as en matemáticas, que no tuvieron un/a buen/a docente que se las hiciera atractivas, que todo lo que tiene que ver con las mates les agobia o que son difíciles, aunque se hagan en un taller divertido.

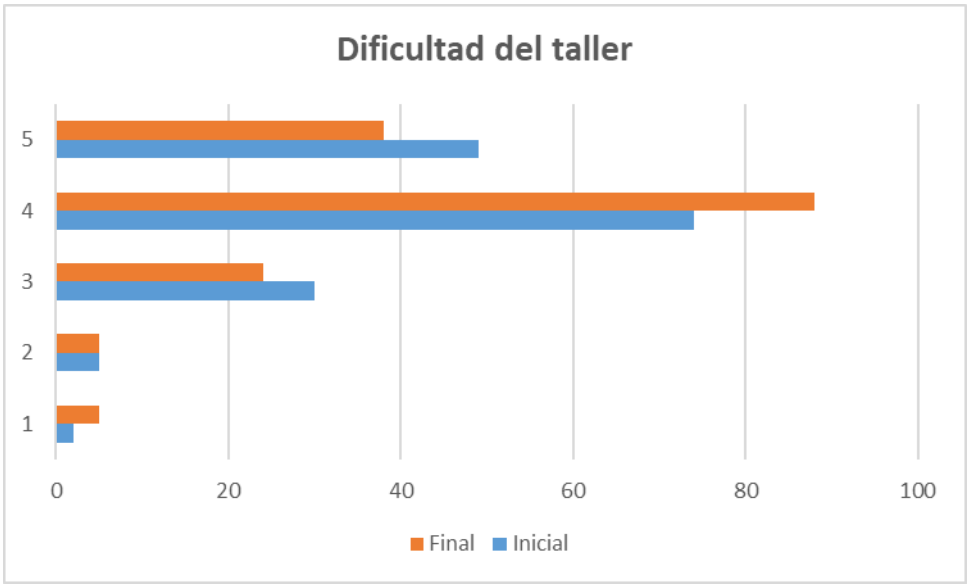


Figura 11.- Creencia de los estudiantes sobre la utilidad del minitaller.

Conclusiones

Una de las ideas de este tipo de talleres colaborativos es tratar de minimizar las emociones negativas que manifiestan los/as estudiantes hacia el conocimiento matemático. Este tipo de talleres permite generar oportunidades de conocimiento, haciendo que los/as estudiantes sean partícipes de la construcción de su conocimiento, desarrollando los distintos aspectos de la didáctica, los conocimientos, el aprendizaje y la enseñanza. Aspectos que caracterizarán a los futuros/as maestros/as en el desarrollo profesional de su carrera como docentes.

De ahí el primer objetivo que nos planteamos con este taller, desarrollar la competencia didáctico-matemática a través del diseño y construcción de instrumentos de medida con una forma original y llamativa y su implementación a través de una propuesta de actividades a realizar con ellos, podemos decir que este objetivo se ha cumplido en la mayoría de los trabajos realizados. Decimos que se ha cumplido en su mayoría ya que las actividades planteadas por los/as estudiantes ha sido superficial, han sido ejemplos muy tradicionales que no les ha permitido arriesgar en las actividades, aunque sí cumplen los objetivos planteados con los instrumentos y su desarrollo. De acuerdo con las respuestas dadas, en el primer y en el tercer bloque del formulario Google podríamos considerar que ha mejorado su competencia didáctico-matemática en el este ámbito de conocimiento. Han visto la utilidad del taller y las posibilidades que ofrece tanto para ellos/as como para su futuro alumnado, aunque sin conseguir eliminar esas emociones negativas que tiene interiorizadas, en su mayoría, por factores externos a esta asignatura.

El segundo de los objetivos planteados en el taller trata sobre la necesidad o no de utilizar otros conocimientos como se indica en la metodología STEAM. En nuestro caso los/as estudiantes tenían claro que el principal conocimiento a trabajar era el conocimiento matemático, aunque a medida que se iba desarrollando fueron capaces, en su mayoría, detectar que necesitaban otros conocimientos o nociones para poder desarrollar la tarea encomendada. De las siglas de STEAM la que más consideraron, o al menos más términos aparecieron, fueron nociones de Ciencias y en menor

medida el resto. Sorprende que prácticamente no consideraron la parte artística a pesar de ser una de las consignas que se les dio al principio del taller, un instrumento original y llamativo para su futuro alumnado de Educación Infantil.

Y el último de los objetivos planteado fue favorecer la colaboración entre los/as estudiantes de los pequeños grupos y de gran grupo. En este caso podemos decir que el objetivo sí se cumplió totalmente ya que en todo momento se produjo la implicación de todos los/as miembros del grupo en un correcto desarrollo de los instrumentos y las actividades. Hubo discusión, negociación y acuerdos sin la intervención del docente o simplemente como guía o asesor de su trabajo.

Por tanto, podríamos concluir que el taller ha servido para ofrecer una visión distinta de la forma de trabajar el conocimiento lógico-matemático, más cercana a sus intereses de futuro y a su propia reflexión sobre los mismos. Esto también les ha permitido observar la conexión o relación entre distintas disciplinas. Y como con el trabajo común, llegando a acuerdos han podido superar el problema planteado al principio del taller.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto REALINTER (PIC-2022-05) financiado por Universidad de Salamanca y respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa).

Referencias

Bybee, R. W. (2010). Advancing STEM Education: A 2020 Vision. *Technology and Engineering Teacher*, 70(1), 30-35.

Clapp, E. P. y Jimenez, R. L. (2016). Implementing STEAM in maker-centered learning. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, 10(4), 481-491. https://doi.org/10.1037/aca0000066

Conradty, C., Sotiriou, S. A. y Bogner, F. X. (2020). How Creativity in STEAM Modules Intervenes with Self-Efficacy and Motivation. *Education Science*, 10, 70. https://doi.org/10.3390/educsci10030070

Greca I. M., Ortiz-Revilla J. y Arriassecq, I. (2021) Diseño y evaluación de una secuencia de enseñanza-aprendizaje STEAM para Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 18(1), 1802. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i1.1802

Kennedy, T. J. y Odell, M. (2014). Engaging students in STEM education. *Science Education International*, 25(3), 246-258.

Lyons, N. (1999). El uso del portafolio para el aprendizaje y la evaluación. Buenos Aires: Amorrortu.

Oh, J., Lee, J. y Kim, J. (2013). Development and application of STEAM based education program using scratch: Focus on 6th graders" science in elementary school. *In Multimedia and ubiquitous engineering* (pp. 493-501). Springer, Dordrecht.

Quigley, C. F. y Herro, D. (2016). "Finding the joy in the unknown": Implementation of STEAM teaching practices in middle school science and math classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, 25(3), 410-426. https://doi.org/10.1007/s10956-016-9602-z

Vargas, J. Cuero, J. y Riveros, F. (2020). Transformación digital y enfoque STEAM, una alternativa en tiempos de COVID-19. *Espacios*, 41(42), 326-334. https://doi.org/10.48082/espacios-a20v41n42p28

Yakman, G. (2008). STEAM education: An overview of creating a model of integrative education. [Conference]. En Pupils' Attitudes Towards Technology (PATT-15). Salt Lake City, USA.

Yakman, G., y Lee, H. (2012). Exploring the exemplary STEAM education in the US as a practical educational framework for Korea. *Journal of the Korean Association for Science Education*, 32(6), 1072-1086. https://doi.org/10.14697/jkase.2012.32.6.1072

Diseño e implementación de una experiencia de evaluación entre iguales en Educación Superior para el aprendizaje online de Matemáticas

Francesc Garcia Tercero
fgarciater@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya

Yolanda Colom Torrens
ycolom@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya

Jordi Anguita Ruiz
janguitar@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya

Teresa Sancho Vinuesa
tsancho@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya

Núcleo temático: Evaluación

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universidad

RESUMEN

Este artículo presenta el diseño e implementación de una actividad de evaluación entre iguales integrada en una asignatura optativa, común a varios grados universitarios, de matemáticas básicas impartida en modalidad online, con el objetivo de aumentar la interacción entre el alumnado y mejorar su proceso de aprendizaje.

Para ello, se muestra el análisis de las producciones realizadas por dos alumnos durante la implementación de la actividad, así como de las percepciones de todos los estudiantes, una vez finalizada la experiencia.

Palabras clave: evaluación entre iguales, educación superior, matemáticas, educación online

1. Introducción

Iniciación a las matemáticas para la ingeniería es una asignatura propedéutica optativa, común al grado de Ingeniería Informática, al grado de Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación y al grado de Ciencia de Datos Aplicada de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Es, por tanto, una asignatura que se imparte en modalidad online y de manera asíncrona, cuyo objetivo es trabajar las competencias matemáticas básicas necesarias para afrontar con garantías de éxito otras asignaturas de alto contenido matemático.

La estrategia docente en esta asignatura se basa en la actividad continua del estudiantado a través de cuestionarios parametrizados, con corrección y feedback automático. Semanalmente, debe realizarse un cuestionario de evaluación con 5 preguntas cuya corrección es automática (similares a las que existen en otros cuestionarios que el alumnado usa para practicar) y un sexto ejercicio en el que deben exponerse los razonamientos y procedimientos matemáticos aplicados. Para su realización, se dispone de un único intento que, una vez abierto, debe ser entregado en un plazo máximo de 24 horas. Al terminar dicho intento, el estudiante recibe una retroalimentación inmediata por parte del sistema y, posteriormente, también recibe los comentarios individualizados y la calificación del docente en relación con la pregunta de desarrollo.

Aunque los resultados académicos y de satisfacción de los estudiantes son buenos (Figueroa y Sancho, 2017; Villalonga y otros, 2023) el equipo docente de la asignatura

ha decidido explorar la eficiencia de una actividad de evaluación entre iguales. El motivo de tal decisión es doble: por un lado, aumentar la interacción entre el alumnado en el espacio virtual de aprendizaje y, por otro, ofrecer al estudiantado estrategias y herramientas que favorezcan la mejora del aprendizaje de las matemáticas.

En esta comunicación se analizan las producciones de dos estudiantes y también se analizan las percepciones de los estudiantes respecto a la experiencia diseñada con el propósito de evidenciar la validez de la propuesta.

2. Evaluación entre iguales: revisión de la literatura

Inicialmente, Topping (1998) definió la evaluación entre iguales o evaluación por pares como “an arrangement in which individuals consider the amount, level, value, worth, quality, or success of the products or outcomes of learning of peers of similar status” (p.250). Esta definición podría ser traducida al castellano como “la valoración que hacen los estudiantes sobre la cantidad, calidad y resultados del aprendizaje de sus compañeros” (Gil y Padilla, 2009, p.50). Sin embargo, el desarrollo de nuevos diseños, la aparición de nuevos métodos de enseñanza o, incluso, de nuevas herramientas, hace necesaria una definición más actual de esta estrategia evaluativa. Así, Alqassab y otros (2023), proponen en su investigación una definición actualizada, considerando la evaluación entre iguales como

> un fenómeno de aprendizaje en el que individuos o agrupaciones sociales (por ejemplo, parejas, grupos, equipos, comunidades) –dentro de un entorno físico y/o virtual– intercambian, reaccionan, interactúan y/o actúan en función de la información sobre el rendimiento individual y/o las contribuciones individuales al proceso y/o producto de una agrupación social, con el fin de alcanzar objetivos de aprendizaje implícitos o explícitos, compartidos o individuales (por ejemplo, conocimientos o destrezas específicos de un ámbito, habilidades sociales, etc.). (p. 2)

Esta definición incluye las múltiples posibilidades de diseño de una experiencia de evaluación entre iguales hoy en día. En efecto, inicialmente Topping (1998) definió una tipología formada por 17 variables a través de las cuales se podía diseñar una actividad de evaluación por pares en educación superior. Pero desde entonces, son muchos los investigadores que han propuesto refinamientos o modificaciones de dicha aproximación inicial (Adachi y otros, 2018; Gielen y otros, 2011; Van den Berg y otros, 2006; Van Gennip y otros, 2009), agrupando, eliminando o añadiendo nuevas variables de diseño.

La literatura recoge varios trabajos que evidencian que la evaluación entre iguales tiene un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes (Sánchez y otros, 2017; Topping, 2017; Li y otros, 2020; Double y otros, 2020), aunque las distintas variables del diseño de una actividad de evaluación por pares o, incluso, otros factores relacionados con el contexto, con las características personales de los estudiantes o con el propio proceso de evaluación pueden influir de distinta manera en los resultados obtenidos (Kluger y DeNisi, 1996; Ossenberg y otros, 2018).

Algunas de las características que tradicionalmente se han identificado como factores que pueden influir en la eficacia de la evaluación entre iguales son el anonimato (Li, 2017; Rotsaert y otros, 2018), la formación previa (Li, 2017; Li y otros, 2020) o el uso de instrumentos de evaluación (Panadero y Jonsson, 2013; Panadero y otros, 2013; Peters y otros, 2018), entre otros.

3. Diseño de la experiencia

La actividad de evaluación entre iguales se diseñó atendiendo a las características de la asignatura donde se iba a introducir, a la revisión de la literatura sobre esta estrategia didáctica y al calendario.

La idea era que la experiencia no tuviera lugar demasiado pronto (pues al inicio el estudiantado debe aprender el funcionamiento global de la asignatura y conocer su proceso de evaluación) ni demasiado tarde (para que el alumnado pudiera aplicar lo aprendido a otros ejercicios futuros). También se tuvieron en cuenta las fechas en sí, para evitar que la implementación de la experiencia tuviera lugar en fechas señaladas o en festivos que pudieran implicar, de entrada, una baja participación del alumnado. Así pues, se decidió realizar dos actividades de evaluación por pares: una sobre polinomios (cuarta semana) y la otra sobre derivación (décima semana).

Teniendo en cuenta que se trataba de una experiencia piloto, se decidió que la actividad fuera de carácter voluntario con una pequeña recompensa en la nota final en caso de haberse realizado. Así, el alumnado que no quiso participar, no lo hizo y dicha decisión no tuvo ninguna repercusión en su evaluación. Sin embargo, el alumnado que eligió realizar la actividad de manera completa y correcta fue recompensado con un incremento en la calificación final de 0,25 puntos.

La herramienta elegida para llevar a cabo la evaluación entre iguales fue el *Taller de Moodle*, que nos permitió configurar la evaluación entre iguales según las características seleccionadas: cada estudiante debía revisar el trabajo de dos compañeros, dichas valoraciones debían resultar anónimas (tanto para los evaluadores como para los evaluados) y para realizar la evaluación se debía aplicar una rúbrica creada *ad hoc* y ofrecer un comentario escrito a modo de feedback.

Se realizó una pequeña formación sobre la evaluación entre iguales a todo el alumnado a través de una sesión síncrona que quedó grabada y accesible desde el aula, y, además, se facilitó información a través del Tablón del aula virtual: un documento informativo sobre las características que debe tener un buen feedback, incluyendo algunos ejemplos de buen y mal feedback; una carpeta con varias resoluciones de un mismo ejercicio, acompañadas de su evaluación aplicando la rúbrica (con justificaciones del porqué de la elección de cada nivel de logro en cada uno de los criterios) y una posible retroalimentación.

De acuerdo con las variables de los clústeres I, III y V propuestos por Gielen y otros (2011), presentamos las características básicas del diseño realizado en la asignatura:

Configuración	Educación superior (grado). Estudiantes online (180 aproximadamente).
Objeto	Desarrollo de un problema matemático.
Frecuencia y experiencia	Dos implementaciones. Estudiantes con experiencia sobre la evaluación entre iguales dispar, pero mayoritariamente noveles.
Objetivos	Aumento de la interacción entre estudiantes y aprendizaje de contenidos y habilidades diversas.
Función	Formativa.

Tabla 1. Variables del Clúster I: decisiones relativas al uso de la evaluación por pares

Salida	De naturaleza cuantitativa y cualitativa. Retroalimentación colaborativa.
Direccionalidad	Bidireccional (cada participante valora y es valorado por dos compañeros).
Privacidad	Anónimo y confidencial.
Contacto	A distancia, con feedback escrito, sin opción a réplica.
Rol del evaluado	Activo: debe revisar su propia producción a partir de las valoraciones recibidas.

Tabla 2. Variables del Clúster III: Interacción entre iguales

Formato	Evaluación pautada, con ayuda de una rúbrica.
Requisito	Participación voluntaria
Recompensa	0,25 puntos por una participación completa y de calidad
Formación / asesoramiento	Formación inicial para el evaluador. Sin asesoramiento planificado después.
Control de calidad	Observación por parte del docente

Tabla 3. Variables del Clúster V: Gestión del procedimiento de evaluación

4. Desarrollo de la experiencia

En primer lugar, antes de la primera aplicación de la evaluación entre iguales, los estudiantes respondieron a un cuestionario que nos permitió conocer su punto de partida. Dicho cuestionario fue respondido por un total de 104 alumnos de los 174 inscritos. De ellos, podemos observar que la mayoría son hombres (75%). Además, destacamos que el 87,5% de los encuestados trabaja y estudia simultáneamente y que los estudios que está cursando son los primeros estudios universitarios para el 50% de los encuestados.

En cuanto, a su nivel inicial de matemáticas, un 18,3% lo autodefine como bajo o muy bajo. El grueso del grupo sitúa su nivel en valores intermedios (regular: 65,4%) y tan solo un 16,3% considera que tiene un nivel alto o muy alto.

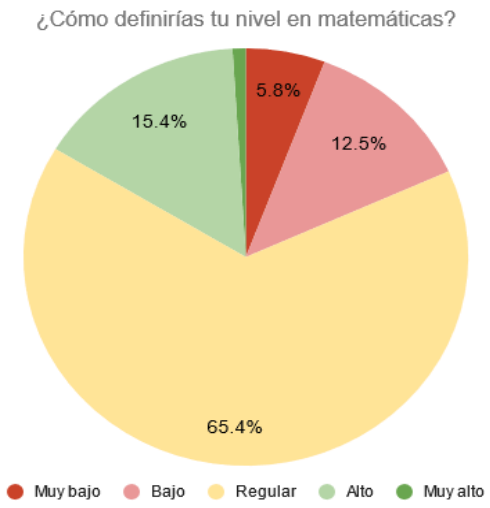


Imagen 1. Nivel matemático manifestado por el alumnado al inicio de la actividad de evaluación entre iguales

El desarrollo de esta experiencia se llevó a cabo entre los meses de febrero y junio de 2022 en tres aulas, con una participación total en la actividad de evaluación entre iguales de 77 estudiantes de un total de 174.

A continuación, se muestra, a modo de ejemplo, el calendario que tuvo lugar durante la primera implementación de la actividad de evaluación entre iguales, correspondiente al ejercicio de polinomios (Imagen 2).

Imagen 2. Cronograma de la implementación de la actividad de evaluación entre iguales en el ejercicio de polinomios.

Como puede observarse en la Imagen 2, la resolución del cuestionario en el que se incluye el problema sobre el que se implementa la evaluación por pares, tiene lugar de jueves a martes. En este mismo período, los participantes debían colgar en el Taller de Moodle la resolución de su problema (en PDF). Para ello, el estudiantado disponía de un vídeo con el procedimiento que se debía seguir para poder crear dicho documento de forma rápida y sencilla.

El taller se cerraba cinco minutos después de cerrarse el cuestionario y, automáticamente, configuraba las evaluaciones para que se pudiera llevar a cabo la evaluación de las dos producciones que había asignado la herramienta de forma aleatoria y anónima. El alumnado disponía de tres días (miércoles, jueves y viernes) para aplicar la rúbrica y ofrecer una retroalimentación a dos de sus compañeros.

Acabado el plazo, los participantes podían acceder a las valoraciones de sus ejercicios y podían realizar un segundo intento del cuestionario, en el que solo les estaba permitido modificar su resolución de la pregunta 6, sobre la que se implementaba la evaluación. Para ello, disponían de un periodo de cuatro días (de sábado a martes), pasado el cual, se cerraba definitivamente el cuestionario.

A partir de este momento, el docente procedía a valorar y calificar los problemas. En su tarea, solo tenía en cuenta la segunda versión del ejercicio de los participantes que habían completado la actividad, corrigiendo la primera versión de la producción de todo aquel alumnado que no había participado o no lo había hecho de forma completa.

Queremos hacer notar que, durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes debían llevar en paralelo las tareas de la evaluación entre iguales y la realización del

cuestionario de evaluación de la unidad siguiente, cuyo periodo de realización volvía a ser de jueves a martes.

Al finalizar las dos aplicaciones, los estudiantes respondieron un cuestionario final que nos ha permitido conocer su opinión respecto a la actividad de la evaluación entre iguales realizada y comparar las respuestas del alumnado antes y después de dicha actividad.

Dicho cuestionario (21 preguntas) fue respondido por 49 alumnos y destacamos que el 63,3% reconoce que el feedback de la evaluación entre iguales les ha ayudado a mejorar la redacción de sus ejercicios, frente al 18,3% que no está de acuerdo con esta afirmación, que intuimos podría ser debido a un feedback inadecuado o poco preciso.

La siguiente tabla muestra algunas de las valoraciones generales que los participantes han escrito sobre la experiencia (Tabla 4).

"*Me ha parecido una manera muy interesante de hacerte pensar de otra manera para entender los ejercicios. Pensar para ayudar a los compañeros a resolver sus ejercicios me ha ayudado a reforzar el conocimiento en esa área donde se ha aplicado esta metodología.*"
"Mi motivación era aprender de mis errores, recordar y aprender de otros compañeros, también."
"Me permite probar algo distinto, participar, ver cómo elaboran otros las respuestas, mejorar la mía con el feedback de los otros e incluso ¡subir nota!"
"Me parecía interesante tener la opción de comprobar cómo se desenvolvían mis compañeros durante la pregunta 6 para intentar mejorar mi forma de expresarla y realizarla. De la misma forma, me interesaba saber qué opinaban mis compañeros de mi forma de resolver los ejercicios."
"Ayudar a mejorar siempre es buena motivación."
"La segunda evaluación no me ha motivado tanto como la primera, puesto que al ver que el feedback de los compañeros era muy genérico (al menos en mi caso) no fue de gran ayuda."
"Por aprender de los compañeros, ya que hay siempre varias formas de resolver los ejercicios."

Tabla 4. Algunos comentarios generales de los participantes sobre la experiencia.

5. Exposición de las producciones de dos alumnos

A continuación, mostramos las producciones realizadas por dos estudiantes elegidos al azar de entre los 77 alumnos que han participado en la experiencia. Dichos estudiantes han entregado una resolución tanto para el problema de polinomios como para el problema de derivación que, después de la evaluación entre iguales, han decidido modificar o mantener.

Ante la diversidad de enunciados que el alumnado puede obtener, presentamos la particularización del enunciado que obtuvo cada uno de los estudiantes analizados para el problema de polinomios (Imagen 3 e Imagen 4) y el enunciado que obtuvieron ambos alumnos para el problema de derivación (Imagen 5).

Donat el polinomi $p(x) = -4 \cdot x^3 + 24 \cdot x^2 - 20 \cdot x - 48$, trobeu un altre polinomi $q(x)$ que tingui les mateixes arrels que $p(x)$ i a més a més compleixi que $q(-4) = 0$ i que passa pel punt $(0, -3)$.

Imagen 2. Enunciado de polinomios - Alumno A.

Dado el polinomio $p(x) = -2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 58 \cdot x + 40$, buscad otro polinomio $q(x)$ que tenga las mismas raíces que $p(x)$ y además cumpla que $q(-1) = 0$ y que pase por el punto $(0,2)$.

Imagen 4. Enunciado de polinomios - Alumno B.

Las funciones $f(x) = -2 \cdot x^2 - x + a$ y $g(x) = -4 \cdot x^2 + b \cdot x + 3$ tienen la misma recta tangente en el punto $(c, 2c)$.

Determinad:

- los valores a, b y c
- la ecuación de la recta tangente común

Recordad que se tiene que justificar cualquier cálculo, en especial el de las derivadas en caso de usarse.

Imagen 5. Enunciado ejercicio de derivación - Alumnos A y B

5.1. Alumno A

En la resolución del problema de polinomios, el alumno realiza la descomposición en factores primos utilizando el método de Ruffini para encontrar las raíces del polinomio

p(x), pero comete 2 errores al indicar la expresión del polinomio q(x). El primer error, Imagen 6, indica que -3 es una raíz. Su segundo error, Imagen 7, es no comprobar el resultado. De haberlo hecho, hubiese visto que con su factorización se obtiene q(0) = 144 en lugar de -3, como se indica en el enunciado.

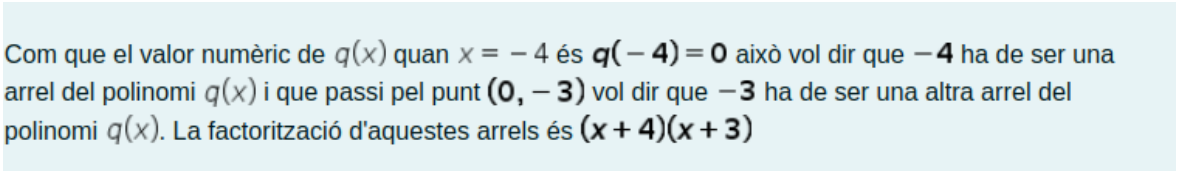

Com que el valor numèric de $q(x)$ quan $x = -4$ és $\boldsymbol{q(-4)=0}$ això vol dir que $\boldsymbol{-4}$ ha de ser una arrel del polinomi $q(x)$ i que passi pel punt $\boldsymbol{(0,-3)}$ vol dir que $\boldsymbol{-3}$ ha de ser una altra arrel del polinomi $q(x)$. La factorització d'aquestes arrels és $\boldsymbol{(x+4)(x+3)}$

Imagen 6. Resolución en la primera entrega: error al identificar -3 como raíz (Alumno A)

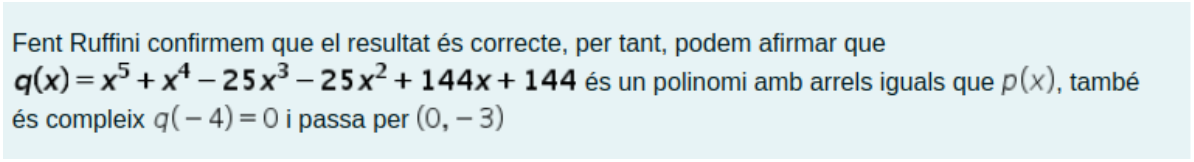
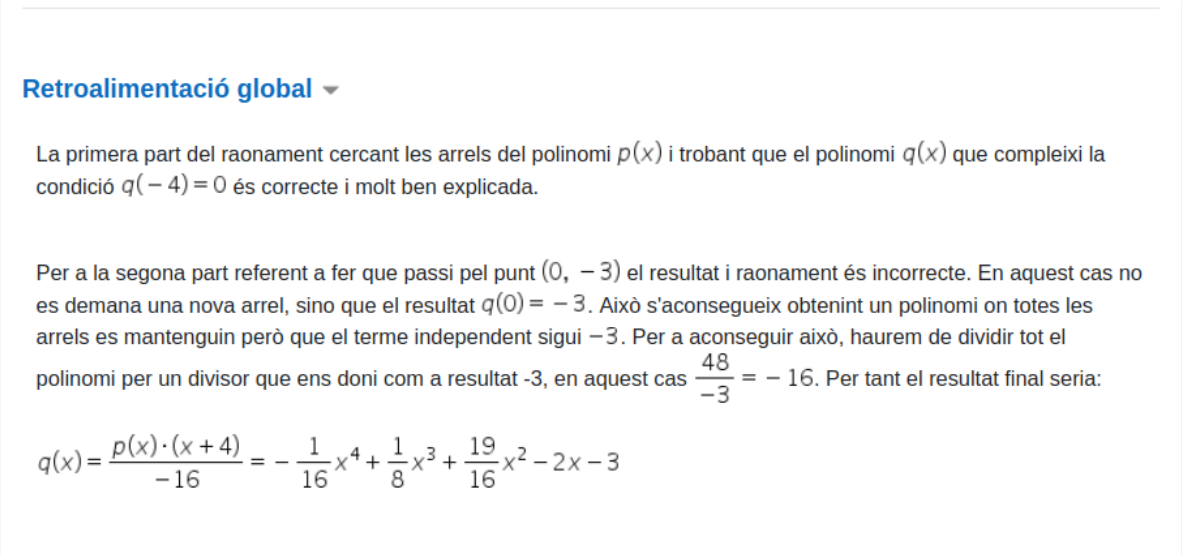

Fent Ruffini confirmem que el resultat és correcte, per tant, podem afirmar que $\boldsymbol{q(x)=x^5+x^4-25x^3-25x^2+144x+144}$ és un polinomi amb arrels iguals que $p(x)$, també és compleix $q(-4)=0$ i passa per $(0,-3)$

Imagen 7. Resolución en la primera entrega: expresión incorrecta de q(x) (Alumno A)

El Alumno A valora dos cuestionarios que eran correctos en su primera resolución y, además, recibe feedback por parte de otro compañero, que le proporciona información suficiente para identificar los errores que tiene en su primera resolución (Imagen 8) y, a pesar de todo, no realiza de forma correcta su resolución final.


Retroalimentació global

La primera part del raonament cercant les arrels del polinomi $p(x)$ i trobant que el polinomi $q(x)$ que compleixi la condició $q(-4)=0$ és correcte i molt ben explicada.

Per a la segona part referent a fer que passi pel punt $(0,-3)$ el resultat i raonament és incorrecte. En aquest cas no es demana una nova arrel, sino que el resultat $q(0)=-3$. Això s'aconsegueix obtenint un polinomi on totes les arrels es mantenguin però que el terme independent sigui -3. Per a aconseguir això, haurem de dividir tot el polinomi per un divisor que ens doni com a resultat -3, en aquest cas $\frac{48}{-3}=-16$. Per tant el resultat final seria:

$$q(x)=\frac{p(x)\cdot(x+4)}{-16}=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{19}{16}x^2-2x-3$$

Imagen 8. Segundo error en la resolución del problema de la actividad de polinomios de la primera entrega (Alumno A)

En su versión definitiva, este alumno modifica levemente su primera versión, pero sigue cometiendo dos errores. En la Imagen 9 se observa que en la descomposición

no multiplica por el coeficiente del término de grado mayor y en la Imagen 10 se puede observar que sigue identificando el punto (0,-3) como una raíz del polinomio q(x).

El següent pas és expressar $p(x)$ com a producte de polinomis irreductibles. Per tant,
$\boldsymbol{p(x)=(x+1)(x-3)(x-4)}$

Ara ens demanen que trobem un polinomi $q(x)$ amb les mateixes arrels que $p(x)$ i que compleixi que $q(-4)=0$ i que passi pel punt $(0,-3)$

Imagen 9. Entrega final: falta coeficiente numérico en descomposición p(x) (Alumno A)

i ara nomes queda fer que passi pel punt $\boldsymbol{(0,-3)}$ que vol dir que $\boldsymbol{q(0)=-3}$ ha de ser una altra arrel del polinomi $q(x)$.

Imagen 10. Entrega final: sigue considerando que -3 es raíz de q(x) (Alumno A)

Por otro lado, en la actividad de Derivación, seis semanas más tarde, el alumno presenta su resolución y recibe el feedback de uno de sus compañeros, valorando todos los criterios de la rúbrica en su nivel de logro más alto. Así pues, el Alumno A no modifica su producción y acaba logrando la máxima puntuación en su primera y única versión. A continuación, mostramos, en la Imagen 11, un fragmento de su resolución y destacamos que ha seguido las orientaciones presentes en la rúbrica.

Busquem la derivada de **f(x)** o **g(x)** per determinar el pendent de la recta ja que la derivada de la funció en el punt x és el pendent de la recta tangent.

$f'(x)=-4x-1$
$f'(1)=-4\cdot 1-1$
$f'(1)=-5$
$\boldsymbol{m=-5}$

Ara hem de trobar **n**, per fer-ho buscarem y en la funció inicial

$f(1)=-2\cdot 1^2-1+5$
$\boldsymbol{y=2}$

Substituïm en l'equació de la recta per trobar n
$2=-5\cdot 1+n$
$\boldsymbol{n=7}$

Podem doncs, determinar que l'equació de la recta és $\boldsymbol{y=-5\cdot x+7}$

Imagen 11. Fragmento final de la resolución del problema de la actividad de derivación de la primera entrega (Alumno A)

5.2 Alumno B

En su resolución, el Alumno B se ha equivocado factorizando el polinomio p(x). Utiliza la regla de Ruffini directamente, sin sacar factor común. Sin embargo, debe haber hallado las raíces del polinomio usando la herramienta CalcMe, pues identifica correctamente las raíces del polinomio, a pesar de que estas no coincidan con la factorización que él mismo ha obtenido (Imagen 12).

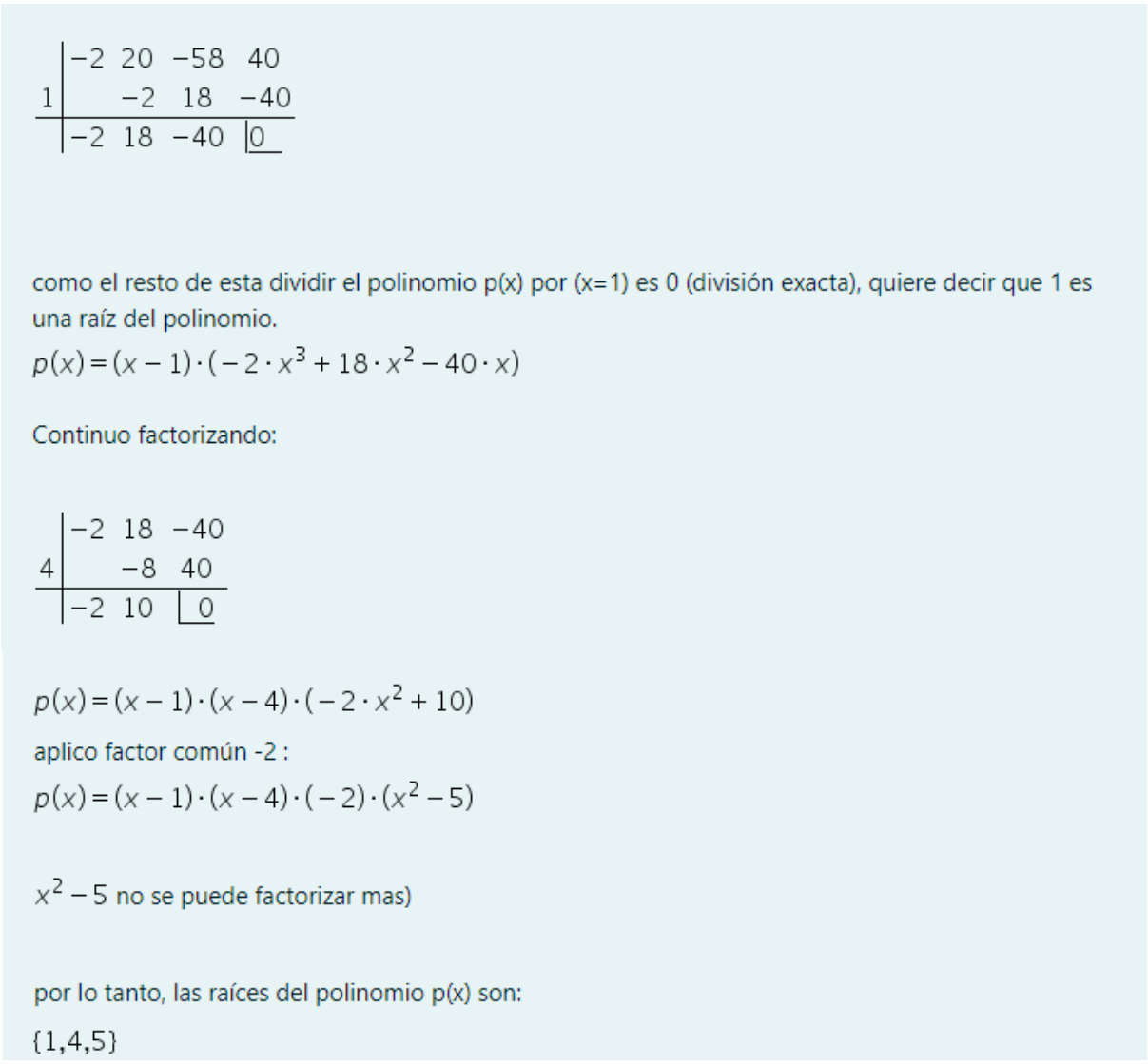
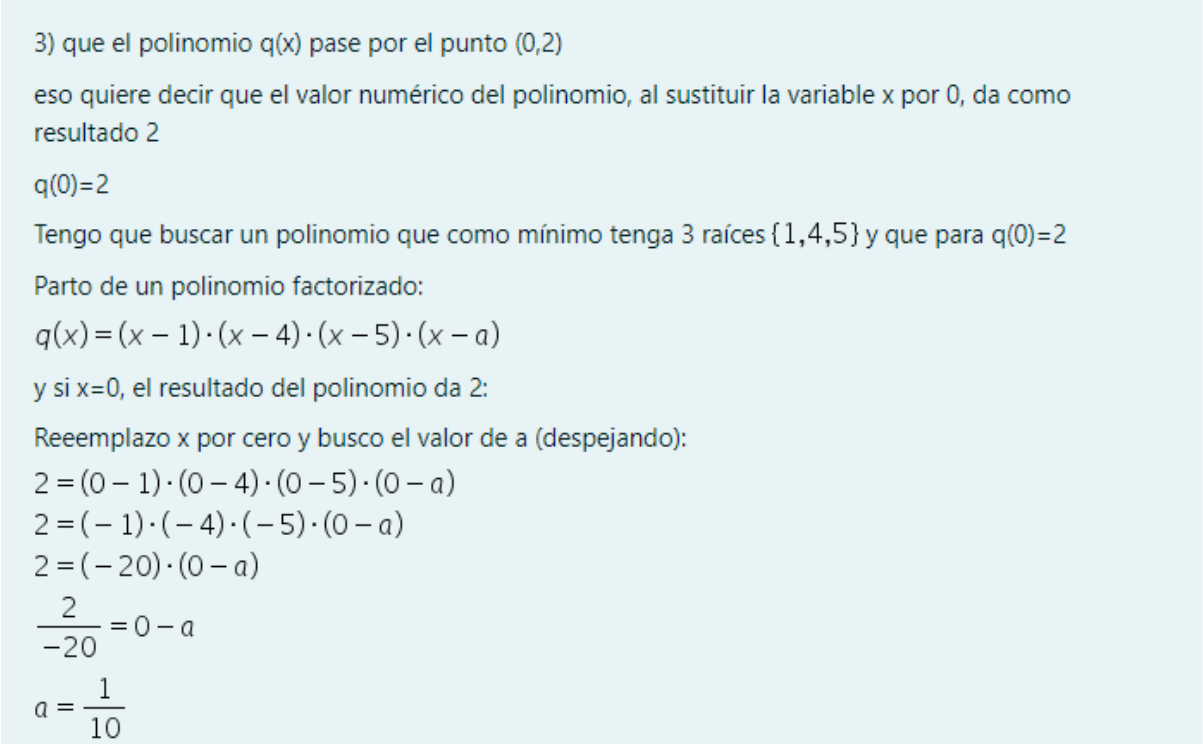


Imagen 12. Factorización del polinomio p(x) del Alumno B.

Por otro lado, no aplica en ningún momento que x = -1 tenga que ser raíz del nuevo polinomio que está buscando. Además, no acierta a codificar la condición de que q(0) = 2, introduciendo un factor del tipo (x - a) en la factorización de q(x), en lugar de un coeficiente real, obteniendo así un polinomio un grado mayor de lo que era estrictamente necesario (Imagen 13).


3) que el polinomio q(x) pase por el punto (0,2)

eso quiere decir que el valor numérico del polinomio, al sustituir la variable x por 0, da como resultado 2

q(0)=2

Tengo que buscar un polinomio que como mínimo tenga 3 raíces {1,4,5} y que para q(0)=2

Parto de un polinomio factorizado:

$q(x)=(x-1)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-a)$

y si x=0, el resultado del polinomio da 2:

Reeemplazo x por cero y busco el valor de a (despejando):

$2=(0-1)\cdot(0-4)\cdot(0-5)\cdot(0-a)$

$2=(-1)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(0-a)$

$2=(-20)\cdot(0-a)$

$\frac{2}{-20}=0-a$

$a=\frac{1}{10}$

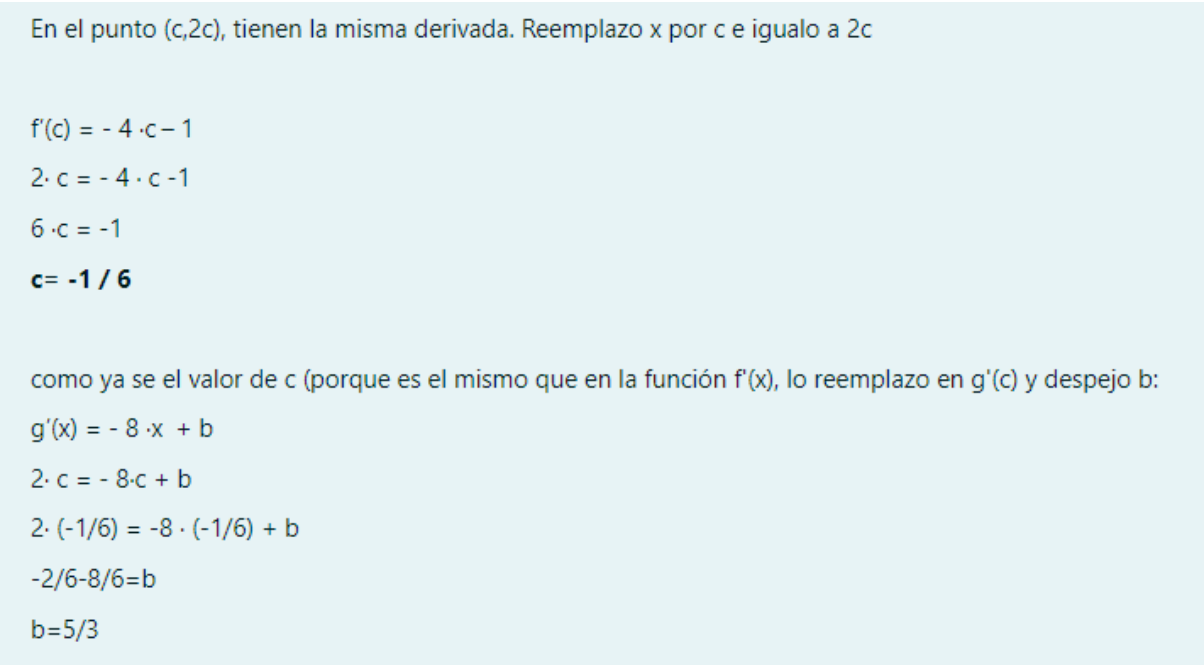
Imagen 13. Condición de que q(x) pase por (0,2) (Alumno B).

Esta primera resolución recibe dos valoraciones muy similares respecto a la aplicación de la rúbrica. Ambas valoraciones coinciden en dos criterios y, en los otros tres, presentan diferencias mínimas. Sin embargo, los feedback proporcionados por los evaluadores sí presentan diferencias significativas. Uno de ellos expone de manera explícita todos los errores que ha encontrado y, además, propone una posible solución a cada uno de ellos, haciendo caso omiso de las indicaciones sobre el feedback que se les ha facilitado. El otro, mucho más escueto, también orienta acertadamente hacia la corrección de los errores identificados, aunque no realiza ninguna indicación sobre las correcciones necesarias.

Aparte de estas valoraciones, el Alumno B ha tenido que valorar la resolución de dos de sus compañeros. En ambas, el planteamiento que hacen del ejercicio es correcto, aunque incluyen algunos errores de cálculo o de expresión.

En la versión definitiva del Alumno B se ha corregido el error que había en cuanto a la factorización de p(x) inicial. Sin embargo, y a pesar de haber visto dos resoluciones que han impuesto correctamente el hecho de que el polinomio buscado pase por un determinado punto, el alumno no ha corregido este hecho, manteniendo el polinomio un grado por arriba de lo esperado. Además, se incluyen algunos errores de expresión (algún signo, algún paréntesis…), por lo que, aunque su resolución inicial ha mejorado considerablemente, no ha obtenido la valoración máxima por parte del docente.

Respecto al problema de derivación, en su primera resolución, el Alumno B no acierta a realizar un planteamiento correcto del problema, pues mezcla dos de las condiciones que se dan en el enunciado: acierta cuando identifica que en el punto (c, 2c) ambas funciones tienen la misma derivada, pero interpreta dicho punto como un elemento de la función derivada, es decir, exige que f'(c) = 2c, lo que hace que calcule erróneamente el valor de c. Repitiendo el mismo argumento para la función g(x), calcula un valor incorrecto del parámetro b, tal como puede observar en la Imagen 14.


En el punto (c,2c), tienen la misma derivada. Reemplazo x por c e igualo a 2c

f'(c) = - 4 ·c – 1

2· c = - 4 · c -1

6 ·c = -1

c= -1 / 6

como ya se el valor de c (porque es el mismo que en la función f'(x), lo reemplazo en g'(c) y despejo b:

g'(x) = - 8 ·x + b

2· c = - 8·c + b

2· (-1/6) = -8 · (-1/6) + b

-2/6-8/6=b

b=5/3

Imagen 14. Resolución del problema de derivación Alumno B: error f'(c) = 2c.

Como no sabe cómo obtener el valor del parámetro que le falta, a, simplemente indica que este puede tomar cualquier valor real, aunque no lo expresa correctamente, tal y como se muestra en la Imagen 15.

a= R (cualquier valor real)

Imagen 15. Resolución del problema de derivación Alumno B: valor asignado al parámetro a.

Por otro lado, para hallar la ecuación de la recta tangente común, calcula el valor de su pendiente a partir de su definición, utilizando el valor erróneo de c y añadiendo un nuevo error de cálculo al olvidar sumar 1. Una vez hallado el valor de la pendiente, aplica el hecho de que el punto de tangencia forma parte de la recta y calcula su ordenada en el origen, pero comete un nuevo error de cálculo. Finalmente, expresa la ecuación de la recta tangente de forma incompleta (Imagen 16).

La pendiente de la recta tangente en un punto de x (en este caso c=-1/6) coincide con el valor de la derivada en ese punto

f'(-1/6) = -4 · (-1/6) = 2/3

Pendiente = 2/3

Por lo tanto la función = 2/3+ z = 2· (-1/6)

z= 1

Conclusion:

la ecuación de la recta tangente común es igual a 2/3 x +1

Imagen 16. Resolución del problema de derivación Alumno B: cálculo ecuación recta tangente.

En esta segunda aplicación de la evaluación entre iguales, el Alumno B solo recibe una valoración de sus compañeros. En ella, se le proponen, acertadamente, correcciones imprescindibles en el planteamiento del ejercicio. Sin embargo, en la retroalimentación, éste no recibe orientaciones para la reflexión, sino que directamente el evaluador identifica los errores de planteamiento y ofrece la solución correcta al ejercicio.

Aparte de esta valoración, el Alumno B ha valorado la resolución de dos de sus compañeros. En ambos casos, el planteamiento y desarrollo del ejercicio fue el correcto, aunque en uno de ellos se incluía un pequeño error de cálculo que pasó desapercibido tanto para el autor como para el evaluador.

En su versión definitiva, el Alumno B modifica su ejercicio según las indicaciones que le ofrece el feedback de la única valoración recibida, y lo hace de manera prácticamente literal (Imagen 17). Tanto es así, que incluye en su resolución el mismo error conceptual sobre la pendiente de la recta tangente que incluye el comentario de su compañero, a pesar de haberlo hecho correctamente en la primera versión del ejercicio (Imagen 18).

2) Igualo las derivadas y despejo b:

$-4 \cdot c - 1 = -8 \cdot c + b$
$-4 \cdot c + 8 \cdot c - 1 = b$
$b = 4 \cdot c - 1$

3) Como sabemos que g(c) = 2· c, sustituimos b

$g(c) = -4 \cdot c^2 + b \cdot c + 3$
como $b = 4 \cdot c - 1$
$2 \cdot c = -4 \cdot c^2 + (4 \cdot c - 1) \cdot c + 3$
$2 \cdot c = -4 \cdot c^2 + (4 \cdot c^2 - c) + 3$
$2 \cdot c = -c + 3$
$c = 1$

4) Como b estaba expresado en función a c, y ya conozco c, reemplazo para obtener b.
$b = 4 \cdot c - 1$
$b = 4 \cdot 1 - 1$
$b = 3$

5) También podemos obtener el valor de a, sustituyendo en f (c)
$f(c) = -2 \cdot c^2 - c + a$
$2 \cdot c = -2 \cdot c^2 - c + a$

como c = 1
$2 \cdot 1 = -2 \cdot 1^2 - 1 + a$
$2 + 2 + 1 = a$
$a = 5$
$2 \cdot 1 = -2 \cdot 1^2 - 1 + a$
$2+2+1 = a$
$a = 5$

Imagen 17. Resolución del problema de derivación Alumno B: versión definitiva cálculo parámetros.

Expresamos la recta como

$y = m \cdot x + n$

Siendo:

m, la pendiente

n, la ordenada en el origen.

La pendiente de la tangente en el punto coincide con la derivada en ese punto (es decir c)

Por lo tanto, como c=1

m= 1.

Sabemos que pasa por el punto (c, 2c), es decir, por (1,2):

$y = m \cdot x + n$

$2 = 1 \cdot 1 + n$

Despejamos y obtenemos n

$2 - 1 = n$

$\boldsymbol{n = 1}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$y = m \cdot x + n$

$y = 1 \cdot x + 1$

$\boldsymbol{y = x + 1}$

Imagen 18. Resolución del problema de derivación Alumno B: versión definitiva cálculo ecuación recta tangente.

6. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo exploratorio consistente en el diseño e implementación de una actividad de evaluación entre iguales era aumentar la interacción entre el alumnado y ofrecer estrategias y herramientas que pudieran ayudar a mejorar el aprendizaje de las matemáticas en un entorno virtual asíncrono.

El hecho de ofrecer y recibir feedback sobre una resolución dada, aunque sea de manera anónima, hace que el alumnado se comunique entre sí, discutiendo sobre la resolución de un problema matemático, por lo que consideramos el primero de los

objetivos conseguido. En cuanto al segundo, aunque tenemos indicios de su contribución a la mejora del aprendizaje, aún no disponemos de herramientas que permitan medir el aprendizaje logrado, ni mecanismos que permitan la comparación entre el aprendizaje de los participantes y el de otros estudiantes que no han realizado esta actividad.

Efectivamente, los datos recogidos a través de los cuestionarios, así como las calificaciones de los problemas involucrados en la experiencia (comparando la media de los ejercicios de los participantes y de aquellos estudiantes que decidieron no participar), nos permiten conjeturar que la experiencia que hemos diseñado se alinea con las investigaciones que ofrecen un efecto positivo de la evaluación entre iguales en el aprendizaje de los estudiantes (Sánchez y otros, 2017; Topping, 2017; Li y otros, 2020; Double y otros, 2020).

Asimismo, el uso de la rúbrica permite al alumnado determinar con exactitud qué es lo que se le pide en el desarrollo de la resolución de un problema matemático. Por tanto, el hecho de conocer los criterios de evaluación a través de la rúbrica contribuye a que el estudiante establezca sus propios objetivos, una acción clave en la fase de planificación de su proceso de autorregulación (Panadero y Alonso, 2014). Además, el hecho de que puedan volver a revisar y redactar su propio ejercicio, teniendo en cuenta el feedback de sus compañeros y sus propias valoraciones sobre ejercicios similares, ofrece al estudiante la posibilidad de reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje, lo que ayuda al desarrollo de su proceso de autorregulación (Nicol y Macfarlane-Dick, 2006).

Teniendo en cuenta las limitaciones de este primer trabajo exploratorio, consideramos que sería conveniente extender esta actividad al resto de estudiantes de la asignatura. Con una población de casi 900 estudiantes, podríamos realizar un estudio en profundidad sobre la eficiencia del diseño realizado en términos de aprendizaje y motivación, en un entorno universitario online. De hecho, diversos son los aspectos que podrían analizarse: aprendizaje significativo de la matemática, compromiso con la asignatura (*engagement*) y desarrollo de la competencia comunicativa matemática.

7. Referencias

Adachi, C., Tai, J. y Dawson, P. (2018). A framework for designing, implementing, communicating and researching peer assessment. *Higher Education Research & Development*, *37*(3), 453-467. https://doi.org/10.1080/07294360.2017.1405913

Alqassab**,** M., Strijbos, J.-W., Panadero, E., Fernández, J., Warrens, M. y To, J. (2023). A Systematic Review of Peer Assessment Design Elements. *Educational Psychology Review*, *35*. https://doi.org/10.1007/s10648-023-09723-7

Double, K. S., McGrane, J. A. y Hopfenbeck, T. N. (2020). The Impact of Peer Assessment on Academic Performance: A Meta-analysis of Control Group Studies. *Educational Psychology Review*, *32*. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09510-3

Figueroa-Cañas, J.; Sancho-Vinuesa, T. (2017). Exploring the Efficacy of Practicing with Wiris-Quizzes in Online Engineering Mathematics. *IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje*, *12*(3). https://doi.org/10.1109/RITA.2017.2735499

Gielen, S., Dochy, F. y Onghena, P. (2011) An inventory of peer assessment diversity. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *36*(2), 137-155. https://doi.org/10.1080/02602930903221444

Gil, J. y Padilla, M.T. (2009). La participación del alumnado universitario en la evaluación del aprendizaje. *Educación XXI*, *12*, 43-65. https://doi.org/10.5944/educxx1.1.12.287

Kluger, A. N. y DeNisi, A. (1996). The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological Bulletin*, *119*(2), 254-284. https://doi.org/10.1037/0033-2909.119.2.254

Li, L. (2017). The role of anonymity in peer assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *42*(4), 645-656. https://doi.org/10.1080/02602938.2016.1174766

Li, L., Xiong, Y., Hunter, C.V., Guo, X. y Tywoniw, R. (2020). Does peer assessment promote student learning? A meta-analysis. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *45*(2), 193-211. https://doi.org/10.1080/02602938.2019.1620679

Nicol, D. y Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: a model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, *31*(2), 199-218. https://doi.org/10.1080/03075070600572090

Ossenberg, C., Henderson, A. y Mitchell, M. (2018). What attributes guide best practice for effective feedback? A scoping review. *Advances in Health Sciences Education*, *24*, 383-401. https://doi.org/10.1007/s10459-018-9854-x

Panadero, E. y Jonsson, A. (2013). The use of scoring rubrics for formative assessment purposes revisited: A review. *Educational Research Review*, *9*, 129-144. https://doi.org/10.1016%2Fj.edurev.2013.01.002

Panadero, E. y Alonso, J. (2014). ¿Cómo autorregulan nuestros alumnos? Revisión del modelo cíclico de Zimmerman sobre autorregulación del aprendizaje. *Anales de la Psicología*, *30*(2), 450-462. http://dx.doi.org/10.6018/analesps.30.2.167221

Panadero, E., Romero, M. y Strijbos, J. W. (2013). The impact of a rubric and friendship on peer assessment: Effects on construct validity, performance, and perceptions of fairness and comfort. *Studies in Educational Evaluation*, *39*(4), 195-203. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2013.10.005

Peters, O., Körndle, H. y Narciss, S. (2018). Effects of a formative assessment script on how vocational students generate formative feedback to a peer's or their own performance. European Journal of Psychology of Education, 33(1), 117-143. https://doi.org/10.1007/s10212-017-0344-y

Rotsaert, T., Panadero, E. y Schellens, T. (2018). Anonymity as an instructional scaffold in peer assessment: its efects on peer feedback quality and evolution in students' perceptions about peer assessment skills. *European Journal of Psichology of Education*, *33*(1), 75-99. https://doi.org/10.1007/s10212-017-0339-8

Topping, K. (1998). Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research, 68*(3), 249-276. https://doi.org/10.3102/00346543068003249

Topping, K. (2017). Learning by Judging and Discussing the Work of Other Learnears. *Interdisciplinary Education and Psychology*, *1*(1). https://doi.org/10.31532/InterdiscipEducPsychol.1.1.007

Sanchez, C. E., Atkinson, K. M., Koenka, A. C., Moshontz, H., & Cooper, H. (2017). Self-grading and peer-grading for formative and summative assessments in 3rd through 12th grade classrooms: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology, 109*(8), 1049. https://doi.org/10.1037%2Fedu0000190

Van den Berg, I., Admiraal, W. y Pilot, A. (2006). Peer assessment in university teaching: Evaluating seven courses designs. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *31*(1), 19-36. https://doi.org/10.1080/02602930500262346

Van Gennip, N., Segers, M. y Tillema, H. (2009). Peer assessment for learning from social perspective: The influence of interpersonal variables and structural features. *Educational Reasearch Review*, *4*(1), 41-54. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2008.11.002

Villalonga Pons, J., Besalú, M., Samà Camí, A., y Sancho-Vinuesa, T. (2023). Estrategias de aprendizaje de estudiantes de Ingeniería en línea. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, *26*(2). https://doi.org/10.5944/ried.26.2.36257

Una propuesta de integración del diseño universal para el aprendizaje con los criterios de idoneidad didáctica

Alicia Sánchez
asanchezb@ub.edu
Universidad de Barcelona

Vicenç Font
vfont@ub.edu
Universidad de Barcelona

Núcleo temático: Formación del profesorado, Procesos

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universidad (máster de formación del profesorado de secundaria)

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta que integre los principios del diseño universal para el aprendizaje con los criterios de idoneidad didáctica, una herramienta del Enfoque Ontosemiótico que facilita la reflexión del profesor de matemáticas sobre su propia práctica. Para ello, se revisaron las pautas del diseño universal para el aprendizaje y se compararon con los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica. A partir de este análisis, se ampliaron y modificaron algunos indicadores de las idoneidades cognitiva, mediacional, interaccional y afectiva. La propuesta que se presenta se implementará próximamente en un máster de formación de profesorado de educación secundaria (especialidad de matemáticas). De esta manera, los futuros profesores dispondrán de una herramienta específica para la asignatura de matemáticas, que guíe su reflexión sobre la intervención que realizaron durante las prácticas del máster y que incorpore los principios del diseño universal para el aprendizaje.

Palabras clave: diseño universal para el aprendizaje, criterios de idoneidad didáctica, reflexión docente, Enfoque Ontosemiótico.

1. Objetivo

La actual ley de educación (Ley Orgánica 3/2020) señala la necesidad de aplicar los principios del diseño universal para el aprendizaje (DUA) para atender la diversidad del alumnado. En el caso del currículo de educación básica de Cataluña (Decreto 175/2022), se recoge este aspecto convirtiendo al DUA en uno de los vectores curriculares, es decir, uno de los elementos transversales que deben guiar las decisiones educativas en el despliegue del currículo. De esta manera, surge también la demanda de formación docente para que los profesores y futuros profesores puedan aplicar los principios del DUA en las aulas (Alba Pastor, 2018).

Asimismo, una estrategia clave para la mejora de la práctica docente es la reflexión sobre la propia práctica (Schön, 1983). En particular para la materia de matemáticas, los criterios de idoneidad didáctica propuestos en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino y otros, 2007) pueden utilizarse como una herramienta para organizar la reflexión del profesor y guiarlo en la toma de decisiones a la hora de diseñar o rediseñar un proceso de instrucción. El uso de estos criterios se ha estado implementando en diferentes procesos de formación desde hace tiempo (Font y otros, 2021). Por ejemplo, en el máster interuniversitario de formación del profesorado de educación secundaria de la especialidad de matemáticas que se imparte en Cataluña, los futuros profesores utilizan los criterios de idoneidad didáctica en sus trabajos finales de máster para valorar la situación de aprendizaje o unidad didáctica que implementaron durante las prácticas en el instituto y diseñar una propuesta de mejora.

Teniendo en cuenta los principios del DUA (que no son específicos de la materia de matemáticas), nos planteamos la revisión de los criterios de idoneidad didáctica (una herramienta diseñada específicamente para la materia de matemáticas) con la intención de ampliarlos o modificarlos y así obtener una pauta más completa que permita guiar la reflexión de los (futuros) profesores de matemáticas sobre su propia práctica. Por tanto, el objetivo de esta comunicación es presentar una propuesta de integración de los principios del DUA con los criterios de idoneidad didáctica.

2. Referentes teóricos

A continuación, se explican de manera resumida los criterios de idoneidad didáctica del EOS y los principios en los que se basa el DUA, que corresponden a los referentes teóricos de este trabajo.

2.1 Criterios de idoneidad didáctica

Según Godino y otros (2020), la didáctica de las matemáticas, como disciplina científica y tecnológica, debe abordar problemas de diferente tipo: el problema epistemológico, el problema ontológico, el problema semiótico-cognitivo, el problema educativo-instruccional, el problema ecológico, el problema de optimización del proceso de instrucción y el problema de formación de profesores. Para dar respuesta al problema de optimización del proceso de instrucción, el EOS (Godino y otros, 2007, 2020) asume una perspectiva consensual sobre los criterios de idoneidad que deberían guiar dicho proceso. En este marco teórico, se define la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción como

> el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino y otros, 2020, p. 11)

La noción de idoneidad didáctica se concreta en seis criterios de idoneidad: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. El criterio de idoneidad epistémica se refiere a la calidad matemática de las tareas y el contenido que se imparte. El criterio de idoneidad cognitiva plantea si los significados pretendidos o implementados están dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes y en qué medida el aprendizaje logrado al final del proceso se corresponde con los significados pretendidos. El criterio de idoneidad interaccional tiene en cuenta las interacciones que se producen en el aula y cómo estas ayudan a resolver conflictos de significado y a aumentar la autonomía de los estudiantes. El

criterio de idoneidad de medios considera la disponibilidad y adaptación de los recursos materiales y el tiempo necesario para la implementación. El criterio de idoneidad afectiva corresponde al grado de implicación de los estudiantes en el proceso de instrucción. Finalmente, el criterio de idoneidad ecológica se refiere a la adaptación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, al currículo y al entorno social. Para cada criterio de idoneidad, se establece una serie de componentes e indicadores (Breda y otros, 2017) que facilitan su aplicación práctica como herramienta para guiar la reflexión de los docentes de matemáticas.

2.2 Diseño universal para el aprendizaje

Con el objetivo de ofrecer una educación inclusiva, el DUA se basa en tres principios (Alba Pastor, 2018): 1) Proporcionar múltiples formas de representación; 2) proporcionar múltiples formas de acción y expresión; y 3) proporcionar múltiples formas de implicación.

El primer principio contempla la diversidad de maneras que tienen las personas de percibir la información y comprenderla. La experiencia y conocimientos previos, la capacidad para reconocer las ideas principales, para construir nuevo conocimiento o aplicarlo a nuevas situaciones son únicos en cada alumno. Para que todos puedan acceder adecuadamente al conocimiento, el DUA propone ofrecer múltiples formas de representación.

El segundo principio reconoce la variabilidad en los estilos de aprendizaje del alumnado. Los alumnos interaccionan con la información de diferentes maneras para poder interpretarla y construir nuevo conocimiento. Asimismo, es fundamental que dispongan de diversas opciones para que puedan comunicar lo que han aprendido. Este segundo principio incluye además el desarrollo de las funciones ejecutivas, que permiten establecer metas a largo plazo, elaborar estrategias para alcanzar dichas metas y controlar el progreso.

Aspectos afectivos como la motivación, la autopercepción o los intereses personales o las expectativas, que tienen un peso importante en el proceso de aprendizaje, también difieren en cada alumno. Por eso, el tercer principio se refiere a proporcionar

múltiples formas de implicación. El DUA considera dos dimensiones de la implicación (Alba Pastor, 2018), una externa, que tiene en cuenta el interés, el esfuerzo, las amenazas o distracciones, los niveles de desafío e incorporación de apoyos, y la retroalimentación; y una dimensión interna, asociada al desarrollo de capacidades metacognitivas y estrategias personales que permitan al estudiante autoevaluarse.

Desde el Centro para las Tecnologías Especiales Aplicadas de los Estados Unidos (Center for Applied Special Technology, CAST), se han concretado los principios del DUA en una serie de pautas con sus correspondientes puntos de verificación que muestran ejemplos de cómo llevar a la práctica los principios (CAST, 2011/2013). El documento original (en inglés) se ha traducido a varios idiomas y se pueden consultar las versiones en *https://udlguidelines.cast.org/more/downloads*.

3. Metodología

La propuesta que se presenta en esta comunicación es fruto de un trabajo teórico-reflexivo desarrollado por los autores en el marco de un proyecto de investigación sobre la incorporación del DUA en la reflexión sobre su práctica del futuro profesorado de matemáticas de secundaria.

En primer lugar, se realizó una revisión de la literatura sobre el DUA y se estableció como referente principal el documento de pautas de CAST (2011/2013). A continuación, se contrastaron las pautas del DUA con los componentes e indicadores de cada criterio de idoneidad didáctica (Breda y otros, 2017). Se identificaron qué componentes e indicadores se relacionaban con alguna de las pautas y se modificaron en consecuencia. Una vez obtenida la propuesta de criterios de idoneidad didáctica integrando los principios del DUA, se realizó una validación de expertos compartiendo esta propuesta con otros investigadores del área que también han trabajado con los criterios de idoneidad didáctica anteriormente.

4. Resultados

A continuación, se presenta la propuesta de integración de los principios del DUA con los criterios de idoneidad didáctica, explicando las modificaciones o consideraciones que se realizaron al analizar cada criterio.

4.1 Criterio de idoneidad epistémica

Como se ha señalado anteriormente, las pautas del DUA se presentan como una herramienta transversal, y no específica de la materia de matemáticas, por lo que en principio no afectaría al criterio de idoneidad epistémica en el sentido de añadir nuevos componentes a considerar para enseñar unas matemáticas "de calidad" (Tabla 1). No obstante, los puntos de verificación 2.1 (clarificar el vocabulario y los símbolos) y 2.2 (clarificar la sintaxis y la estructura) se pueden relacionar con el componente de ambigüedades. Estos puntos de verificación hacen referencia, por ejemplo, a situaciones en las que el docente explica la notación matemática que utiliza o hace explícitas las propiedades algebraicas que usa para obtener una cierta expresión, lo cual ayuda a evitar ambigüedades en la presentación de los contenidos.

Idoneidad epistémica	
Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo al que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).

Representatividad de la complejidad del objeto matemático	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Para uno o varios significados parciales, se ofrece una muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, se usan diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Tabla 1. Componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (Breda y otros, 2017).

La integración del DUA no conlleva ningún cambio en los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica.

4.2 Criterio de idoneidad cognitiva

El DUA parte de la evidencia de que el alumnado es diverso y, por tanto, desde el comienzo se deben planificar las actividades proporcionando diferentes opciones para la comprensión (pauta 3). Esto conlleva la modificación del componente de adaptación curricular a las diferencias individuales, entendiendo que no se realiza una adaptación para ciertos alumnos, sino que desde el principio se ofrecen alternativas con actividades suficientemente abiertas para todos. Por otro lado, para conseguir que todos los alumnos sean aprendices expertos, el DUA sugiere el uso de herramientas que les permitan ser conscientes de su aprendizaje, fijar metas personales y hacer un seguimiento continuo de sus logros. En la Tabla 2 se recogen las modificaciones (resaltadas en cursiva) realizadas a los componentes e indicadores del criterio de idoneidad cognitiva.

Idoneidad cognitiva	
Componentes	Indicadores

Conocimientos previos (componentes similares a la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) *y estos conocimientos previos son activados cuando son necesarios*. Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Consideración de las diferencias individuales	*Se proporcionan soportes para estudiantes que los necesiten y un mayor grado de libertad para estudiantes que puedan hacer la tarea de manera independiente (por ejemplo, plantear retos que permitan diferentes niveles de éxito*; proporcionar actividades de ampliación y de refuerzo, *y más o menos guiadas; usar mapas conceptuales; proporcionar plantillas para tomar apuntes*). *Impulsar la colaboración y la comunicación mediante grupos heterogéneos*.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas o implementadas (*evidencias de aprendizaje*). *Se tienen en cuenta diferentes tipos de evaluación de los aprendizajes (inicial, formativa, formadora y sumativa).* *Se proporciona a los estudiantes instrumentos para autoevaluarse*. *Se facilitan diferentes modos de expresión para evidenciar sus aprendizajes*.

Alta demanda cognitiva *para favorecer una comprensión significativa*	Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra y extra matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.). Se promueven procesos metacognitivos *que facilitan la autorregulación*.

Tabla 2. Integración del DUA con los componentes e indicadores del criterio de idoneidad cognitiva, modificados a partir de Breda y otros (2017).

4.3 Criterio de idoneidad interaccional

Encontramos diversos puntos de verificación en las pautas del DUA que hacen referencia a la interacción entre los estudiantes (punto de verificación 8.3) o a la interacción entre el docente y los estudiantes. Desde el momento en que el docente programa su intervención en el aula, está considerando las reacciones de los alumnos, quién puede necesitar un cierto tipo de apoyo u otro y cómo evaluará el progreso de cada uno (puntos de verificación 5.3, 6.4 y 8.4). Para conseguir que los estudiantes aumenten su autonomía, durante el proceso de aprendizaje se hace necesario guiar el establecimiento de metas y el desarrollo de estrategias personales (puntos de verificación 6.1, 6.2 y 8.1). En la Tabla 3 se recogen las modificaciones (resaltadas en cursiva) realizadas a los componentes e indicadores del criterio de idoneidad interaccional.

Idoneidad interaccional	
Componentes	Indicadores
Interacción docente-discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.). Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los

	alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.). Se busca llegar a consensos con base en el mejor argumento. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes *(por ejemplo, tutoría entre iguales)*. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión. *En el trabajo en grupo, se establecen claramente los objetivos, roles, responsabilidades y normas*.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación). *Se ofrece un apoyo gradual que permita avanzar a cada estudiante en el desarrollo de sus competencias, definir objetivos y desarrollar estrategias para conseguirlos*.
Evaluación formativa	Se realiza una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos. *Se ofrece regularmente una retroalimentación del progreso que sea informativa, accesible y explícita para los estudiantes, destacando el esfuerzo y perseverancia*.

Tabla 3. Integración del DUA con los componentes e indicadores del criterio de idoneidad interaccional, modificados a partir de Breda y otros (2017).

4.4 Criterio de idoneidad mediacional

El criterio de idoneidad mediacional está especialmente relacionado con los principios del DUA de proporcionar múltiples formas de representación (especialmente con las pautas 1 y 2) y proporcionar múltiples formas de acción y expresión (especialmente con las pautas 4 y 5). El uso de recursos (por ejemplo, ciertas herramientas digitales), puede ser clave para llevar a la práctica estos principios del DUA. También la gestión del tiempo se debe reconsiderar, flexibilizando los plazos para realizar una actividad. En la Tabla 4 se recogen las modificaciones (resaltadas en cursiva) realizadas a los componentes e indicadores del criterio de idoneidad mediacional.

Idoneidad mediacional	
Componentes	Indicadores
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores, *textos y hojas de trabajo*)	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones. *Los materiales son accesibles (uso de colores y fuentes recomendadas, asistentes para la creación de tablas de contenidos que permitan una navegabilidad práctica y descripción de imágenes, traductores automáticos, etc.).* *Se usan diferentes canales de información*.
Número de alumnos, horario y	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.

condiciones del aula	El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza colectiva / tutorización, tiempo de aprendizaje)	Los significados pretendidos/implementados se adecuan al tiempo disponible (presencial y no presencial). El tiempo se invierte adecuadamente en los contenidos más importantes o nucleares del tema. El tiempo se invierte adecuadamente en los contenidos que presentan más dificultad *y se flexibilizan los plazos para cumplir con las tareas cuando sea necesario.*

Tabla 4. Integración del DUA con los componentes e indicadores del criterio de idoneidad mediacional, modificados a partir de Breda y otros (2017).

4.5 Criterio de idoneidad afectiva

El criterio de idoneidad afectiva se relaciona sobre todo con el principio del DUA de proporcionar múltiples formas de implicación. Las pautas del DUA sugieren aumentar la motivación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje haciendo que perciban que lo que aprenden permite el logro de sus objetivos e intereses (puntos de verificación 7.2, 9.1 y 9.2). Por otra parte, lo que para unos puede ser motivador para otros puede resultar una distracción o generar inseguridad; el punto de verificación 7.3 hace referencia a minimizar la sensación de inseguridad y las distracciones variando los niveles de estimulación sensorial, entre otras medidas. En la Tabla 5 se muestran los componentes e indicadores del criterio de idoneidad afectiva. Basándonos en las pautas del DUA, se incluyen algunas modificaciones (resaltadas en cursiva) en los indicadores del componente de actitudes.

Idoneidad afectiva	
Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	Se seleccionan tareas de interés para los alumnos. Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Se promueve la implicación en las actividades, la perseverancia, la responsabilidad, etc., *reconociendo explícitamente el esfuerzo*. *Se reducen las distracciones*. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 5. Integración del DUA con los componentes e indicadores del criterio de idoneidad afectiva, modificados a partir de Breda y otros (2017).

4.6 Criterio de idoneidad ecológica

Al revisar las pautas del DUA, no se han considerado cambios en los componentes del criterio de idoneidad ecológica (Tabla 6). El componente de adaptación al currículo y el de innovación pedagógica motivarían precisamente la aplicación del DUA en la práctica docente. Por otra parte, el componente de utilidad socio-laboral o el de conexiones podrían relacionarse con la motivación de los estudiantes, como apunta por ejemplo el punto de verificación 7.2, que ya se ha considerado en el criterio de idoneidad afectiva.

Idoneidad ecológica	
Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinas (contexto extra-matemático o contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	Se incluye innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Tabla 6. Componentes e indicadores del criterio de idoneidad ecológica (Breda y otros, 2017).

5. Conclusiones

Observamos que la integración del DUA con los criterios de idoneidad didáctica afecta especialmente a los criterios de idoneidad cognitiva, idoneidad mediacional, idoneidad interaccional e idoneidad afectiva. Las pautas del DUA permiten ampliar los indicadores de algunos componentes y modificar otros indicadores que ya existían previamente. Los cambios están relacionados sobre todo con la evaluación del aprendizaje de los estudiantes, su autorregulación y la variabilidad y accesibilidad de los recursos. La propuesta presentada pretende facilitar la reflexión de los docentes de matemáticas sobre su práctica en las clases de esta asignatura, es decir, su

alcance se limita a la reflexión personal y mejora de la práctica docente a nivel del aula de matemáticas. No obstante, como señala Alba Pastor (2018), la aplicación del DUA tiene un enfoque más global que implica al centro y a todo el sistema educativo.

La propuesta de integración del DUA con los criterios de idoneidad didáctica presentada en este trabajo es una primera versión que está abierta a posibles modificaciones a medida que avance el proyecto de investigación en el que se enmarca, con la aportación tanto de investigadores en didáctica de matemáticas como de profesores de educación secundaria u otros profesionales de la educación. También está previsto utilizar la nueva pauta para diseñar secuencias de tareas de matemáticas, de acuerdo con los principios del DUA.

En los próximos meses, se prevé la aplicación de esta propuesta en el máster interuniversitario de formación del profesorado de secundaria de la especialidad de matemáticas. La intención es ofrecer a los futuros profesores una herramienta específica para la enseñanza de las matemáticas y que a su vez incluya los principios del DUA, que les sirva de guía para la reflexión sobre su implementación de una secuencia didáctica en los institutos de prácticas, permitiéndoles identificar aspectos que puedan mejorar. Por motivos de calendario, dado que los futuros profesores entregan su trabajo final de máster en junio, aún no disponemos de evidencias del uso que podrían hacer de la propuesta en la reflexión que hagan sobre su práctica docente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto 2023 ARMIF 00012, financiado por el Departamento de Investigación y Universidades de la Generalitat de Catalunya.

Referencias

Alba Pastor, C. (Coord.). (2018). *Diseño Universal para el Aprendizaje: Educación para todos y prácticas de enseñanza inclusivas* (2ª ed.). Ediciones Morata.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Center for Applied Special Technology (2013). *Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) Versión 2.0* (C. Alba Pastor, P. Sánchez Hípola, J. M. Sánchez Serrano, A. Zubillaga del Río, Trads.). Universidad Complutense de Madrid. (Trabajo original publicado en 2011)

Decreto 175/2022, de 27 de septiembre, de ordenación de las enseñanzas de la educación básica. 29 de septiembre de 2022. DOGC núm. 8762.

Font, V., Breda, A., Hummes, V., Diez-Palomar, J. y Seckel, M. J. (2021). Un currículum por competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En M. A. Campos (Ed.), *Representaciones, conocimientos y prácticas curriculares en educación matemática* (pp. 237-271). Universidad Nacional Autónoma de México.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. 30 de diciembre de 2020. BOE núm. 340.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.

La Escape-Room como propuesta de intervención con maestros en formación

María Salgado Somoza
maria.salgado@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela

Cristina Núñez García
cristina.nunez.garcia@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela

Alejandro Gorgal Romaris
alejandro.gorgal@rai.usc.es
Universidad de Santiago de Compostela

Núcleo temático: Formación del profesorado, procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Universidad (Máster Universitario en Investigación e Innovación en Didácticas Especificas para Educación Infantil y Primaria).

RESUMEN

En este trabajo se recoge una intervención didáctica realizada en el área de matemáticas por un grupo de estudiantes del Máster en Investigación e Innovación en Didácticas Especificas para Educación Infantil y Primaria. Dicha intervención comenzó con el diseño de una escape-room que, posteriormente, fue implentada con un grupo de niños y niñas de educación infantil y primaria para ser analizada por los estudiantes de máster. El objetivo principal de esta actividad es contribuir a la formación continua de los/as maestros/as dotándolos de recursos adecuados que repercutan de manera positiva en la educación matemática del alumnado en edad escolar. En concreto, la propuesta, consistió en presentar la escape-room como

recurso didáctico para trabajar las matemáticas de forma lúdica y contextualizada. Los estudiantes matriculados en dicha materia diseñaron una escape-room, que implementaron con un total de 80 niños y niñas de entre 4 y 8 años.

Palabras clave: escape-room, educación matemática, formación continua del profesorado.

1. Introducción

La formación de los/as maestros/as debe estar orientada a dar una respuesta adecuada a las necesidades educativas que tiene la sociedad en cada momento. Ello supone cambiar ciertos paradigmas que permanecen anclados en las aulas y que no hacen más que perpetuar prácticas carentes de utilidad. En concreto, la educación matemática necesita de nuevos modelos de enseñanza que, además de derivar en aprendizajes realmente significativos, se ajusten a las finalidades recogidas en la actual ley educativa. El aprendizaje de matemáticas es importante porque aporta una comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible (LOMLOE, 2020). Es por eso por lo que los/as maestros/as deben comprender la relevancia y la utilidad de incluir en su práctica docente nuevos enfoques y métodos que ayuden a mejorar el interés del alumnado por las matemáticas, a la vez que promuevan valores como el trabajo colaborativo e integrado.

En este trabajo nos centramos en uno de estos enfoques: la gamificación. Esta metodología está obteniendo cada vez un mayor auge dentro del diseño de las clases por parte del profesorado. El motivo de ello es que, por un lado, genera un alto grado de implicación en el alumnado y, por otro, incrementa su motivación permitiendo trabajar los mismos contenidos y objetivos que antes, pero de una forma más innovadora y dinámica. El juego supone una gran herramienta para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, no solo porque se trabajen conocimientos a través de una metodología activa, sino porque también facilita el trabajo en equipo y

demás habilidades sociales (Muñoz et al., 2015). Además, no solo se trata de que los/as maestros/as sean capaces desarrollar nuevas metodologías, sino de que puedan llevar a cabo un ejercicio de reflexión para comprobar si realmente estamos gamificando en las aulas o simplemente haciendo un trasvase del papel (Marin, 2015). Teniendo en cuenta todo lo anterior, este trabajo se centró en el desarrollo de una escape-room. En los últimos años este recurso educativo ha conseguido adquirir gran relevancia entre los docentes dada su capacidad de sintetizar el juego como herramienta de aprendizaje de diferentes contenidos (Blanco y otros, 2021). Se trata de crear una dinámica de aventura real que suele estar ambientada en una habitación, donde las personas participantes deben escapar siendo encerrados desde un principio. El objetivo final de los jugadores es lograr escapar completando con éxito los juegos, enigmas, acertijos o rompecabezas que se les proponen. Esta se plantea como una actividad flexible que permite crear múltiples historias con varios temas y contenidos. Todas las escape-room tienen una estructura similar, teniendo en cuenta una serie de elementos vertebradores que se consideran necesarias para su realización tal como proponen Segura-Robles y Parra-González (2019): escoger un buen espacio de acción, valorar el nivel de dificultad, proponer unos objetivos realistas, adaptación del espacio a la temática, plantear enigmas variados, contar con diferentes materiales y de diferente tipo y tener en cuenta un proceso de evaluación.

2. Contextualización, diseño de la propuesta y desarrollo

La propuesta se desarrolla en el marco de la materia *Innovación e Investigación en Didáctica de la Matemática*, perteneciente a la titulación del Máster en Investigación e Innovación en Didácticas Especificas para Educación Infantil y Primaria, ofertada por las tres universidades del Sistema Universitario Gallego. En concreto, esta propuesta se llevó a cabo en la Universidad de Santiago de Compostela a lo largo del curso académico 2022/2023 con los/as 15 estudiantes matriculados/as en la materia mencionada. Todos/as ellos/as disponían del título de graduado/a en Maestro de Educación Infantil y/o Primaria. La finalidad de esta asignatura es conseguir que los/as estudiantes conozcan diferentes recursos educativos que les permitan en un

futuro llevar a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje que deriven en que su alumnado desarrolle la competencia matemática. En este sentido, una de las actividades que se encomienda en la materia es el diseño de una propuesta didáctica dirigida a alumnado de la etapa de educación infantil y primaria empleando como metodología la gamificación. El objetivo principal de la misma es que los/as estudiantes del máster sean capaces de desarrollar e implementar una propuesta didáctica de innovación activa que permita trabajar las matemáticas de una forma competencial, a la vez que les posibilite valorar las dificultades con las que se encuentran los/as niños/as en este tipo de tareas.

Una vez diseñada la propuesta, ésta fue implementada con 80 niños y niñas de edades comprendidas entre los 4 y los 8 años, escolarizados en el Centro Rural Agrupado A Tarandeira (A Coruña) tanto en la etapa de educación infantil como de educación primaria. El lugar donde se llevó a cabo fue en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago, donde los/as niñas/as acudieron acompañados/as por sus docentes. Los espacios empleados fueron el salón de actos y 4 aulas ordinarias en las que se llevaron a cabo las diferentes actividades que componían la escape-room, de 2 horas de duración.

El punto de partida fue la representación teatral del cuento "Quen pode vencer o vento?" (Pita y Arbona, 2014), recurso que los/as maestros/as decidieron emplear como hilo conductor de la propuesta. La versión dramatizada del cuento fue escenificada en el salón de actos de la facultad por los/as propios/as maestros/as. Una vez finalizada esta primera actividad, que se llevó a cabo en gran grupo, los/as niños/as se dividieron en 4 grupos de trabajo. Cada uno de estos grupos tuvo que dar respuesta a uno de los 4 enigmas que componían la escape-room, con la finalidad de obtener una cifra que formaba parte de un número que les permitiría recuperar a los animales perdidos en el cuento. Para eso, cada grupo fue acompañado a una de las aulas habilitadas, donde se encontraba la prueba a resolver. Allí, el conjunto de niños estaba acompañado por 3 o 4 estudiantes de máster que les explicaban la actividad y les facilitaban las pistas necesarias para que pudieran llegar a la solución del enigma.

Los 4 enigmas que configuran la escape-room son los que se describen a continuación:

- 1º: Tiendas de campaña: Se informa a los participantes que, debido a las intensas lluvias, el poblado ha perdido sus viviendas por completo. Para solucionar esto, deben lograr construir un lugar donde dormir y refugiarse de la climatología. Para lograrlo tienen que hacer los movimientos necesarios de los palos que se le facilitan para lograr formar cuatro triángulos del mismo tamaño, es decir, cuatro tiendas de campaña iguales.

- 2º ¡Hay que encontrar a los animales!: En este caso los participantes deben hacer una representación de los animales desaparecidos empleando las piezas del tangram. Para ello deben construir los máximos posibles empleando el material facilitado.

- 3º ¿Cuáles son los números de los animales?: Además de haber desaparecido, los animales han perdido sus números y necesitan ayuda para encontrarlos. A través de una imagen a modo de pista, deben descubrir el valor de cada figura e intentar justificar por qué cada uno de los animales tiene ese número donde deben determinar el valor de cada figura. En este caso, el número de cada animal simboliza el orden en el que aparecen en la obra teatral. Para la realización de esta prueba el alumnado se puede apoyar en material (regletas) para modelizar las cantidades.

-4º ¡Que llueva!: Para superar esta prueba, los participantes deben de ser capaces de interpretar con los instrumentos facilitado la canción ¡Que llueva, que llueva! Para ello contarán con unos instrumentos particulares como son copas de cristal llenas con distintas cantidades de agua y así lograr que produzcan distintas notas musicales. Para facilitar la actividad se les da también una partitura adaptada con los números de cada una de las copas y las veces que debe ser tocada para que así puedan interpretar la canción.

Una vez finalizadas las cuatro pruebas, el alumnado se reunió de nuevo en el salón de actos para poder compartir los números de las soluciones. Una vez establecido este número final, se introdujo en un candado virtual, el cual los llevó al logro del

diploma certificando la consecución de la escape-room. El alumnado ha conseguido traer la lluvia al poblado, ayudando a los animales y consiguiendo así el objetivo.

3. Resultados y conclusiones

Una vez implementada la intervención didáctica por partes de los/as estudiantes de máster con niños/as, podemos confirmar que las metodologías activas y los recursos novedosos como son la gamificación y, en concreto, la escape-room resultan muy motivadores y estimulan el aprendizaje, en particular de contenidos matemáticos. Los/as niños/as que participaron en la experiencia se involucraron en encontrar la solución del enigma, comprendiendo lo que hacían en todo momento. Esto permitió que la tarea fomentase el estímulo matemático y que se superasen con éxito el conjunto las dificultades encontradas.

También, los/as estudiantes de máster mostraron un gran interés e implicación tanto en el diseño de la propuesta como en su implementación, intentando ayudar a los/as niños/as en sus dificultades y observando los procesos y errores que aparecieron en la situación didáctica. Esto les permitió realizar un análisis a posteriori y determinar limitaciones para intentar hacer una propuesta de mejora en futuras intervenciones. Entre ellas destacan una mejor adaptación del tiempo a los contenidos o la creación de más espacios dado el gran volumen de participantes con el que contaban. Aún así destacan que se les ofertó a los/as niños/as una experiencia enriquecedora donde pusieron en juego sus conocimientos de geometría o aritmética y que les permitió trabajar las matemáticas de forma competencial y contextualizada.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del proyecto de I+D+i PID2021-122326OB-I00, financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Blanco, T. F., Salgado, M. y Varela-López, V. (2021). Competencias evidenciales en una Harry-Escape room. En J. B. Lopes, J. P. Cravino, P. Membiela, M. G. Tommasiello, A. E. Cunha y D. K. Nzau (Coord.) *Relatos e investigação de práticas de ensino de Ciências e Tecnologia* (pp. 806-810).

Marín, V. (2015). La gamificación educativa. Una alternativa para la enseñanza creativa. *Digital Education Review, 27*.

Muñoz, C., Lira, B., Lizama, A., Valenzuela, J. y Sarlé, P. (2019). Motivación docente por el uso del juego como dispositivo para el aprendizaje. *Interdisciplinaria, 36*(2), 233-249.

Pita, C. y Arbona, M. (2014). *¿Quén pode vencer o vento?* OQO Editora.

Segura-Robles, A. y Parra-González, M. (2019). How to implement active methodologies in Physical Education: Escape Room. *ESHPA 3*(2), 295 - 306.

Lectura crítica de información estadística por futuros profesores de Matemáticas

María Teresa Castellanos Sánchez
mcastellanos@unillanos.edu.co
Universidad de los Llanos
Nelson Fernando Vergara
nelson.vergara@unillanos.edu.co
Universidad de los Llanos
Omaira Elizabeth González Giraldo
Omaira.gonzalez@unillanos.edu.co
Universidad de los Llanos

Núcleo temático: Formación del Profesorado
Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Bachillerato y Universidad: Licenciatura en matemáticas

RESUMEN

El propósito del estudio fue evaluar la habilidad de Futuros Profesores de Matemáticas (FPM) para leer e interpretar de gráficos estadísticos. Con este objetivo, se analizan las respuestas a tareas durante una trayectoria de instrucción en la implementación de un experimento de enseñanza donde los participantes interpretan información estadística representada en gráficos estadísticos procedentes de diferentes contextos y medios de comunicación. La metodología es de tipo cualitativo con alcance descriptivo, examinando el nivel de lectura alcanzado a través de la actividad solicitada en la resolución, los tipos y elementos del gráfico. Los resultados dan cuenta de la lectura crítica realizada por los Futuros Profesores, en su mayoría con lecturas e interpretaciones correctas; no obstante, los argumentos ofrecidos por los participantes permiten identifican errores en el uso de conceptos estadísticos, aportando reflexión a la formación inicial de profesores.

Palabras clave: lectura critica; formación profesores, gráficos estadísticos

1 Introducción

En los últimos diez años, el interés por comprender la “alfabetización estadística” ha aumentado en la comunidad académica internacional, *el término se hace sinónimo con Cultura estadística* (Molina-Portillo y otros, 2019) y de este modo lo usamos en este estudio. El aprendizaje escolar de la estadística desde niveles iniciales ha tomado importancia, al igual que la formación inicial de profesores de matemáticas. La idea de alfabetización estadística se incrusta cada vez más en los diseños curriculares procurando el desarrollo de habilidades para a) interpretar y evaluar críticamente la información estadística suministrada en diferentes medios, b) discutir y comunicar información para la toma de decisiones informadas (Gal, 2019) es decir, personas estadísticamente cultas.

Desde esta aproximación las tablas y gráficos estadísticos son elementos culturales (Arteaga et al., 2011), por lo tanto, la lectura e interpretación crítica constituyen elementos fundamentales de la alfabetización estadística. Otros autores consideran que dichas habilidades deben ser desarrolladas por los escolares durante su tránsito por los diferentes niveles académicos, tal como lo propone el proyecto GAISE II (Bargagliotti et al., 2021)

La estadística y la probabilidad hacen parte de los lineamientos curriculares de las matemáticas escolares internacionales y locales, relevando la lectura y comprensión de información estadística (Vásquez, Arredondo y Garcia-Garcia, 2022). Las pruebas SABER en Colombia demandan del escolar la capacidad de descifrar, representar en términos matemáticos y predecir resultados en situaciones que implican el manejo de datos de distinta naturaleza. (Castellanos y Arteaga, 2013). La responsabilidad directa recae en el profesorado, a quienes conviene enseñar la estadística y la probabilidad y considerar su rol protagonista en la promoción de la alfabetización estadística.

Por su parte, las pruebas externas en Colombia que evalúan a profesionales la competencia matemática (Prueba SABER-PRO), han manifestado dificultades de los futuros profesores relativos a la lectura, interpretación y comprensión de gráficos estadísticos, involucradas con las justificaciones dadas a soluciones (ICFES, 2019);

ello implica otorgar sentido al uso de los datos estadísticos en contextos reales y de interés social, así como favorecer la toma de decisiones y la oportunidad de expresar pensamiento crítico al respecto de las problemáticas analizadas (Ridgway, 2016)

Entendiendo que los conocimientos y habilidades de los futuros profesores para leer e interpretar de manera crítica la información estadística dependen de su práctica profesional, surge la pregunta ¿Qué nivel crítico exhiben los futuros profesores de matemáticas al leer e interpretar información estadística procedente de diferentes contextos?

Para abordar la cuestión de investigación se acude a investigaciones previas relacionadas con: nivel de lectura del gráfico estadístico, nivel de complejidad semiótica del gráfico estadístico. Los constructos: Cultura estadística, comprensión y lectura de gráficos estadísticos.

La idea de cultura estadística implica que tener conocimiento y dominio de contenidos matemáticos y extra-matemáticos, como también su aplicación en contextos particulares. Según Gal (2019), para lograr esta cultura, se requiere: (1) Conocer nociones matemáticas fundamentales; las “grandes ideas” que están detrás del pensamiento estadístico; (2) Conocer cómo se procesan y analizan los datos estadísticos; (3) Conocer como fundamentar las evidencias de un estudio estadístico; (4) Conocer nociones básicas de probabilidad y (5) Conocer los defectos o fallas típicas presentadas al realizar análisis e interpretación de datos.

En los estudios de Weiland (2017) se presentan dos niveles de cultura estadística: (a) el nivel más bajo, denominado “cultura estadística”, el lector de los datos otorga sentido y criticar argumentos basados en datos estadísticos encontrados en diversos contextos, evalúa la fuente, la recopilación y los informes estadísticos; (b) el nivel más alto, llamado “cultura estadística crítica”, el lector otorga sentido al lenguaje y a los sistemas de símbolos estadísticos, critica la información estadística y los argumentos basados en datos que se encuentran en diversos contextos.

Para examinar los niveles en la lectura de una tabla o un gráfico estadístico se acude a cuatro niveles de lectura (Curcio (1989), Friel, Curcio y Bright (2001), citados en Castellanos y Obando (2023) y los adaptados para tablas estadísticas por Castellanos (2013) y ajustados por Diaz-Levicoy y otros (2020). Entre ellos se encuentran: a) Leer los datos (Nivel N1), referido a la lectura literal de la información representada en el gráfico, sin interpretarlos. El lector lee datos y reconoce (o ubica) el valor de una variable. b) Leer entre los datos (Nivel N2), dedicado a las relaciones entre los datos, comparar sus valores y realizar cálculos entre los datos, establece las medidas de tendencia central. c) Leer más allá de los datos (Nivel N3), el lector puede hacer inferencias con la información no explicita del gráfico; por ejemplo: obtener frecuencias de un dato no representado a través de otros valores de variable o de datos explícitos. d) Leer detrás de los datos (Nivel N4), exige realizar valoración crítica a partir del contenido del Gráfico. En el nivel de mayor profundidad, discuten pertinencia de la gráfica, evalúan la recolección de datos, producen conclusiones contextualizadas y análisis comparativos.

2 Metodología

El diseño metodológico de la investigación corte exploratoria y descriptiva con un enfoque cualitativo, según el concepto de Hernández, Fernández y Baptista (2014) se corresponde con un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos que implican la recolección de datos cuantitativos y cualitativos. Esto permitirá informar sobre la interpretación crítica de datos representados en tablas y gráficos estadísticos a través de cuatro niveles de lectura exhibidos por los participantes. Se siguen los parámetros de la investigación de diseño “design-based research”, actualmente usado en el campo de la Educación Matemática e implementado en estudios previos del grupo de investigación GHEMA (Castellanos, Montealegre y Castro, 2020).

La conjetura que orienta estudio busca probar que en futuros profesores de matemáticas existen dificultades en la lectura y comprensión de información representada en tablas y gráficos estadísticos, que van desapareciendo, pero no totalmente al avanzar en el desarrollo de un curso de formación (en estadística descriptiva).

La muestra se configura de manera intencionada y por conveniencia con un grupo de 17 FPM. Los participantes son estudiantes de la licenciatura en matemáticas y la licenciatura en matemáticas de una Universidad en Colombia que cursan las asignaturas de didáctica de la estadística y la probabilidad

Las variables objeto de estudio se examinan en los informes y tareas entregados por los FPM. El estudio encuentra pertinente para operativizar las variables asumir los presupuestos de Jiménez-Castro, Arteaga y Batanero (2020); Diaz-Levicoy et al. (2020) y Castellanos, Montealegre y Castro (2020) para analizar los elementos de los gráficos estadísticos, los tipos de gráficos (barras, circulares, histogramas, líneas etc.); las tablas estadísticas (datos, frecuencia, doble entrada) y las actividades matemáticas solicitadas en la lectura de representaciones (clasificar datos, comparar datos, interpretar, leer, calcular, traducir, comparar distribuciones)

2.1 El experimento de enseñanza

Para examinar la problemática, el estudio se configuró como un experimento de enseñanza siguiendo el paradigma de la investigación de diseño a fin de lograr el propósito de investigación y de manera simultánea alcanzar el objetivo formativo (Castellanos, Flores y Moreno, 2018). Este diseño con propósitos similares se ha implementado en estudios previos (Castellanos, Montealegre y Castro, 2020).

El experimento atraviesa por tres momentos: diseño, implementación y análisis retrospectivo. El diseño de la instrucción atiende los presupuestos del modelo de alfabetización estadística planteado por Molina-Portillo y otros (2019). La trayectoria de enseñanza se implementa a través de tareas formativas que involucran la lectura de gráficos estadísticos procedentes de diferentes medios de comunicación y de las pruebas SABER-11-Colombia. El análisis retrospectivo se realiza siguiendo los presupuestos sobre la comprensión y lectura de gráficos estadísticos (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001. Citados en Castellanos y Obando 2023).

3 Resultados

Conforme con la investigación de diseño, los resultados se presentan en tres dimensiones: a) el diseño de la trayectoria de instrucción, a la luz de los objetivos, las conjeturas y al modelo teórico abordado. b) La descripción sistemática del experimento que consiste en la revisión y análisis secuencial de cada momento formativo y 3) el análisis retrospectivo da cuenta de las habilidades de los escolares para leer y tratar la información estadística presente en gráficos estadísticos.

3.1 El diseño instruccional y la planeación

Los primeros resultados se corresponden con la configuración de la trayectoria de instrucción, seleccionando conjuntamente (investigadores y profesores titulares) las tareas considerando los conocimientos y experiencia previa de los FPM (Tabla 1).

Para lograr los objetivos formativos, se siguen los presupuestos de la alfabetización estadística (Molina-Portillo y otros, 2019), seleccionando gráficos con datos estadísticos procedentes de medios de comunicación y de pruebas SABER.

Tabla 1. Elementos para la promocion de la Cultura Estadística

COMPONENTE	SIGNIFICADOS Y METAS
Conceptos y habilidades básicas	Lenguaje Estadístico. Conceptos básicos de la Estadística. Procesos algorítmicos.
Razonamiento estadístico 4	Reconocer la necesidad de los datos. Transnumeración. Percepción de la variación. Razonamiento con modelos estadísticos. Integración de la Estadística.
Creencias	Toma de decisiones basadas en la evaluación de los datos. Establecer situaciones de comparación, basadas en datos y no en intuiciones
Actitudes	Manifestar valores, sentimientos y actitudes, respecto al uso de la Estadística.

Fuente Elaboración propia

Para el estudio se consideran cinco situaciones con tareas que involucran la lectura e interpretación de gráficos estadísticos (barras, sectores, líneas/puntos, pictograma). Para lograr los objetivos de investigación, la selección de los gráficos incluye algún

sesgo. La tabla 2 describe la selección de los gráficos para cada sesión de intervención.

Tabla 2 Trayectoria y tareas del diseño instruccional

Situación	**Tipo de gráfico**	**Elementos conceptuales**	**Temática**	**Indicadores de actitud crítica**	**Escala**
Natalidad en Colombia	Diagrama de puntos	Población, nacimientos, esperanza de vida, mortalidad		abilidad de los datos, variabilidad en la muestra	Pregunta abierta
Informalidad laboral en Colombia	Barras adosadas	Empleo, condiciones laborales	Contexto Social	Representación justa, sesgo de datos	Pregunta abierta
Pobreza monetaria en Colombia 2022	Diagrama de anillos	Pobreza, condiciones de vida	Economía	Contexto histórico, fuentes de datos	Pregunta abierta
Los 10 grandes equipos de fútbol colombiano por ingresos operaciones	Diagrama de sectores	Equipos de Futbol, ingresos económicos.	Deporte	Comparación justa, representación adecuada	Pregunta abierta
Consumo de bebidas azucaradas por rango de edad	pictograma	Bebidas, azúcar, consumo.	Salud	Impacto de la industria, representación equitativa	Pregunta abierta

Fuente elaboración propia

El Análisis de Contenido (Rico y Moreno, 2017) permitió caracterizar los significados (matemáticos-estadísticos) presentes en los gráficos seleccionados; asimismo, se establecieron las demandas cognitivas presentes en cada nivel de lectura para la interpretación de gráficos estadísticos seleccionados, considerando los conocimientos y experiencia previa de los FPM con objeto de lograr las metas formativas (Tabla 3). El análisis de los significados evidencia las respuestas típicas de los participantes.

Durante la planeación, se logró la construcción de la trayectoria de tareas, secuenciando los contenidos temáticos relacionados con: datos, variables y escalas,

representaciones estadísticas (tablas y gráficas), y medidas de dispersión (Tabla 3). Estos significados fueron sometidos a revisión conceptual y procedimental acerca de su tratamiento en el aula de clase, constituyendo en referencia para la estructuración del Diseño Instruccional.

Tabla 3. Propósitos y Contenido de las tareas del experimento de enseñanza

Meta de aprendizaje	Descripción	Conceptos
Primera	Reconocer importancia del análisis de la información (datos) que arrojan los medios de comunicación y/o que es obtenida a partir del contexto.	Procedencia de datos Experimentos estadísticos Variables estadísticas incluidas Técnica de recogida de datos
Segunda	Identificar elementos del contexto que presenten variación. Recoger información organizando conjuntos de datos mediante diferentes representaciones estadísticas. Analizar, a fin de inferir características de la población a partir de la información recogida	Las variables y escales Tablas y gráficas estadísticas Componentes del gráfico Niveles de lectura Estructura de los gráficos Tipos de graficos y tablas frecuencias acumuladas
Tercera	Aplicar conceptos y procedimientos de las MTC y de dispersión, para leer resúmenes estadísticos. Analizar críticamente características de las variables en estudio, la muestra y de la población descrita a través de las mismas.	Medidas de tendencia central centralidad y dispersión a mediana Moda Media Aritmética Percentiles
Meta de investigativa: interpretar los argumentos y la evaluación que realizan los FPM sobre la información estadística proveniente del contexto a través de gráfica estadísticas		

Fuente: elaboración propia

3.2 La implementación del experimento

Posterior a la preparación de cada una de las sesiones de instrucción, se lleva a cabo la ejecución de las sesiones, y al final de cada una de ellas, se realiza el análisis de lo acontecido. En síntesis, se aportó al desarrollo de las tareas por los participantes promoviendo la Cultura Estadística. Los resultados evidencian las producciones de los participantes. La figura 1 muestra respuestas a una tarea por parte de un FPM, el seguimiento de tipo cualitativo a los hallazgos durante las intervenciones lleva al logro de los propósitos de la investigación y de manera simultánea alcanzar el objetivo formativo.

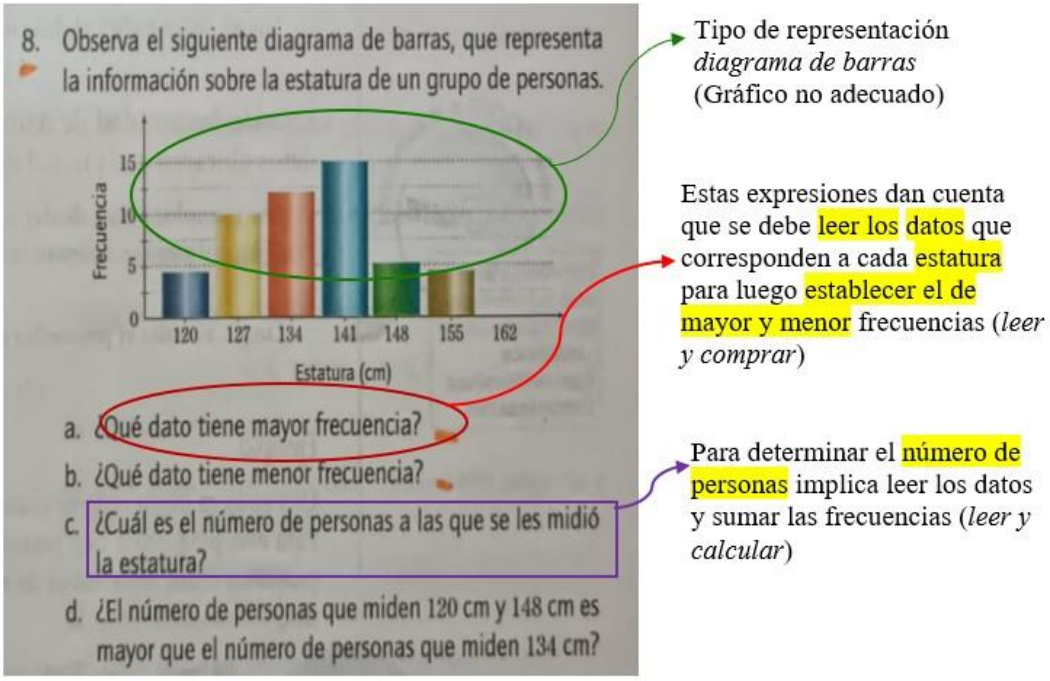
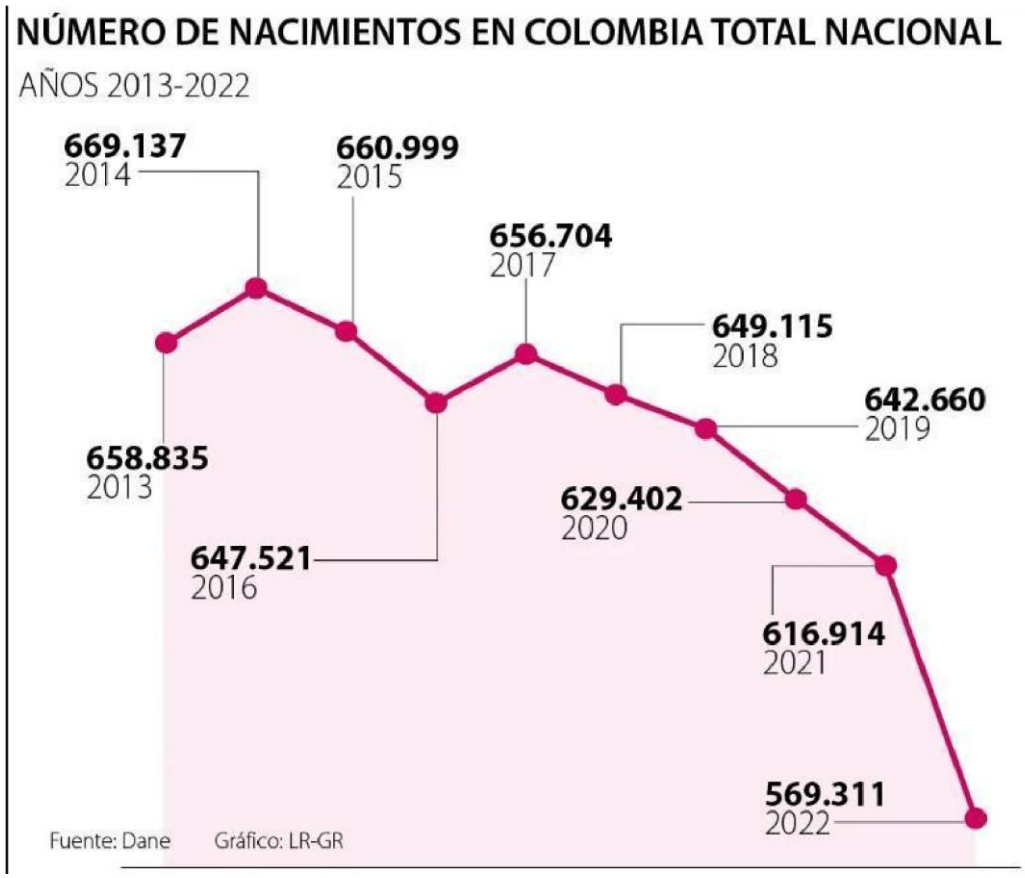


Figura 1. Producción de un FPM

Los resultados destacan, los siguientes logros por parte de los FPM a) el reconocimiento de varios términos relacionados con la Estadística; b) los FPM se acercan a términos estadísticos a medida que avanzan en la lectura y análisis de los gráficos y de la información que los acompaña (eje. Reportes de prensa) c) asocian términos estadísticos con situaciones que lo ejemplifican, más allá de la lectura literal de los datos (Figura 2); No obstante, son tímidas las producciones que reconocen los términos fuera de un contexto particular y en el respectivo lenguaje matemático. Confirmando resultado en estudios previos (Castellanos y Obando, 2023).

De igual manera, los FPM se adentran en actitud reflexiva y crítica, el experimento promueve la participación, con opiniones y conclusiones sustentadas en la información, la experiencia y las creencias (Figura 2). En coincidencia con los postulados de Arteaga y otros (2011). Se estima que usar situaciones contextualizadas es crucial para que los estudiantes se identifiquen con los datos. En síntesis, se encontró que los FPM van avanzando para lograr postura respetuosa, y exhibir críticas personales con sustento en los datos.

Los hallazgos también dan cuenta de los errores y las dificultades exhibidas por los FPM cuando interpretan y representan datos estadísticos y cuando exponen conclusiones de los datos allí representados.



1. Señale la tendencia de datos representados. Justifique la respuesta.

2. ¿El gráfico representado en la situación es correcto? Justifique su respuesta.

3. ¿Realice un resumen de la noticia indicando los datos representados en los ejes y las relaciones que se establecen entre los mismos?

4. Indique otra manera para analizar los datos e interpretar la Información y obtener conclusiones.

5. Según el gráfico: ¿Qué implicaciones tiene en el ámbito económico, social y político el comportamiento de la natalidad en los últimos 10 años en Colombia?.

Figura 2. Ejemplo de una tarea implementada

Los resultados que se exhiben en la Tabla 4 permitieron categorizar errores más frecuentes exhibidos en la resolución de las tareas, entre ellos:

Tabla 4 Errores emergentes en la lectura de gráficos estadísticos

1	Otorgar validez incorrecta a los gráficos.
2	lecturas críticas limitadas a la correspondencia con el título y el texto de la noticia
3	Comprensión equivocada de la representación utilizada
4	Asumir que todas las estadísticas oficiales son correctas
5	Atribuir que un gráfico es correcto porque utilizan cantidades o porcentajes para exhibir los datos.
6	Interpreta equivocadamente el uso de porcentajes (o valores de variable) en la gráfica
7	Desconocimiento del contexto de la noticia o de la naturaleza de los datos, lo cual limita la lectura critica del grafico
8	Comparación equivocada de dos distribuciones representadas en el mismo gráfico;
9	Atribuir certeza a la Información estadística sin cuestionar la procedencia de los datos
10	Argumentar que un gráfico es correcto porque el informe/noticia está completa.
11	cree que se producen más nacimientos en unos países que en otros por ser países menos desarrollados
12	cree que en algunos años nacen más individuos por motivos políticos
13	cree que la diferencia de nacimientos obedece a los gobernantes de torno económico
14	Omite la interpretación de las escalas
15	Descuida los puntos de origen de la cuadrícula para interpretar los datos

Fuente: elaboración propia

4. Análisis retrospectivo

El análisis se efectúa posterior a la aplicación de todo el diseño instructivo, en el cual son evaluados los resultados totales para determinar la presencia de elementos relevantes de la alfabetización estadística (o cultura estadística). En este caso, referidos a la lectura e interpretación crítica de información procedente de gráficos estadísticos como uno de los elementos que definen la cultura estadística (MolinaPortillo, 2019). La tabla 5 describe las categorías e indicadores que se establecieron en este análisis y determinar la interpretación de información estadística

que ponen de manifiesto FPM y con ello, manifestar los elementos relevantes de la cultura estadística.

Tabla 5: *Categorías y variables analizadas*

Variables	Definición y descripción	Indicadores involucrados
Elementos del gráfico	Rasgos para comprender los datos Friel, S., Curcio, F. & Bright (2001)	- El fondo y Especificadores - Título y las etiquetas - Marco del gráfico
Competencias evaluadas en SABER	ICFES, (2012) Capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas, definidas anteriormente	- Comunicación - Razonamiento - Resolución Ejercitación - Interpretación - Argumentación - Proponer - Modelación
Niveles de lectura de gráficos	Tipo de lectura que se realiza respecto a los datos. (Curcio, 1989)	- Leer entre los datos - Leer dentro de los datos - Leer más allá de los datos - Leer detrás de los datos
Actividad Solicitada	Tareas y procedimientos que ejecuta el estudiante al dar solución a la tarea (MEN, 1998) Definidas en Castellanos (2013)	- Clasificar, organizar y representar datos - Traducir los datos entre representaciones - Leer e interpretar una representación - Leer y comparar datos en la misma representación - Comprar diferentes representaciones - Calcular: promedios, frecuencias, razones - Construir nuevas representaciones

Fuente: Castellanos (2013)

Respecto a los elementos del gráfico estadístico, los FPM otorgan poca relevancia a elementos tales como los especificadores y las etiquetes, la interpretación es apoyada en el título y en los datos visibles; la mayoría de los FPM descuidan las escales y convenciones para tomar decisiones. Lo que concuerda con los estudios de Diaz-Levicoy et. al (2020)

La lectura de gráficas estadísticas permitió a FPM participantes manifestar conocimientos relacionados con las matemáticas, los sistemas numéricos, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas. El análisis de los resultados evidencia el dominio de conceptos y destrezas de los FPM en la lectura de

gráficos de barras, en menor representación los gráficos de sectores. Son escasos los aciertos en la lectura de los gráficos de líneas y los pictogramas, lo que ha documentado en otras investigaciones previas (Castellanos, Montealegre y Castro, 2020)

En los gráficos que representan los datos a través de distribuciones de frecuencia (absoluta y relativa) para variables discretas, los FPM logran exhibir su mejor desempeño (57%) en la resolución de las tareas. La actividad solicitada en gráficos usados demanda a los FPM, principalmente extraer información cuantitativa, organizar y percibir patrones con los datos representados, se destaca la duplicidad de las actividades o procedimientos para la solución de una situación.

Los FPM en su mayoría (68%) logran desempeñarse satisfactoriamente en las actividades más elementales (Leer datos y frecuencias) de un gráfico, en otros casos los FPM extraen información estadística visualizando el gráfico y efectuando interpretación a las tareas a partir de varias actividades solicitadas, lo cual concuerda con los estudios de Diaz-lávicoy et al. (2020). La actividad Comparar datos, requiere traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa, los FPM logran comparaciones al con otras relaciones (eje. Relaciones de proporcionalidad), de cantidad y también pueden observar los valores máximo y mínimo de la variable.

Algunos de los FPM (43%) logran desarrollar con éxito las actividades solicitadas de mayor demanda en los niveles de lectura de gráficos en N2 y N3, demostrando acciones como traducción entre representaciones; trasladar los datos representados en una tabla (o un conjunto) y viceversa. Al igual que en los estudios de JiménezCastro, Arteaga & Batanero (2020), encontramos que se pide al FPM elegir el gráfico de barras para representar los datos de una tabla, para eso debe organizar los datos y realizar el recuento para construir la distribución esta son las actividades que caracterizan el nivel N2 principalmente.

A pesar de procurar por la lectura crítica de la información estadística, el análisis muestra que tan solo 12,14% de los FPM se ubican en Nivel (N4), lo que se

corresponde principalmente con las tareas argumentativas (Vásquez, Arredondo, & García-García, 2022). Los FPM en este nivel requieren además de argumentar y justificar sus posturas soportadas en los datos, lo que promueve el pensamiento crítico y la expresión oral y escrita.

5 Conclusiones

Se encontró que los FPM participantes del estudio lograron exhibir alguno de los cuatro niveles de lectura para los gráficos estadísticos que involucraban las tareas implementadas en el experimento. El nivel de lectura de gráficos N4, tiene poca representatividad en las soluciones analizadas. Se continúa ratificando los hallazgos de estudios previos para el nivel N1: Leer entre los datos, es evidente que dicho nivel disminuye a lo largo de la implementación del experimento, para avanzar en el nivel de lectura N2, confirmando estudios previos (Castellanos, Montealegre y Castro, 2020).

Se concluye que el desempeño destacado de los FPM se dio en la lectura e interpretación de los gráficos de barras (variable discreta) y en menor proporción son acertados los desempeños en los gráficos de sectores y en los diagramas de líneas, al igual que en estudios de otros autores los FPM cometen errores referidos al uso de escalas al leer e interpretar los pictogramas.

Se concluye que la colección de tareas seleccionada para ser implementada en el experimento, exhiben coherencia entre las actividades solicitadas en su resolución y los niveles de lectura examinados. Se destacan los argumentos y posturas asumidas por algunos participantes y su sesgo en relación con la interpretación de tipo político o social.

Se concluye que las tareas propuestas para la trayectoria de instrucción del experimento de enseñanza indagan por la lectura e interpretación crítica de datos estadísticos referidos a un contexto cercano al FPM; con lo cual se contribuye al desarrollo de la cultura estadística, al tiempo que se abordan tópicos de interés entre ellos: regularidades, tendencias y tipos de crecimiento; y la formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central.

Referencias

Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Revista didáctica de las matemáticas*, 55-67.

Bargagliotti, A., Arnold, P. & Franklin, C. (2021). GAISE II: Bringing Data into

Classrooms. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *114*(6), 424–435.

Castellanos y Arteaga. (2013). *Los gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la Educación Primaria en España y Colombia*. En J. M. Contreras,

G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga. Granada: Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Castellanos, M. T., Flores, P., y Moreno, A. (2018). Reflexión en el prácticum: Un experimento de enseñanza con estudiantes colombianos. Profesorado, *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 22*(1), 413-439.

Castellanos, M., Montealegre, N., & Castro, A. (2020). Lectura de gráficos estadísticos e interpretación de información estadística: un experimento con escolares del departamento del Meta. *Revista Sigma,* 16(2), 20-31.

Castellanos, M. y Obando, J. (2023). *Alfabetización mediática y niveles de lectura en tablas y gráficos estadísticos por estudiantes de la Universidad de los Llanos*.

EnTriana, J. A., Saray, C. L. D., Rojas, A. R., Rodríguez, A. R., Neira, E. A. S., Builes, N. M. S., & Núñez, S. P. G. Experiencias innovadoras en la educación superior colombiana. Fondo Editorial–Ediciones Universidad Cooperativa de Colombia.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R., Arteaga, P., & López-Martín, M. D. M. (2020). Conocimiento sobre tablas estadísticas por estudiantes chilenos de tercer año de Educación Primaria*. Educación matemática*, 32(2), 247-277.

Gal, I. (2019). *Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models.* En J. Contreras, M. Gea, M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas

del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística Universidad de Granada. España

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación.* (Mc Graw Hill Education, Ed.; Sexta).

ICFES. (2019). *Resultados Nacionales SABER 3°, 5° y 9° 2012-2018.* Bogotá D.C.: ICFES.

Jiménez-Castro, M., Arteaga, P. & Batanero, C. (2020). Statistical graphs in Costa Rica textbooks for primary education. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *34*(66). https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a07

Molina-Portillo, E., Contreras, J, Godino, J. y Ruz, F. (2019). Alfabetización estadística en la sociedad de la información. Boletín de Estadística e Investigación *Operativa*, 35 (2), 148-169.

Rodríguez, J. y García, P. (2018). *Las matemáticas del arte. Más allá del número de oro*. Colección Miradas Matemáticas. Editorial Catarata. Madrid.

Rico L. y Moreno, A (2017). Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria. España: Pirámide

Ridgway, J. (2016). Implications of the data revolution for statistics education. *International Statistical Review, 84 (*3), 528-549.

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. Educational Studies in Mathematics, 96 (1), 33–47.

Vásquez, C., Arredondo, E. H. & García-García, J. I. (2022). Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(72), 116–145.

Fortaleciendo la Formación del profesorado: Nueva Mención en Ciencias y Matemáticas en Educación Primaria de la Universidad Rey Juan Carlos I

Paula Rosado Jiménez
paula.rjimenez@urjc.es
Universidad Rey Juan Carlos I

Piedad Tolmos Rodríguez-Piñero
piedad.tolmos@urjc.es

Ana I. Cid Cid
ana.cid@urjc.es

Núcleo temático: Formación del profesorado, Procesos.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universidad (Grado en Educación Primaria).

RESUMEN

La nueva Mención en Ciencias y Matemáticas de la Universidad Rey Juan Carlos, introducida en el curso 2023-2024, consta de cuatro asignaturas, la primera de las cuales se ha impartido por primera vez este curso. Estamos ante una asignatura clave dedicada a la resolución de problemas matemáticos, diseñada para fortalecer la formación de futuros maestros de primaria. Esta asignatura responde a la necesidad de una educación más robusta en ciencias y matemáticas, donde la dedicación ha sido tradicionalmente insuficiente. Al enfrentar directamente el desafío de la ansiedad matemática, que afecta el desempeño de los educadores, prepara a los estudiantes con métodos prácticos y teóricos para enseñar eficazmente matemáticas. El objetivo es equipar a los futuros docentes con las competencias necesarias para mejorar el

aprendizaje y la confianza en matemáticas entre los estudiantes de primaria, abordando así los desafíos educativos críticos en estas áreas fundamentales.

Palabras clave: Educación Primaria, Problemas, flexibilidad, ansiedad matemática

Educación Primaria

La importancia de la formación en matemáticas en los grados de Educación Primaria es incuestionable, dada su influencia directa en la competencia y confianza de los futuros maestros para impartir estas materias esenciales (Nolla, 2021). Los estudios indican que una sólida formación matemática en el nivel universitario contribuye significativamente al rendimiento académico de los estudiantes en el sistema educativo. Como se menciona en el trabajo de Melón y otros (2022), el conocimiento previo en ciencias naturales, que incluye matemáticas, juega un papel crucial en el rendimiento académico de los estudiantes que cursan asignaturas afines en el grado de Educación Primaria impartido en la Universidad Rey Juan Carlos.

Además, el estado de la educación STEM, que engloba a las matemáticas, es una preocupación constante en el ámbito educativo europeo y español. La dedicación promedio a materias STEM durante el desarrollo de los grados de Educación Primaria es insuficiente (Castro, 2021) en comparación con la actividad docente STEM requerida en las prácticas profesionales (Melón, 2022), evidenciando una necesidad clara de reforzar esta formación desde la base universitaria.

La ansiedad hacia las matemáticas es otro factor significativo que afecta a los futuros educadores. Sánchez Mendías y otros (2011), han documentado cómo la ansiedad hacia las matemáticas es un fenómeno común entre los estudiantes de magisterio, lo que puede impactar negativamente en su desempeño y en su capacidad para enseñar matemáticas de manera efectiva. Esta ansiedad no solo limita la capacidad del individuo para aprender, sino que también puede transmitirse, afectando la actitud y el rendimiento de sus futuros estudiantes (Martínez-Artero, 2017).

Este panorama resalta la importancia de implementar estrategias educativas que mejoren la formación en matemáticas durante el grado de Educación Primaria, no solo para aumentar el conocimiento y la competencia de los futuros maestros, sino también para mitigar la ansiedad asociada con esta disciplina. Por ello, la introducción de una Mención en Ciencias y Matemáticas es una respuesta estratégica a esta necesidad, ofreciendo una especialización que profundiza en el conocimiento matemático y científico y prepara mejor a los futuros docentes para enfrentar los desafíos educativos en estas áreas críticas.

La nueva Mención en Ciencias y Matemáticas en el Grado de Educación Primaria

La introducción de la Mención en Ciencias y Matemáticas en el Grado de Educación Primaria de la Universidad Rey Juan Carlos para el curso académico 2023-2024 marca un hito significativo en la evolución de la formación docente en España. Este nuevo programa de especialización responde a la creciente necesidad de adaptar la educación a los requerimientos de un mundo cada vez más orientado hacia las ciencias, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM).

Objetivos de la Mención

La Mención en Ciencias y Matemáticas está diseñada para dotar a los futuros maestros de herramientas robustas y conocimientos profundos en áreas clave que impactan directamente en el aprendizaje y la enseñanza de estas disciplinas. El objetivo es formar maestros capaces de:

- Inspirar y motivar a sus futuros alumnos de educación primaria hacia las ciencias y matemáticas.
- Aplicar métodos de enseñanza innovadores que mejoren el aprendizaje de los estudiantes en STEM.
- Abordar y reducir la ansiedad hacia las matemáticas entre los estudiantes, fomentando un ambiente de aprendizaje positivo y enriquecedor.

La Mención consta de cuatro asignaturas optativas, y deben cursarse todas ellas para obtener dicha mención, cada una con un enfoque especializado para abordar diferentes aspectos de las ciencias y matemáticas:

- **Matemáticas aplicadas a la resolución de problemas** (2º curso, 2º semestre) - Esta asignatura se centra en el desarrollo de habilidades para la aplicación práctica de las matemáticas en situaciones reales, preparando a los estudiantes para usar estas técnicas en su futura práctica docente.

- **Diseño de proyectos STEM en el aula de primaria** (3º curso, 1er semestre) - Orientada a la integración de proyectos STEM en el currículo, esta asignatura promueve el aprendizaje activo y colaborativo entre los estudiantes de primaria.

- **Laboratorio de recursos didácticos para la enseñanza de las materias STEM** (3º curso, 2º semestre) - Esta asignatura proporciona a los futuros maestros las herramientas didácticas necesarias para implementar eficazmente la enseñanza de STEM en el aula.

- **Las ciencias experimentales y la vida cotidiana: Implicaciones didácticas** (4º curso, 1er semestre) - Se enfoca en conectar los conceptos de las ciencias experimentales con la vida diaria, facilitando su enseñanza de manera relevante y accesible para los estudiantes de primaria.

Con la implementación de esta mención, se espera que los futuros maestros no solo mejoren sus competencias en ciencias y matemáticas, sino que también se conviertan en agentes de cambio en la educación primaria, capaces de implementar prácticas pedagógicas que mejoren el interés y el rendimiento de los estudiantes en estas áreas críticas. Esta mención no solo posiciona a la Universidad Rey Juan Carlos como una institución pionera en la formación docente especializada en STEM junto a la Universidad Complutense de Madrid, sino que también contribuye significativamente a la modernización y mejora de los estándares educativos en España.

La primera asignatura: Matemáticas aplicadas a la resolución de problemas

La primera asignatura de la nueva Mención en Ciencias y Matemáticas, "Matemáticas aplicadas a la resolución de problemas", ha sido diseñada para abordar de manera práctica y contextualizada los desafíos matemáticos que los maestros de primaria enfrentan y enseñan en el aula. A lo largo del curso 20232024, esta asignatura ha integrado diversas metodologías para enriquecer el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

El enfoque de la asignatura ha sido eminentemente práctico, orientado a que los estudiantes no solo aprendan técnicas matemáticas, sino que también desarrollen una comprensión profunda de cómo aplicar estas técnicas en situaciones reales y educativas. Hemos utilizado problemas del concurso de primavera de matemáticas de Madrid, una iniciativa que propone desafíos matemáticos en un contexto competitivo y estimulante, lo cual ha permitido a los estudiantes aplicar sus conocimientos en un marco lúdico y altamente formativo.

A lo largo del semestre, se ha hecho un uso intensivo de recursos digitales y metodologías innovadoras como OAOA y Smartick, que facilitan el aprendizaje autónomo y adaptativo de las matemáticas. Estas plataformas proporcionan un entorno interactivo donde los estudiantes pueden practicar y mejorar sus habilidades matemáticas a su propio ritmo y según su nivel de competencia.

El objetivo fue enfrentar a los estudiantes del grado a todo tipo de problemas, algunos de dificultad, para proveerles de herramientas en su futuro ejercicio docente, de alternativas de resolución, huyendo de algoritmos encorsetados o de métodos cerrados.

Además, hemos incorporado materiales manipulativos como balanzas para enseñar conceptos de pre álgebra y fomentar la flexibilidad matemática, permitiendo a los estudiantes explorar las propiedades de los números y las operaciones de una manera tangible y visual.

Un componente clave de la asignatura ha sido la clasificación y resolución de diversos tipos de problemas matemáticos. Basándonos en el libro "Matemáticas resolución de problemas" de Isabel Echenique Urdiain (2006), hemos cubierto extensamente la teoría y práctica detrás de la resolución de problemas, abordando desde problemas aritméticos hasta aquellos que requieren razonamiento lógico y creativo.

Este enfoque integral ha permitido a los estudiantes no solo mejorar sus habilidades matemáticas, sino también desarrollar una comprensión más profunda de cómo enseñar matemáticas de manera efectiva en el aula. Al final del curso, hemos observado un aumento significativo en la confianza de los estudiantes al abordar problemas matemáticos complejos y una mejora notable en su capacidad para enseñar estos conceptos de manera efectiva.

Evaluación de la asignatura

La evaluación en la asignatura de "Matemáticas aplicadas a la resolución de problemas" en el Grado de Educación Primaria se diseñó para ser exhaustiva y reflejar fielmente el dominio de los conceptos y técnicas por parte de los estudiantes. Esta se dividió en tres partes fundamentales, cada una enfocada en un aspecto diferente del aprendizaje y la aplicación de las matemáticas en el contexto educativo.

Análisis y resumen de artículos de investigación o innovación

La primera parte de la evaluación consistió en el resumen y análisis crítico de artículos de investigación o innovación relacionados con la temática de la asignatura, es decir, la resolución de problemas en la educación primaria. Cada estudiante seleccionó un artículo de revistas académicas o profesionales que presentaban estudios recientes o innovaciones metodológicas relacionadas con la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Este ejercicio tenía como objetivos:

- Desarrollar habilidades de comprensión y síntesis de información compleja.
- Fomentar la capacidad crítica para evaluar la relevancia y la aplicación de las investigaciones en su futura práctica docente.
- Enriquecer su conocimiento sobre las tendencias actuales y efectivas en la enseñanza de las matemáticas.

Resolución de problemas

La segunda parte de la evaluación implicaba la resolución de un conjunto de 15 problemas matemáticos diferentes, diseñados específicamente para cada uno de los estudiantes matriculados en la asignatura. Los problemas abarcaban una amplia gama de tipos y niveles de dificultad, incluidos de lógica y estadística, asegurando que cada estudiante enfrentara desafíos únicos y apropiados a su nivel de habilidad.

Criterios de evaluación:

- Claridad en la presentación de soluciones manuscritas.
- Profundidad en la explicación de los pasos y razonamientos utilizados.
- Correctitud de las soluciones propuestas.
- Creatividad y originalidad en los métodos de resolución.

Esta actividad evaluó la habilidad del estudiante para aplicar los conceptos aprendidos en clase en la resolución de problemas prácticos y su capacidad para comunicar procesos matemáticos complejos de manera clara y precisa.

Proyecto de implementación en el aula

La última parte de la evaluación consistió en un proyecto donde los estudiantes debían diseñar y presentar oralmente una propuesta de implementación de los problemas matemáticos estudiados en un contexto educativo real. Esta propuesta

podía tomar la forma de una unidad didáctica, una situación de aprendizaje específica o un proyecto integrado.

Aspectos clave de la evaluación:

- Innovación y creatividad en el diseño de actividades didácticas.
- Viabilidad y coherencia de la propuesta con los principios pedagógicos modernos.
- Capacidad para integrar los problemas matemáticos en el currículo de primaria de manera efectiva.
- Habilidades de comunicación durante la presentación oral.

Este componente buscó evaluar la capacidad del estudiante para transferir y aplicar los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos a situaciones de enseñanza reales, demostrando un entendimiento profundo tanto de las matemáticas como de su didáctica.

Resultados de docencia

Dado que a fecha de abril de 2024 aún no hemos acabado ni la docencia ni la evaluación, no tenemos resultados definitivos del desarrollo de la materia. Por lo que se espera tener dichos datos en las Jornadas de Santander.

Algunos datos relevantes que sí podemos adelantar es que el número de matriculados ha sido de 10 alumnos, y la mayoría provienen de Bachillerato de Ciencias de la salud o Científico-tecnológico.

Referencias

Castro Rodríguez, E., & Montoro Medina, A. B. (2021). Educación STEM y formación del profesorado de Primaria en España. *Revista de educación*.

Concurso de Primavera de Matemáticas. (s. f.). Concurso de Primavera de Matemáticas. Recuperado de https://www.concursoprimavera.es/#concurso

Jiménez, P. M., Ferreras, J. M. A., & Díaz, A. S. (2022). Estado de la educación STEM en la educación primaria en Europa y España: una visión desde la URJC.

In *Formándonos para educar: aportaciones en investigación e innovación educativa* (pp. 101-112). Thomson Reuters Aranzadi.

Martínez-Artero, R. N., & Checa, A. N. (2017). Ansiedad, motivación y confianza hacia las Matemáticas en futuros maestros de Primaria. *NÚMEROS*, *95*.

Mendías, J. S., Alex, I. S., & Espigares, A. M. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación de profesorado*, *15*(3), 297-312.

Nolla, Á., Muñoz, R., Cerisola, A., & Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica.

Urdiain, I. E. (2006). Matemáticas resolución de problemas. *Navarra: Fondo de publicaciones del gobierno de Navarra*.

No es Álgebra todo lo que reluce: Una experiencia con alumnos de formación inicial de maestros

Susana Villar Sanjurjo
svillar@villanueva.edu
Universidad Villanueva. Madrid

Núcleo temático: Formación del Profesorado. Procesos

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Universidad

RESUMEN

La educación matemática reflexiona constantemente acerca de la idoneidad de las metodologías de resolución de problemas y las herramientas de cálculo.

En la actualidad encontramos abundante bibliografía acerca de la resolución de operaciones, contraponiendo los algoritmos tradicionales u opacos y los provenientes de metodologías alternativas o transparentes.

Esta comunicación refiere una experiencia llevada a cabo con tres grupos diferentes de alumnos de Formación Inicial de Maestros de la Universidad Villanueva de Madrid.

Se recogen datos que revelan como la formación en diferentes metodologías conducen a la flexibilidad procedimental. Esta experiencia se analiza en un momento determinado de la Formación inicial, pero sin duda busca aportar a la flexibilidad didáctica de los futuros maestros cuando trabajen con alumnos diversos, desde el punto de vista cognitivo, psicológico, afectivo, y social.

Palabras clave: *Formación Inicial de Maestros, algoritmos de cálculo, representación, resolución de problemas.*

1. Introducción

La génesis de esta experiencia se remonta a julio de 2017, durante la celebración en Madrid del IV CIBEM. La profesora Rosa Nortes presentó en dicho Congreso un trabajo titulado “Un problema de Bachillerato resuelto en Primaria”.

Dicho trabajo suscitó la necesidad de continuar experimentando sobre las estrategias utilizadas por alumnos de diferentes edades y etapas en la resolución de problemas de matemáticas. Analizar, de alguna manera, si un alumno de cursos superiores, con un conocimiento de herramientas matemáticas más formales y avanzadas, es capaz de resolver ese mismo problema aplicando diferentes esquemas -que podríamos denominar “menos formales” desde el punto de vista de su formulación matemática- e incorporar la representación, la modelización, y otras estrategias utilizadas en etapas previas.

Nuestro trabajo, al igual que el anteriormente citado, es el resultado de una experiencia de asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en Formación Inicial de Maestros. Concretamente en nuestro caso, se trata de alumnos de 2º y 3º del Grado de Educación Primaria y los Dobles Grados de Educación Primaria y Educación Infantil y Psicología y Educación Primaria de la Universidad Villanueva de Madrid.

A partir de una consulta de una compañera de la SMPM “Emma Castelnuovo”, maestra de Educación Primaria acerca de la estrategia utilizada por una alumna de 5º de Educación Primaria, surgió la oportunidad de replicar el planteamiento del problema a alumnos de Formación Inicial de Maestros y estudiar diferentes caminos de resolución. Parte de dichos alumnos (los de tercer curso) han recibido formación en diferentes metodologías para la resolución de operaciones aritméticas y conocen el esquema C-P-A desarrollado por Jerome Brunner.

2. Marco teórico

Referentes legislativos

El RD 157/2022 enumera y describe las competencias específicas del área de Matemáticas en Educación Primaria; dichas competencias podemos agruparlas en

torno a cinco grandes bloques: resolución de problemas, conexiones, razonamiento y prueba, comunicación y representación y destreza socioafectiva.

El profesorado debe afrontar una serie de retos que le cualifiquen para realizar su labor:

“para que esta forma de trabajo genere verdaderos aprendizajes, el profesorado debe asumir el papel de facilitador y guía, proporcionando al alumnado las condiciones, pautas, estrategias y materiales didácticos que favorezcan el desarrollo de estas destrezas”.

El Ministerio de Universidades trabaja en una propuesta de verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de maestro. En dicho proyecto se recogen los principales objetivos formativos del Título, entre ellos “Aprender fundamentos científicos (conocimientos y comprensión de la profesión docente, evaluación)” y las competencias asociadas al mismo:

- “Conoce la asignatura en profundidad y los temas relevantes que se están enseñando.
- Conoce los diferentes enfoques metodológicos, sabiendo cuál utilizar en situaciones específicas y con alumnado específico.
- Planifica el proceso de enseñanza aprendizaje utilizando una amplia variedad de recursos y enfoques.
- Crea, diseña y adapta materiales didácticos en distintos formatos con criterios de calidad pedagógica” (Ministerio de Universidades, 2023)

La Formación Inicial de los Maestros de Educación Primaria debe cooperar a la adquisición de dichas competencias.

En la enseñanza de las matemáticas intervienen no solamente los conocimientos de los contenidos escolares (saberes básicos), sino el reconocimiento de los contextos que dotan de sentido a dichos contenidos, así como los procedimientos que llevan a la representación, al desarrollo de estrategias y la argumentación, entre otros (Carrillo et al., 2016, p.1). Asimismo, la selección de recursos y el conocimiento profundo de

la investigación en metodologías y didáctica hacen de un maestro un profesional eficiente, dispuesto a servir a la comunidad educativa. Mª Antònia Canals en su discurso en la recepción del Premio Sánchez Vázquez enuncia “Cada maestro o maestra ha de conocer unas técnicas y utilizarlas según su propia inspiración, con una gran capacidad no de obedecer, sino de crear, siguiendo el camino de cada niño” (Biniés, 2008: 84).

Resolución de problemas.

Un problema es una “situación nueva cuya resolución necesita una combinación original de saberes y métodos, mucha creatividad y la utilización de razonamientos plausibles” (Callejo, 1994: 15)

Guzmán (1991) afirma que un problema parte de la necesidad de llegar de una situación a otra, más o menos delimitada con claridad, pero sin conocer el camino.

Siguiendo a Callejo (1994) y a Biniés (2008) diferenciamos un ejercicio de aplicación de determinados saberes (problema tradicional según Canals) de un problema (problema verdadero). Si bien, los problemas verdaderos exigen el conocimiento de estrategias heurísticas variadas, los problemas tradicionales, una vez organizada la información, se resuelven por caminos establecidos, muchos de ellos de carácter algorítmico.

Un algoritmo se entiende como una secuencia lineal de acciones que deben ser ejecutadas para conseguir un determinado fin.

Asimismo, un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza –sin indeterminación ni ambigüedades- en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos. Un algoritmo no resuelve un problema único, sino que es extrapolable a todos los problemas de una clase determinada. (Martinez Montero, 2000:38)

Enfoque C-P-A de Jerome Bruner.

Como se recoge en el trabajo de Angulo (2019) citando a Arancibia (1997), Bruner, describe el aprendizaje como el proceso de “reordenar o transformar los datos de modo que permitan ir más allá de ellos, hacia una comprensión o insight nuevos”.

Con respecto a la estructura y forma del conocimiento, Bruner sugiere, en su teoría de la instrucción, tres etapas en que se representa el conocimiento:

Representación Enactiva o Concreta: en la que las operaciones se presentan con material físico susceptible de ejercer sobre él acciones manipulativas.

Representación Icónica o Pictórica: en la que el conocimiento es representado a través de un conjunto de imágenes o gráficos que explican un concepto, representándose las operaciones mediante dibujos.

Representación Simbólica o Abstracta: el conocimiento matemático se expresa a través de proposiciones lógicas o simbólicas; el lenguaje matemático es formal.

La etapa simbólica es la parte más complicada, ya que requiere de un nivel de pensamiento más alto y es por lo que, el conocimiento matemático se da de manera progresiva. "Por ejemplo, para impulsar la idea de una resta, conviene representarla a través de un cambio, como podría ser agrupar globos y reventar algunos", señala (Ban Har, 2010 en Angulo, 2019.)

El enfoque Concreto, Pictórico y abstracto (CPA), promueve el desarrollo del pensamiento matemático donde los alumnos, para aprender, van progresando de lo concreto a lo pictórico para finalmente lograr representaciones abstractas, permitiendo conectar el conocimiento de los niños con las vivencias de su contexto, lo que permitirá que tenga una mayor capacidad para analizar y plantear soluciones.

3. Diseño de la experiencia

3.1. Objetivos

La finalidad de este estudio es analizar la flexibilidad procedimental de alumnos de Formación Inicial de Maestros a la hora de resolver un problema de aritmética de 5º de Educación Primaria tras haber recibido formación en varias metodologías para resolver operaciones.

A este objetivo principal hemos añadido un análisis comparativo con alumnos que no han recibido esa formación previa.

Otro de los objetivos es estudiar las diferentes estrategias y propuestas de los alumnos.

Hipótesis: los alumnos de Formación Inicial de Maestros utilizan estrategias de resolución propias de su formación escolar más reciente (Secundaria y Bachillerato), en concreto álgebra, para resolver problemas de Educación Primaria.

3.2. Desarrollo:

Población:

En la experiencia han intervenido 3 grupos de alumnos de Formación Inicial.

- Alumnos de 3º del Grado de Maestro de educación Primaria y Doble Grado de Educación Primaria y Educación Infantil. 37 alumnos matriculados. Designamos a este grupo de alumnos como A300.

- Alumnos de 3º del Doble Grado de Psicología y Educación Primaria. 24 alumnos matriculados. Designamos a este grupo de alumnos como A400.

- Alumnos de 2º del Grado de Maestro de educación Primaria, Doble Grado de Educación Primaria y Educación Infantil y Doble Grado de Psicología y Educación Primaria. 46 alumnos matriculados. Designamos a este grupo de alumnos como A200.

A los alumnos matriculados en Matemáticas y su Didáctica II (A300 y A400), los hemos diferenciado ya que, aunque cursan la misma asignatura, lo hacen en grupos separados. La docente es la misma en ambos grupos.

El grupo A200 cursan conjuntamente la asignatura Fundamentos y didáctica de las Matemáticas alumnos los alumnos descritos anteriormente. La docente es diferente a la que imparte Matemáticas y su Didáctica II.

Muestra:

El muestreo que se ha llevado a cabo es no aleatorio. La prueba se ha pasado durante un módulo de clase a aquellos alumnos presentes ese día en clase y que libremente quisieron participar. No tenían conocimiento previo de esa prueba y su realización no es relevante para la evaluación.

- A200: participan 39 alumnos.
- A300: participan 25 alumnos. Han cursado una asignatura anterior de Matemáticas y su didáctica I en el curso 2022/23.
- A400: participan 14 alumnos. Han cursado una asignatura anterior de Matemáticas y su didáctica I en el curso 2022/23.

3.3. Metodología

Se plantea el siguiente problema de 5º de Primaria

Resuelve el siguiente problema:

Javier tiene una colección de 148 cromos y Alejandra tiene solamente 76 cromos. ¿Cuántos cromos tiene que dar Javier a Alejandra para que los dos tengan el mismo número de cromos?

Los alumnos deben atender a las siguientes tareas:

1. Resolver el problema espontáneamente, como lo harían con su edad actual y sin tener en cuenta la formación específica en Didáctica de la Matemática.

2. Una vez resuelto, deben buscar alternativas de resolución, sin condicionantes. Se invita a que hagan todas las propuestas que se les ocurran.

La actividad se lleva a cabo de manera separada en los tres grupos en el marco de sus horas de clase y el tiempo que dedican es de un máximo de 20 minutos.

- A400: 13 de marzo de 2024
- A300: 3 de abril de 2024
- A200: 9 de abril de 2024

Se corrigen las resoluciones y se analizan de manera separada la Resolución 1 ("espontánea") y las otras propuestas.

Categorías de los métodos de resolución:

- Aritmética: operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división.
- Álgebra
- Pictórico: utilización de representaciones, gráficos…
    - No hemos podido introducir una categoría de material manipulativo, ya que el trabajo se presenta por escrito; sin embargo, como se verá más adelante, hay propuestas en las que se utiliza.
- Abstracto: utilización de lenguaje y simbología matemática, más allá de las operaciones elementales. Por ejemplo, factorización.
- Otros. Incluimos en esta categoría el uso de ensayo y error, resolución por compensación, sin referencias gráficas, etc.

Dentro de la categoría de aritmética se hace un análisis comparativo de los caminos de resolución:

- Resta-División (R/D)
- Suma-División-Resta (S/D/R)
- División-Resta (D/R)

3.4. Modelos de resolución

J tiene 148 cromos y A tiene 76 cromos.

Con operaciones elementales:

Resta-División
Determinar la diferencia del número de cromos: 148-76=72 Dividir la diferencia entre 2: 72:2=36 36 es el número de cromos que debe dar Javier a Alejandra para que tengan la misma cantidad. Finalmente, Javier tendrá 148-36=112 y Alejandra 76+36=112
Suma-División-Resta
Determinamos el número total de cromos: 148+76=224 Calculamos la mitad del total, ya que es el número de cromos con los que debe terminar cada uno. 224:2=112. Restamos 148-112=36 cromos debe darle Javier a Alejandra.
División-Resta
Dividimos la cantidad de cada persona entre dos: 148:2=74 y 76:2=38 Restamos ambas cantidades obteniendo el número de cromos que entregará Javier a Alejandra. 74-38=36.

Con lenguaje algebraico:

Sea ***x*** el número de cromos que debe dar Javier a Alejandra.

Después de la entrega tienen el mismo número de cromos:

$$148 - x = 76 + x$$

$$148 - 76 = x + x$$

$$72 = 2x$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

Javier debe dar a Alejandra 36 cromos.

3.5. Análisis de resultados

Para la Resolución 1, se ha identificado el modo de resolución, el número de problemas resueltos correctamente y el uso de alguna forma de representación.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Resolución 1							
Grupos	**A400**		**A300**		**A200**		**Global**
Número de alumnos	**14**		**25**		**39**		**78**
Operaciones elementales	11	78,6%	24	96%	36	92,3%	91%
Álgebra	3	21,4%	0	0%	2	5,1%	6,4%
Otros (recta numérica / compensación)	0	0%	1	4%	1	2,6%	2,6%
Resolución correcta	14	100%	18	72%	36	92%	
Representación gráfica	0	0%	1	4%	0	0%	

Tabla 1 Elaboración propia

Excepto un alumno que utiliza la recta numérica y otro que va haciendo "compensaciones sucesivas", las resoluciones aplican cálculos o álgebra. De todos los alumnos solamente el que utiliza la recta numérica, representa en esta primera respuesta.

A continuación, analizamos otras resoluciones de los alumnos.

Alternativas				
Grupos	A400	A300	A200	Global
Número de alumnos	14	25	39	78
Número de resoluciones alternativas:	31	26	49	106
Media de soluciones alternativas por alumno	2,26	1,04	1,26	1,36
Número de alumnos que no hacen ninguna propuesta	1	5	8	14
	7,1%	20%	20,5%	18%

Tabla 2 Elaboración propia

Combinamos el análisis de ambas partes, estableciendo pares:

(Método de resolución espontánea,Método de resolución alternativo)

Elaboramos las siguientes categorías:

(cálculo,cálculo); (cálculo,álgebra); (cálculo,abstracto); (cálculo,pictórico); (álgebra,cálculo); (álgebra,pictórico); (álgebra,abstracto); (pictórico,nada).

Grupos	A400	A300	A200
Número de alumnos	14	25	39

(Cálculo,Cálculo)	2 de 24	7 de 26	16 de 42
(Cálculo,Álgebra)	7 de 24	2 de 26	9 de 42
(Cálculo,Abstracto)	1 de 24	2 de 26	10 de 42
(Cálculo,Pictórico)	14 de 24	15 de 26	7 de 42
(Álgebra,Cálculo)	3 de 7		2 de 4
(Álgebra,Pictórico)	4 de 7		1 de 4
(Álgebra,Abstracto)			1 de 4
(Pictórico,Nada)		1 de 1	

Tabla 3 Elaboración propia

Los alumnos que resuelven a través de operaciones elementales, con independencia del momento de la resolución, optan por los siguientes métodos:

Cálculo	S/D/R	R/D	D/R
A400	9	6	
A300	14	13	
A200	23	25	3
	46	**44**	**3**

Tabla 4 Elaboración propia

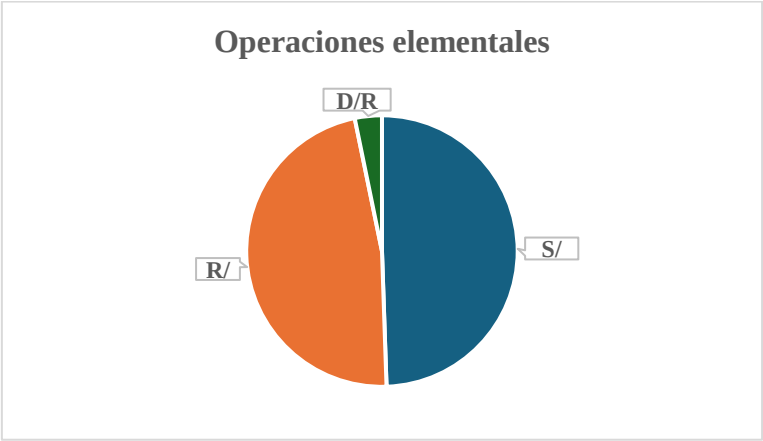


Ilustración 21 Elaboración propia

Los datos que pueden aportar luces al objetivo de nuestra investigación son las diferentes alternativas que utilizan representaciones, ya que en ellas se podrá verificar la eficacia de la formación recibida por los grupos A300 y A400 en diferentes metodologías de resolución de situaciones problemáticas en los cursos de Educación Primaria.

Representaciones icónicas elegidas por los alumnos, incluyendo aquellas que hacen referencia a materiales manipulativos.

Número de resoluciones alternativas que utilizan representaciones:

A400		A300		A200	
18 de 31	58,1%	16 de 26	61,5%	8 de 49	16,3%

Tabla 5 Elaboración propia

	A400	A300	A200
Modelo de barras / Números conectados (Singapur)	6	2	0
Bloques Multibase de Dienes	4	3	0
Rejillas ABN	1	2	0
OAOA (similar)	2	3	0
Recta numérica	3	6	0
Regletas	1	0	0
Sin clasificar /(diagramas, flechas…)	1	0	0
Cuadros / Bloques	0	0	8
	18	16	8

Tabla 6 Elaboración propia

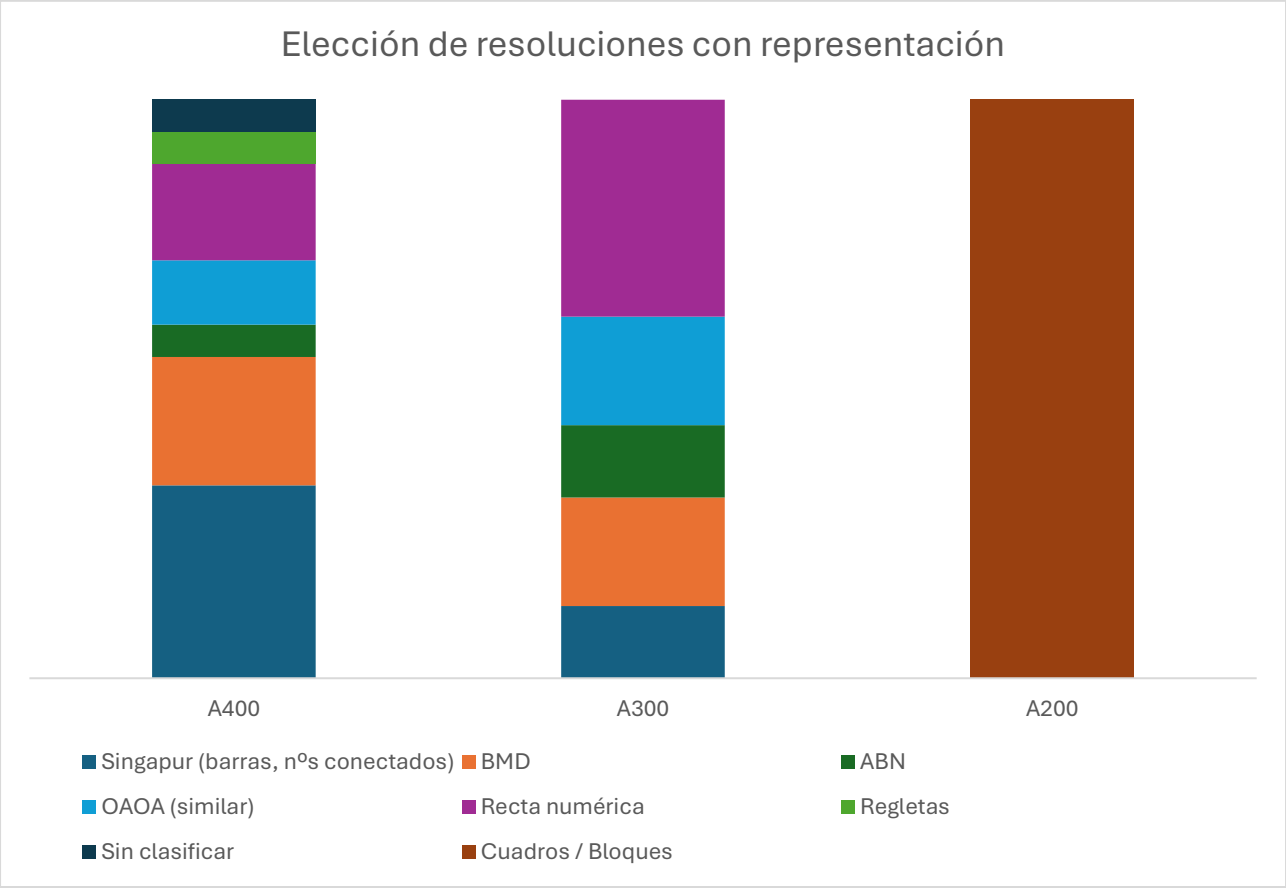


Ilustración 22 Elaboración propia

4. Conclusiones

1. El recurso al álgebra no es el procedimiento elegido por los alumnos al enfrentarse a la resolución de esta tarea. Solamente 6,4% lo elige como primera estrategia y un 17% entre las estrategias alternativas. Por lo tanto, no se cumple nuestra hipótesis de que una resolución con lenguaje algebraico sería la primera opción de los alumnos.

2. El cálculo elemental es el procedimiento preferido por los alumnos, igualándose prácticamente los que optan por restar y dividir y los que suman, dividen y restan.

3. De los 26 alumnos considerados en la categoría (cálculo,cálculo), 23 de ellos usan los procedimientos recíprocos: en la resolución 1 suman, dividen y restan y en la alternativa restan y dividen, o viceversa.

4. Los alumnos sin formación en metodologías alternativas que utilizan representación, solamente lo hacen utilizando cuadrados y haciendo partes en ellos.

5. Los grupos A300 y A400 aplican diferentes modelos representativos (y materiales manipulativos) a la hora de resolver el ejercicio.

Se concluye por tanto que la formación en diferentes estrategias de resolución de situaciones de cálculo en contexto de problemas es eficaz y ha sido asimilada por los Alumnos de Formación Inicial que componen la muestra (grupos A300 y A400), como se planteaba en el objetivo principal de la investigación: analizar la flexibilidad procedimental de alumnos de Formación Inicial de Maestros a la hora de resolver un problema de aritmética de 5º de Educación Primaria tras haber recibido formación en varias metodologías para resolver operaciones.

Llama la atención que cuatro de los alumnos del grupo A200, recurren a la factorización y la búsqueda de MCM y MCD, sin llegar a ningún resultado. Conjeturamos queesos alumnos han podido compartir esta idea.

Resultados comparativos de los grupos A300 y A400:

Ambos grupos han recibido el mismo contenido en la asignatura Matemáticas y su didáctica II y han realizado las mismas actividades.

El grupo A400 está formado por alumnos que cursan el Doble Grado de Psicología y Educación Primaria, mientras que el grupo A300 está formado por alumnos del Grado de Educación Primaria y el Doble Grado de Educación Primeria y Educación Infantil.

Una primera diferencia entre ambos grupos es que el A300 está fundamentalmente orientado al aula y han realizado 12 semanas de prácticas en Centros Escolares; sin embargo, el grupo A400 no ha realizado todavía prácticas en aula y el peso mayor en

su plan de estudios es de asignaturas de psicología, cerrando gran parte de sus estudios de Magisterio en el 5º curso. Este último grupo no ha definido todavía su orientación profesional (maestros o psicólogos).

El grupo A400 hace una media de 2,26 propuestas alternativas por alumno, mientras que la media del grupo A300 es de 1,04.

Sin embargo, dentro de las resoluciones, el 58% de las del grupo A400 recurren a la representación, mientras que en el grupo A300 lo hacen el 61,5% de las propuestas.

En el grupo A400 aparecen 7 categorías en las propuestas que usan representaciones, mientras que en el A300 son 5.

En el grupo A400 las representaciones más utilizadas usan elementos del método Singapur, como el modelo de barras (en este caso parte-todo) y en algún caso los números conectados; en el grupo A300 el recurso más veces propuesto es la recta numérica: en estos casos hay varias propuestas de compensación avanzando desde un extremo y retrocediendo desde el otro, hasta llegar a igualar las cantidades.

	A400	A300
Media de propuestas alternativas	2,26	1,04
Propuestas con representación	58%	61,5%
Recurso más veces propuesto	Singapur: barras y números conectados	Recta numérica

Tabla 7. Elaboración propia

5. Referencias

- Angulo Alfaro, M. L. (2019) *Aplicación de Estrategias del Enfoque CPA y de Resolución de Problemas para Resolver Situaciones Problemáticas sobre Equivalencias en los Alumnos del Segundo Grado de Primaria de la IEN º 3065 Virgen del Carmen-Comas*. (Recuperado de https://lc.cx/gK3_tv)
- Arancibia, V., Herrera, P. Strasser, K. (1997). *Manual de psicología educacional*, 6ta Edición. Ediciones Universidad Católica de Chile
- Callejo, M.L. (1994) *Un club matemático para la diversidad*. Madrid. Narcea.
- Carrillo, J. et al. (2016) *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Paraninfo.
- De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Madrid: Labor.
- Martínez Montero, J. (2000) *Una nueva Didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Madrid: CISS Praxis.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE de 2 de marzo de 2022*. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. *Real Decreto 476/2013, de 21 de junio, por el que se regulan las condiciones de cualificación y formación que deben poseer los maestros de los centros privados de Educación Infantil y de Educación Primaria*. BOE de 13 de julio de 2013. https://www.boe.es/eli/es/rd/2013/06/21/476
- Ministerio de Universidades (2023) *Proyecto de Orden UNI/XXX/2023, de XX de X, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestra/o en Educación Primaria.* https://www.universidades.gob.es/wp-content/uploads/2023/02/AIP13_Proyecto-Orden-Educacion-Primaria.pdf

Un proyecto APS: Creación de cuentos para el aprendizaje de las Matemáticas con usuarios con discapacidad visual

Beatriz Sánchez-Barbero
beatrizsanchezb@usal.es
Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las CCEE, Universidad de Salamanca

Mª José Cáceres García
majocac@usal.es
Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las CCEE, Universidad de Salamanca

Araceli Queiruga-Dios
queirugadios@usal.es
Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca

Ángel Mª Martín-Del Rey
delrey@usal.es
Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca

Núcleo temático: formación del profesorado; inclusión

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universidad

RESUMEN

Los Proyectos de Aprendizaje-Servicio brindan a los estudiantes oportunidades durante su formación para que desarrollen competencias y habilidades, concretamente durante su formación como docentes en el área de las matemáticas. Los estudiantes tienen la necesidad de vincular necesidades personales y sociales, aplicando así los conocimientos matemáticos a través de la práctica. Los alumnos con discapacidad visual suelen encontrarse con dificultades para un acceso de calidad a la educación matemática, privándoles así de oportunidades. Pensando en la inclusión educativa, se desarrolló un Proyecto en el área de las matemáticas cuyo objetivo fue

el de elaborar cuentos matemáticos adaptados a alumnos con discapacidad visual. Los resultados objetivos resaltan la importancia de la creación y uso de material manipulativo para facilitar la comprensión matemática necesaria, así como para aumentar la motivación y la confianza de los usuarios.

Palabras clave: Proyecto de Aprendizaje-Servicio, formación de docentes en matemáticas, discapacidad visual, atención a la diversidad

1. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas es de gran importancia pues dota a las personas de herramientas necesarias para poder ser autónomos en sociedad. Si se centra en el aprendizaje de las matemáticas en alumnos con Discapacidad Visual (en adelante DV), se observa cómo los alumnos tienen dificultades al acceso de la información puesto que en esta materia la vía de información llega de forma visual (Carrillo et al., 2021), lo que provoca, entre otras cuestiones, presencia de riesgo de exclusión

(González y Sánchez, 2019)

1.1 ¿Qué es un Proyecto de Aprendizaje-Servicio?

Los Proyectos de Aprendizaje-Servicio (en adelante ApS) representan una forma de aprendizaje práctico que se lleva a cabo dentro del marco de la educación formal, y surgen de una filosofía pedagógica con un enfoque social. Esta metodología no solo enriquece la comprensión de conceptos y conocimientos teóricos a través de la práctica educativa, sino que también fomenta la reflexión sobre la experiencia personal, promoviendo así la responsabilidad cívica y social (Bringle y Hatcher, 1999). Además, se ha demostrado que los ApS aportan beneficios significativos a todos los participantes (Salam et al., 2019), destacándose como una modalidad distintiva de aprendizaje experimental en comparación con otros enfoques (Figura 1; Furco, 1996).

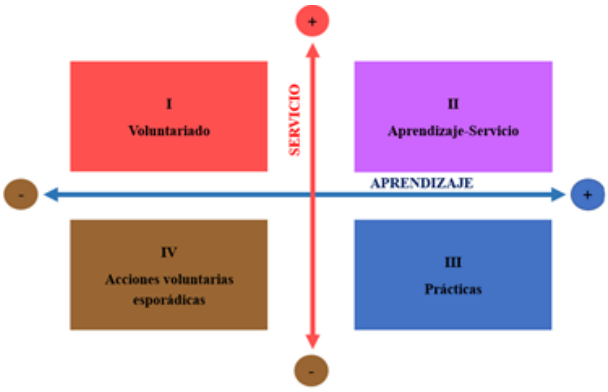


Figura 1. Diferencias entre Aprendizaje-Servicio y otros aprendizajes experimentales

Además, dado que los Proyectos ApS constituyen una herramienta para fomentar el compromiso y la conciencia social, su implementación puede contribuir al logro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (en adelante ODS).

1.2 Aprendizaje de las matemáticas en personas con Discapacidad Visual

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2022), la DV es una afección ocular que afecta al sistema visual y a sus funciones. Su origen puede deberse a diferentes causas y se caracteriza por una ausencia de visión, total o parcial, teniendo en cuenta la agudeza visual, el campo de visión, la sensibilidad al contraste y la visión de los colores. Parte de la comprensión matemática se basa en la abstracción (Llamazares y Arias, 2022), lo que implica una mayor dificultad para llegar a dicha abstracción por parte de los alumnos con DV.

El Real Real Decreto 95/2022 de 1 de febrero de 2022 (B.O.E. 02-02-2022) y el Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo de 2022 (B.O.E. 02-03-2022) por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil y Primaria, respectivamente, apuntan que, para conseguir un desarrollo pleno en cuento a la competencia matemática, se ha de poner especial atención a la manipulación de objetos. Además, estos mismos Reales Decretos, incorporan todos los aspectos

relativos a la inclusión en el aula, por lo que se debe dar una educación de calidad a todos los alumnos que se tienen en las aulas.

Si unimos todo esto a que para interiorizar un contenido o concepto matemático se debe comenzar con una fase de manipulación desde lo concreto (Bruner, 1966) donde los manipulativos sirvan de un apoyo y acercamiento a la realidad, quizás es necesario formar a los futuros docentes en la elaboración y adaptación de materiales manipulativos para la enseñanza de las matemáticas a personas con DV. Además, en muchas ocasiones no tienen conocimientos didácticos de las matemáticas, por lo que se limitan en las aulas a la repetición y automatización, creyendo así que los alumnos interiorizan mejor las matemáticas, lejos de la realidad (Fernández y Sahuquillo, 2015).

2. Presentación del Proyecto

Los pilares fundamentales de este proyecto que se reflejan en los planes de formación docente son la inclusión educativa y el aprendizaje de las matemáticas. Respecto a la inclusión educativa, se observa cómo alumnos con discapacidad visual se enfrentan a dificultades para acceder a programas de educación matemática de calidad, donde poder desarrollar capacidades, habilidades y competencias para su futuro, lo que repercute negativamente en su desarrollo cognitivo y adaptativo. Respecto al aprendizaje de las matemáticas, se considera conveniente integrar las matemáticas cotidianas en el proceso de aprendizaje, lo que implica la incorporación de situaciones y problemas relevantes y significativos para los alumnos que estén directamente relacionados con su vida diaria. Así, los estudiantes pueden comprender de manera más efectiva los conceptos y contenidos matemáticos y aplicarlos a situaciones prácticas (González et al., 2019).

Si aunamos estos dos pilares, existen otras posibles estrategias que pueden contribuir a fomentar la inclusión educativa en la educación matemática, como podría ser la adaptación del currículo y de los materiales de enseñanza y aprendizaje para satisfacer las necesidades individuales de cada alumno. Asimismo, el empleo o el

apoyo de otros recursos tecnológicos como programas de lectura de pantalla, software de matemáticas accesibles, entre otros, pueden resultar beneficioso (Moreno y Cantoral, 2021).

2.1 Justificación

Si bien el objetivo principal de este Proyecto ApS es el de formar a futuros docentes en el área de matemáticas y apoyar su aprendizaje mediante prácticas de enseñanza directas, desde un enfoque inclusivo, la justificación de este proyecto se orienta hacia tres colectivos:

- Formadores de docentes: los docentes deben ser formados para ser capaces de impartir una educación de calidad con los desafíos educativos a los que se van a enfrentar, como puede ser la enseñanza de conceptos y competencias matemáticas en un aula donde conviven diversas capacidades, características o necesidades.
- Estudiantes para docente: en ocasiones tienen dificultades para vincular los conocimientos adquiridos en una asignatura con los impartidos en otra. Concretamente, suelen percibir la asignatura de Atención a la Diversidad como aislada del resto.
- Entidades que trabajan con usuarios con discapacidad: los profesionales que trabajan en las entidades son especialistas en las dificultades o discapacidades de sus usuarios, pero no siempre lo son de la didáctica de las matemáticas.

2.2 Fases del Proyecto

El proyecto se divide en 5 fases cada una de las cuales albergan su objetivo y las tareas para la consecución de este (Tabla 1).

	OBJETIVOS	TAREAS QUE REALIZAR
Fase Transversal	1. Integrar los ODS en la formación inicial de maestros y profesores	1.1. Concienciación del ODS 3 “Salud y Bienestar”: garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades 1.2. Concienciación del ODS 4 “Educación de Calidad”: garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos 1.3. Concienciación del ODS 8 “Trabajo decente y crecimiento económico”: promover el crecimiento económico inclusivo y sostenible, el empleo y el trabajo decente para todos 1.4. Concienciación del ODS 10 “Reducción de las desigualdades”: reducir las desigualdades
Fase Introductoria	2. Conocer las características y necesidades que tienen los alumnos y usuarios con DV	2.1. Asistencia a entidades con especialistas en el ámbito de la DV para poder crear vínculos de trabajo y formarnos de manera apropiada 2.2. Conocimiento, mediante la información que ofrezcan los trabajadores de los centros, las características y las necesidades de los usuarios de las entidades en las que vamos a implementar las sesiones, talleres y materiales 2.3. Revisión bibliográfica sobre la DV vinculada al área de las matemáticas
Fase de Diseño	3. Diseñar sesiones formativas, talleres y materiales a partir de las recomendaciones de para el aprendizaje de las matemáticas de alumnos con DV	3.1. Elaboración de materiales de las sesiones formativas orientadas a los futuros docentes y alumnos con DV
	4. Diseñar sesiones formativas, talleres y materiales a partir de las recomendaciones sobre cómo trabajar en el aprendizaje de las matemáticas que ayuden a los profesionales de centros educativos (reglados y no reglados)	4.1. Elaboración de materiales de las sesiones formativas orientadas al aprendizaje de las matemáticas para profesionales de centros educativos
Fase de Implementación	5. Implementar las sesiones, talleres y materiales para el aprendizaje de las matemáticas a usuarios con DV	5.1. Desarrollo de las sesiones formativas con futuros docentes 5.2. Desarrollo de las actividades, talleres y materiales relacionados con las matemáticas para alumnos con DV
	6. Implementar las sesiones formativas, talleres y materiales para el aprendizaje de las matemáticas con profesionales de centros educativos (reglados y no reglados)	6.1. Desarrollo de las sesiones formativas con profesionales de centros educativos 6.2. Desarrollo de las actividades, talleres y materiales relacionados con las matemáticas para profesionales del ámbito de la DV
Fase de Difusión	7. Difundir el proyecto	7.1. Asistencia a congresos, jornadas o ponencias para la difusión del proyecto 7.2. Divulgación del proyecto y sus resultados a través de artículos
	8. Elaborar un banco de recursos para el aprendizaje de las matemáticas con personas con DV	8.1. Creación de un espacio informativo en internet sobre el proyecto 8.2. Creación de un repositorio de materiales para el aprendizaje de las matemáticas con alumnos con DV

Tabla 1. Fases del Proyecto con objetivos y tareas que realizar

3. Experimentación parcial del Proyecto

A continuación, se muestra una parte del Proyecto ApS anteriormente explicado.

3.1. Objetivo

Esta parte del Proyecto de ApS tiene como objetivo elaborar cuentos matemáticos adaptados a alumnos con DV.

3.2. Contextualización

La experimentación se llevó a cabo con estudiantes de los Grados en Maestro en Educación Primaria (66 estudiantes) y del Doble Titulación de Grado en Maestro en Educación Primaria y en Maestro en Educación Infantil (16 estudiantes), en la Facultad de Ciencias de la Educación de Zamora, perteneciente a la Universidad de Salamanca, dentro de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I. Esta asignatura es la primera dedicada a Didáctica de las Matemáticas de los Planes de Formación de las carreras a las que pertenecen los estudiantes. En ella se trabaja números, operaciones, lógica y álgebra.

Puesto que esta experimentación parcial forma parte de un Proyecto ApS, tal y como se ha explicado anteriormente, la profesora y los estudiantes han trabajado a lo largo del curso con diferentes materiales y recursos matemáticos comercializados o elaborados por ellos mismos, para así familiarizarse. Además, ambas partes han tenido formación en el ámbito de la ceguera, bien por reuniones en la ONCE con especialistas del área, o por talleres en la Facultad de Ciencias de la Educación de Zamora con especialistas de didáctica de las matemáticas.

Se les facilitó a los estudiantes desde comienzo del curso información sobre el sistema braille, tanto el alfabeto como los números en braille (Figura 2), además de una página traductora para poder comprobar si lo que escribían al adaptar el material era correcto, siempre bajo la supervisión de profesionales

(*https://www.brailletranslator.org*).

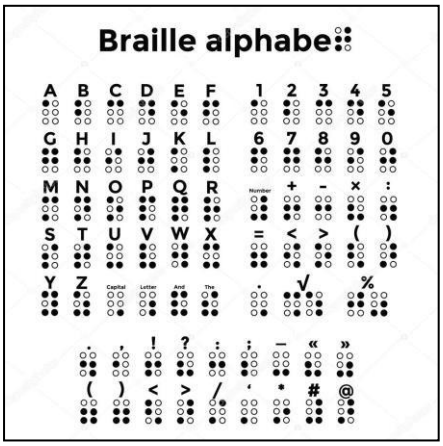


Figura 2. Alfabeto, numerología y signografía en braille

Además, los estudiantes contaban en el aula con regletas y punzones para la escritura en braille cuyo uso había sido explicado con anterioridad (Figura 3).

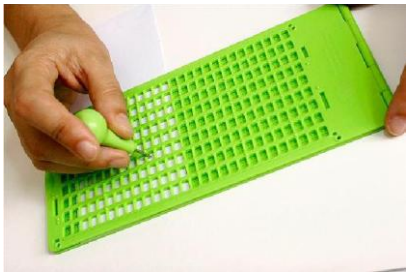


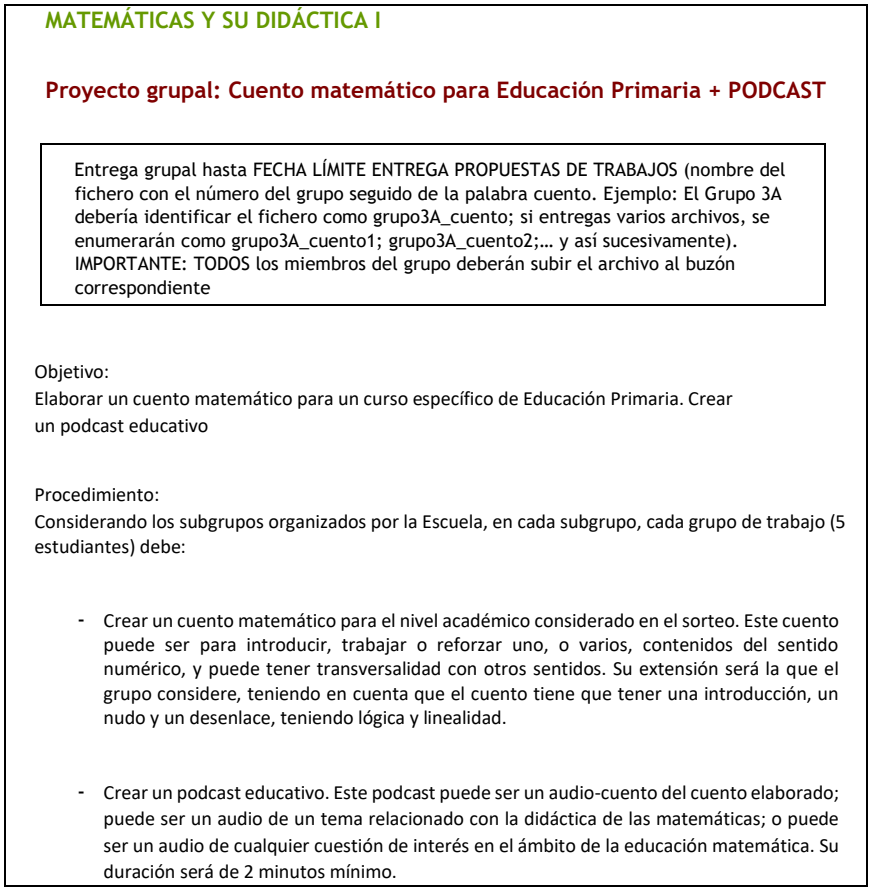
Figura 3. Regleta (positiva) para la escritura en braill

3.3. Planteamiento

La elaboración de este material es parte de uno de los trabajos que a los estudiantes se les solicita como evaluación de la asignatura. A principio del curso, se les muestra a los estudiantes los trabajos que deberán presentar para superar la asignatura (a parte del examen).

Uno de estos trabajos es, en grupos de 5 personas, elaborar un cuento matemático para un curso específico de Educación Primaria (el curso es por sorteo), y elaborar un podcast de educación matemática con una duración mínima de 2 minutos (Figura 4). Es importante decir que, puesto que la asignatura es Didáctica de las Matemáticas I, no se les exigió a los estudiantes la adaptación a alumnos con DV como criterio

para aprobar el trabajo, sino que fueron los propios estudiantes los que, de forma libre, consideraron adaptar el material.



MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA I

Proyecto grupal: Cuento matemático para Educación Primaria + PODCAST

Entrega grupal hasta FECHA LÍMITE ENTREGA PROPUESTAS DE TRABAJOS (nombre del fichero con el número del grupo seguido de la palabra cuento. Ejemplo: El Grupo 3A debería identificar el fichero como grupo3A_cuento; si entregas varios archivos, se enumerarán como grupo3A_cuento1; grupo3A_cuento2;… y así sucesivamente). IMPORTANTE: TODOS los miembros del grupo deberán subir el archivo al buzón correspondiente

Objetivo:
Elaborar un cuento matemático para un curso específico de Educación Primaria. Crear un podcast educativo

Procedimiento:
Considerando los subgrupos organizados por la Escuela, en cada subgrupo, cada grupo de trabajo (5 estudiantes) debe:

- Crear un cuento matemático para el nivel académico considerado en el sorteo. Este cuento puede ser para introducir, trabajar o reforzar uno, o varios, contenidos del sentido numérico, y puede tener transversalidad con otros sentidos. Su extensión será la que el grupo considere, teniendo en cuenta que el cuento tiene que tener una introducción, un nudo y un desenlace, teniendo lógica y linealidad.

- Crear un podcast educativo. Este podcast puede ser un audio-cuento del cuento elaborado; puede ser un audio de un tema relacionado con la didáctica de las matemáticas; o puede ser un audio de cualquier cuestión de interés en el ámbito de la educación matemática. Su duración será de 2 minutos mínimo.

Figura 4. Trabajo solicitado a los estudiantes

Una vez corregidos los cuentos para la asignatura, y por parte de especialistas de la ONCE, se depositarán en las instalaciones de la entidad para que los alumnos que acuden a estas puedan beneficiarse de ellos.

4. Algunos cuentos de la experimentación

A continuación, se muestran algunos de los cuentos adaptados al braille elaborados por los estudiantes para maestro.

Cuento 1: “Hasta el infinito y más allá”

Es un cuento matemático cuyo texto está adaptado al braille en el propio cuento, con actividades a lo largo de este también adaptadas (Figura 5).

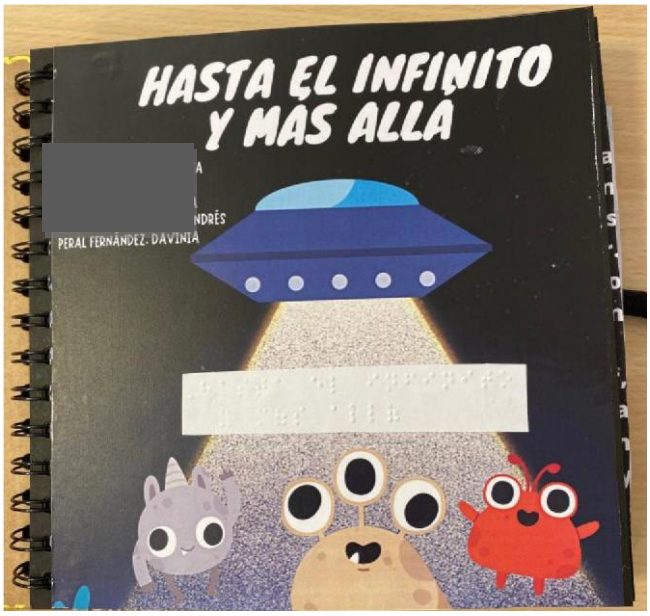


Figura 5. Cuento matemático adaptado al braille

Cuento 2: “Andy y el Sistema Solar”

Es un cuento matemático sensorial o sensitivo (Figura 6).

Figura 6. Cuento matemático sensorial

Estaba adaptado de forma manipulativa y, para posibilitar la lectura a los alumnos con DV, realizaron una adaptación de forma independiente al finalizar el cuento (Figura 7).

Figura 7. Adaptación del cuento matemático al braille

Cuento 3: “Un viaje a Mate”

En este caso el cuento matemático aúna la parte sensorial y la parte adaptada en braille en el propio cuento, con actividades a lo largo de este también adaptadas (Figura 8).

Figura 8. Cuento matemático sensorial y adaptado al braille

5. Consideraciones finales

El objetivo de esta parte del Proyecto ApS era elaborar cuentos matemáticos adaptados a alumnos con DV. La forma de trabajo permitió a los estudiantes para maestros a adquirir competencias, habilidades y prácticas que no hubieran logrado en otro contexto. Además, permitirá a los usuarios de la ONCE poder disfrutar y utilizar el material adaptado.

Fue curioso observar cómo al principio de la intervención los estudiantes para maestros carecían de experiencia tanto para utilizar las regletas como para pensar en la creación de un cuento para trabajar con alumnos con DV. Sin embargo, progresivamente fueron adquiriendo habilidades prácticas, motivación y gusto por lo que estaban haciendo.

Se resalta la importancia de crear cuentos vinculados con aspectos de interés y conexiones con la vida cotidiana (González et al., 2021), el uso y creación de materiales manipulativos (Rodríguez et al., 2022) y una buena coordinación y trabajo en equipo entre los profesionales implicados (Arroyo et al., 2020).

Una implicación educativa clase es cómo el desarrollo de estos Proyectos fomenta la retroalimentación entre los participantes, la creatividad y la sensibilización. En el futuro sería beneficioso continuar profundizando en esta discapacidad o trabajar en otras como ya se ha hecho previamente (Discapacidad Intelectual). Una vez se implementen, sería interesante observar los errores o deficiencias que puedan tener los cuentos o el material, para así mejorarlos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto ADiDoMa (2023/39) financiado por la Universidad de Salamanca, del Proyecto GIRLS (2022-1-ES01KA220-HED-000089166) financiado por el programa Erasmus+ y respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa de la Universidad de Salamanca)

Referencias

Arroyo, M. J., Pinedo, R. e Iglesia, M. de la (2020). Coordinación docente e interdisciplinariedad para la adquisición de competencias en el Grado de Educación Primaria e Infantil: Percepciones de alumnado y profesorado. *Tendencias Pedagógicas,* 35, 2020, pp.102-117.

Bringle, R. G. y Hatcher, J. A. (1999). Reflection in service-learning: Making meaning or experience. *Educational horizons*, *23,* 179-185.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Harvard University Press.

Carrillo, C., López, J. I., Hernández, I. y García, R. M. (2021). Barreras en el aprendizaje de las matemáticas de personas con discapacidad visual: el caso de un estudiante de ingeniería de software. *Manaus, (15)*, 29, 22-35.

Fernández, R. y Sahuquillo, A. (2015). Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual. *Edma 0-6: Educación*

Matemática en la Infancia, 4(1), 11-23. https://www.edma0-6.es/index.php/edma06/article/view/136

Furco, A. (1996). Service-learning: A balanced approach to experiential education. En B. Taylor (Ed.), *Expanding boundaries: Service and learning* (pp.2-6). Corporation for National Service.

González, C. L. y Sánchez, C. N. (2019). Enseñanza de las matemáticas a estudiantes con diagnóstico de discapacidad intelectual leve. *Poiésis*, *37*, 83-103. https://doi.org/10.21501/16920945.3331Howard, S., San, C., Salas, N., Blanco, P. M. y Diaz, C. J. (2018). Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual. *Revista Colombiana de Educación*, *74*, 197-219. *https://doi.org/10.17227/rce.num74-6906*

González, I., Benvenuto, G. y Lanciano , N. (2021). Dificultades de Aprendizaje en Matemática en los niveles iniciales: Investigación y formación en la escuela italiana.

Psychology, Society & Education, *9*(1), 135-145. https://doi.org/10.21071/psye.v9i1.13857

Llamazares, J. E. y Arias, A. R. (2022). Enseñanza de las matemáticas en invidentes desde la revisión sistemática. *Perfiles Educativos, XI.IV*(176), 169-184.

Moreno Segura, R. A. y Cantoral Uriza, R. A. (2021). Estudiantes con discapacidad visual: el discurso matemático escolar y la doble exclusión. RAES, 13(22), pp. 169179.

Organización Mundial de la Salud. (2022, febrero). *ICD-11 for mortality and morbidity statistics*. https://bit.ly/3z2e4Bb

Salam, M., Awang, D. N., Ibrahim, D. H. A. y Farooq, M. S. (2019). Service-learning in higher education: A systematic literature review. *Asia Pacific Education Review*, *20*(4), 573-593. http://dx.doi.org/10.1007/s12564-019-09580-6

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del*

Estado, 28, de 2 de febrero de 2022. https://https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del*

Estado, 52, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A2022-3296.

Rodríguez, M.M., Sánchez-Barbero, B. y Monterrubio, M.C. (2022). Recursos didácticos para el aula de matemáticas. En A. Lorenzo J. Blanco Nieto, Nuria Climent Rodríguez, María Teresa González Astudillo, Antonio Moreno Verdejo,

Gloria Sánchez-Matamoros García, Carlos de Castro Hernández y Clara Jiménez

Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 425-452). Editorial Universidad de Granada.

Actividades de modelización matemática en un proyecto de impresión 3D y rutas matemáticas

Leyre Gilardi[1]
leyre.gilardi@estudiante.uam.es
Álvaro Nolla[1]
alvaro.nolla@uam.es
Angélica Benito[1]
angelica.benito@uam.es
Ariadna Gómezescobar[1]
ariadna.gomezescobar@uam.es
[1]*Universidad Autónoma de Madrid*

Núcleo temático: Formación de profesorado, Conexiones

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universidad. Educación Primaria

RESUMEN

En este trabajo se presentan dos experiencias de modelización matemática realizadas con estudiantes de un máster de innovación didáctica. En ellas se desarrollaron un proyecto de modelización e impresión 3D de “Comidas típicas del mundo” y la creación de una ruta matemática que se llevó a cabo con alumnado del último ciclo de Educación Primaria a través de un aprendizaje-servicio. Las positivas valoraciones tanto del estudiantado de máster como de alumnado de Primaria, y el trabajo matemático que promovieron en ambos, refuerzan la línea que aboga por la inclusión de este tipo de actividades en la formación del profesorado.

Palabras clave: *Modelización matemática, impresión 3D, rutas matemáticas, aprendizaje-servicio*.

Introducción

La modelización matemática es un proceso que permite conectar las matemáticas y el mundo que nos rodea, aplicar e inventar matemáticas para resolver problemas (Drijvers et al., 2019). Se configura como una competencia matemática que se desarrolla a través de la creación de modelos matemáticos que permiten explicar fenómenos de la vida real (Niss, 2002). Esta interrelación entre el mundo matemático y el mundo real se puede describir a partir del modelo de Blum y Leiß (2007) por medio del denominado *ciclo de modelización* (ver Figura 1).

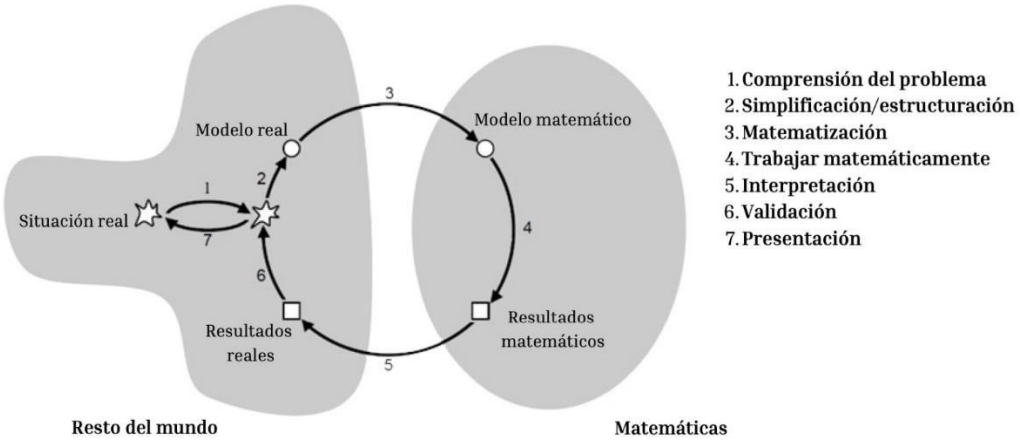


Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007).

El modelo consta de 7 pasos. El proceso comienza con una situación o problema real que para resolverse es necesaria una *comprensión* y una *simplificación* de la situación para establecer un modelo real del problema. Este modelo se traduce al mundo matemático a través de la *matematización.* A partir del *trabajo matemático* (cálculos, razonamiento, resolución de ecuaciones, etc.) se obtendrán unos resultados matemáticos que pueden ser *interpretados* y *validados* en el mundo real. Este proceso es cíclico, ya que la validación de estos resultados determinará si se ha llegado al resultado deseado, concluyendo con la *presentación* de esos resultados, o se debe reformular el modelo y comenzar otra vuelta (Blum y Ferri, 2009; Blum, 2015).

En este trabajo se centra en dos ejemplos de actividades que desarrollan habilidades de modelización matemática, la modelización e impresión 3D y las rutas matemáticas,

que se pusieron en práctica con estudiantado de un máster en innovación didáctica siguiendo la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

Las actividades de *modelización e impresión 3D* proponen al alumnado un problema real que tienen que resolver a partir de la creación de prototipos o modelos tridimensionales con herramientas de diseño 3D que pueden ser replicados y validados gracias al uso de la impresión 3D. Este tipo de proyectos están considerados como herramientas de gran potencial educativo que mejoran tanto la participación como la motivación en el proceso de aprendizaje, especialmente en el ámbito de la educación STEAM (Anđić et al., 2023; Hass et al., 2023).

Desde el punto de vista matemático, son actividades que fomentan la visualización y el razonamiento espacial de los estudiantes a través del uso de *sofwares CAD* de diseño asistido por ordenador (Medina Herrera et al., 2019; Ferrarello et al., 2019). Permiten a los estudiantes trabajar de manera colaborativa, combinar la teoría con la práctica y a los docentes les proporciona una herramienta para diseñar materiales manipulativos (Ford y Minshall, 2018). Además, el proceso de validación de los modelos con los objetos reales permite que los estudiantes puedan autoevaluar sus propios resultados (Anđić et al., 2023).

Por otro lado, las actividades de rutas matemáticas representan un enfoque educativo que traslada la enseñanza de las matemáticas fuera del aula. Se pueden describir como recorridos para “descubrir matemáticas”, a lo largo de prácticamente cualquier lugar (calle, edificio, parque, museo, ...), con paradas marcadas en donde los participantes formulan, discuten y resuelven interesantes problemas de matemáticas (Shoaf et al., 2004).

Las rutas matemáticas se relacionan con los ciclos de modelización descritos en la Figura 1 ya que se plantean tareas y problemas matemáticos con objetos reales, que los estudiantes deben de resolver a partir de matematización e interpretación dentro de un modelo matemático. Deberán trabajar matemáticamente para obtener una solución, que será interpretada y validada con respecto a la realidad (Hartmann y Schujaklow, 2021; Jablonski, 2023). Estas rutas ofrecen la oportunidad de difundir y

apreciar las matemáticas en una gran variedad de contextos (Navas, 2019) y la inclusión de dispositivos móviles está abriendo nuevas posibilidades y utilidades a este tipo de rutas (Jablonski et al., 2020; Botana et al., 2020).

Por último, queremos remarcar la necesidad de promover programas de formación docente que incluyan actividades y proyectos STEAM que mejoren el conocimiento sobre este enfoque y entreguen las herramientas necesarias para implementarlo en el aula (Silva-Hormazábal y Alsina, 2023). En particular, y relacionado con el presente trabajo, diversos autores sostienen que tanto las actividades de modelización e impresión 3D como la experimentación y creación de rutas matemáticas representan actividades enriquecedoras para los futuros profesores de matemáticas (Hass et al., 2021; Martínez-Jiménez, et al., 2022).

Este estudio presenta una experiencia de modelización matemática llevada a cabo durante el curso 2023/2024 en el Máster Universitario de Innovación en Didácticas Específicas (MUIDE) de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM). En la primera actividad el estudiantado realizó un proyecto de modelización e impresión 3D con ayuda del *software* TinkerCad, y en la segunda los estudiantes vivenciaron y crearon una ruta matemática en donde estudiantes incorporaron elementos de modelización e impresión 3D.

Además, la ruta matemática creada se puso en práctica con un colegio de 5º de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid a través de la implementación del Aprendizaje-Servicio (ApS). Esta metodología activa permite que el aprendizaje adquirido en un entorno educativo se ponga en servicio para la sociedad ante una necesidad previamente detectada (Tapia, 2006). En este marco, el estudiantado universitario experimentó con actividades de modelización e impresión 3D y rutas matemáticas para realizar implementaciones dirigidas a estudiantes de Educación Primaria. Además, estas actividades fueron ofertadas a centros denominados como de “especial dificultad”, cuyas familias a menudo no se pueden permitir subvencionar salidas escolares. Desde el proyecto en el cual se enmarcan estas actividades, “Universid-ApS: simbiosis universidad-centros educativos mediante

AprendizajeServicio", se financia el transporte del centro escolar al campus universitario donde tienen lugar las actividades.

Descripción del proyecto de innovación

En el proyecto se llevaron a cabo dos actividades en paralelo durante 5 semanas en la asignatura “El uso del espacio en Didáctica de las Matemáticas”. Fue realizado por 13 estudiantes universitarios, 11 de ellos eran graduados en Educación Infantil y/o Primaria y los otros 2 sin formación en Educación. Ninguno de los participantes tenía experiencia previa con las herramientas 3D que se introdujeron en el proyecto ni conocían las rutas matemáticas. En la experiencia de aprendizaje-servicio de rutas matemáticas participaron 16 estudiantes de 5º curso de Educación Primaria.

A continuación, se explican las distintas fases que tuvieron las dos actividades de modelización matemática que se realizaron dentro del proyecto.

Actividad de modelización e impresión 3D

A los estudiantes se les planteó realizar un proyecto de modelización a su elección, donde debían elegir de forma conjunta un espacio/objeto real para replicarlo en 3D. Todos los espacios/objetos seleccionados debían tener una clara relación entre ellos, así como guardar la proporción.

Dada la internacionalidad de los estudiantes eligieron realizar un proyecto único llamado “Comidas del mundo” en donde cada estudiante eligió recrear una comida típica de su región o país para poder reflejar y compartir las distintas costumbres representadas en el grupo.

El objetivo buscado era que el alumnado aprendiera a manejar la herramienta de Tinkercad y que realizara ciclos de modelización (Figura 1) a lo largo de la actividad: elección del objeto y obtención de sus medidas reales, diseño del modelo 3D, impresión 3D, validación del modelo, re-diseño del modelo 3D, re-impresión 3D, revalidación, etc., a partir del modelo de Blum y Leiß (2007). El proceso quedó

reflejado en un documento que incluía el desarrollo llevado a cabo y los elementos matemáticos contenidos en sus diseños 3D.

A lo largo de las sesiones el alumnado tuvo una constante experimentación y conocimiento tanto del *software* TinkerCad como del proceso de impresión 3D (diseño 3D, fase de laminado e impresión).

La mayor parte del tiempo los alumnos trabajaron de manera autónoma en sus modelos y cuando terminaban un modelo se imprimía y se procedía a su validación. Se considera que un modelo ha completado un ciclo de modelización cuando el alumno obtiene el objeto 3D impreso y puede por tanto llevar a cabo su validación con el objeto real de partida y con el resto de los objetos del proyecto.

A lo largo del curso se destinaron 4 de las sesiones para resolver dudas, corregir errores de modelado frecuentes y para reorganizar el tamaño y la escala de las figuras para que el proyecto general tuviera coherencia. Se terminó mostrando todos los objetos en una exposición final.

Actividad de rutas matemáticas

De manera paralela a las actividades de modelización e impresión 3D, los alumnos desarrollaron un proyecto de rutas matemáticas. Se buscaba enseñar a los futuros maestros esta herramienta de enseñanza y aprendizaje de matemáticas fuera de aula mediante un proceso de experimentación, creación y puesta en práctica.

El proyecto se desarrolló en las siguientes etapas:

Experimentación y creación de una ruta matemática. El alumnado “vivenció” una ruta matemática prediseñada en el Campus de la UAM utilizando sus dispositivos móviles y la aplicación MathCityMap (ver Figura 2). Después de “vivir” una ruta y conocer este recurso de primera mano, los futuros maestros/as se separaron en grupos y diseñaron rutas por el campus de la UAM para un nivel inferior a 5º de Educación Primaria.

Figura 2. Estudiantes del MUIDE durante la ruta por la UAM.

Revisión por pares de las rutas. En esta etapa el estudiantado realizó las rutas creadas por el resto del grupo y evaluaron cada tarea y ruta por medio de una rúbrica.

Una vez evaluadas, se seleccionaron las actividades mejor valoradas, creando una única ruta y se revisaron una a una las tareas en base a la evaluación por pares realizada. De esta forma se consiguió crear en MathCityMap la ruta final y se imprimió el dossier de mano generado por la plataforma que luego se empleó en la puesta en práctica con el alumnado de primaria.

Aprendizaje-Servicio. Esta última etapa es la que conecta el proceso de aprendizaje de los futuros maestros/as con su futuro profesional. Se busca enriquecer sus propuestas con un servicio a su comunidad. Para ello, la ruta que crearon se puso a prueba con un grupo de 5º de Primaria de un centro escolar que acudió a la UAM.

Resultados de la actividad de modelización e impresión 3D

En la Figura 3 se muestran algunos de los proyectos elegidos por los alumnos, como elementos vinícolas de Castilla y León, una humita chilena y un espeto malagueño.

Figura 3. Productos finales del proyecto de impresión 3D.

Además de elegir una comida típica de su región, los estudiantes elaboraron distintos elementos para su presentación final. Por ejemplo, la alumna que eligió hacer los

productos vinícolas realizó una botella de vino, una copa de vino, un sacacorchos y un racimo de uvas.

Dentro del proceso de modelización se empezó con la selección del objeto real y la toma de medidas reales en que basarían su modelo. Realizaron unas simplificaciones iniciales muy restrictivas dado que tampoco estaban muy familiarizados con el *software*. A partir de la realización de los ciclos de modelización, estas simplificaciones fueron reduciéndose y cada vez consiguieron objetos más cercanos al objeto inicial.

Figura 4. Proceso de modelización de la botella de vino.

Por ejemplo, en la Figura 4 se muestra el proceso llevado a cabo para realizar la botella de vino. En un primer momento se eligieron figuras muy sencillas, únicamente conos y cilindros, no considerando la inclusión de letras en la etiqueta u otros detalles que aparecieron en el último objeto creado.

La impresión 3D del objeto permite la validación del modelo obtenido. En este momento se verifica su semejanza con el objeto real y se plantean cambios a realizar o bien para que se asemeje más al objeto real o para corregir errores. Por ejemplo, en la Figura 4 se muestra en el caso de la botella la primera impresión realizada utilizando un cono truncado. En la siguiente iteración se sustituyó por una semiesfera, la cual generaba un borde más liso y una semejanza mayor al objeto real. Finalmente, tras un ciclo más de modelización, se añadieron letras a modo etiqueta para darle el remate final intersecando el texto con un cilindro más ancho que el del cuerpo de la botella para obtener la curvatura deseada.

En la Figura 5 se puede ver una simplificación del esquema de ciclo de modelización seguido por la estudiante que realizó la botella de vino.

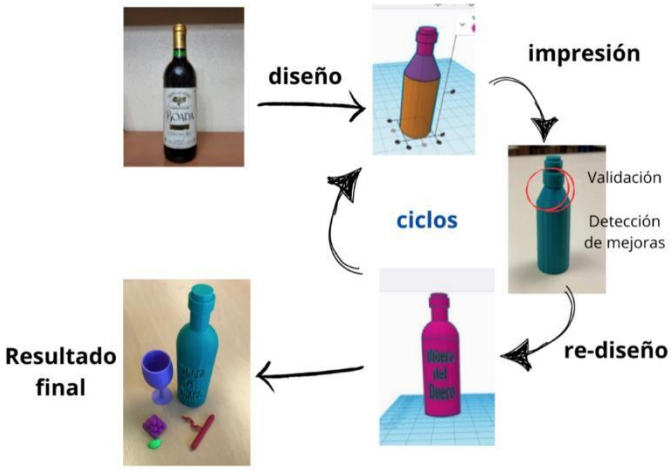


Figura 5. Ciclo de modelización realizado para obtener la botella de vino.

Cabe destacar que algunos de los estudiantes no se conformaron con las impresiones tal y como salieron de la impresora, sino que quisieron darle un toque más realista pintando las piezas. En el caso de la estudiante que realizó el espeto, a través de la pintura obtuvo un resultado similar al del objeto real (Figura 5).

Figura 5. Proceso de pintado del espeto malagueño.

Durante la realización del proyecto de modelización e impresión 3D la participación de los estudiantes fue alta y, en general, los estudiantes estuvieron implicados. Aunque, al igual que se obtuvieron buenos resultados, hubo objetos que no salieron tan bien.

En la Tabla 1 se muestra la temática en la que trabajó cada estudiante, con el número de objetos que diseñó y la media de los ciclos de modelización realizados. La media de ciclos realizados por toda la clase fue de 2,4.

PROYECTO	Nº OBJETOS	CICLOS (MEDIA)
Humita chilena	6	2,5
Almogrote canario	3	2,7
Bocadillo de calamares	3	3
Empanada y emboque chilena	3	2
Postres chino	4	2,25
Cocido madrileño	6	2
Productos vinícolas del Duero	5	2
Chocolate con churros	4	2,5
Taco mexicano	4	2,25
Pintxo vasco	2	2
Bebidas canarias	2	3
Pincho chino	6	3
Espeto malagueño	6	2,2

Tabla 1. Resumen de los objetos y ciclos realizados por MUIDE.

Aunque este grupo de alumnos se enfrentaba por primera vez al uso de Tinkercad y a un proceso de diseño 3D, cabe resaltar la comunicación matemática desarrollada por los alumnos y las habilidades de razonamiento espacial que pusieron en funcionamiento. Por ejemplo, la estudiante que realizó la humita chilena utilizó una variada selección de objetos tridimensionales y operaciones de geometría constructiva (alineación, unión, diferencia, intersección) para realizar su modelo final: la curvatura del cordón que rodea la humita se realizó un prisma rectangular, que intersecó con otro más pequeño para poder obtener un marco. Para curvar las esquinas primero cortó un toro y lo intersecó con el marco, pero al no ser hueco por el centro no se obtuvo el resultado esperado. Finalmente, decidió utilizar una pieza llamada “tubo” de TinkerCad, que permitió realizar el corte de la forma deseada (ver Figura 6).

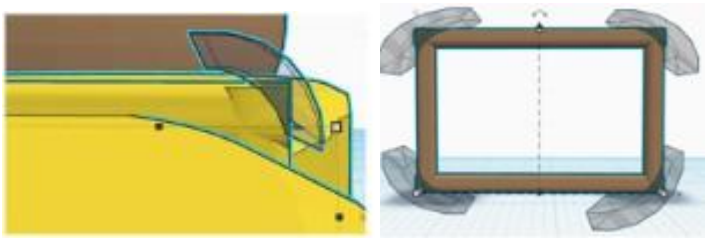


Figura 6. Proceso de curvatura del hilo de la cuerda.

Para conseguir los relieves que asemejaban la hoja de la humita real se intentaron realizar con muchos planos unidos, pero el resultado obtenido no fue el deseado

porque apenas se apreciaban los cortes al ser impreso. Así que, finalmente, se utilizó la “plancha de madera”, un modelo predefinido en TinkerCad que ya contaba con unos relieves propios que permitieron al intersecar ambas piezas obtener el resultado deseado (ver Figura 7).

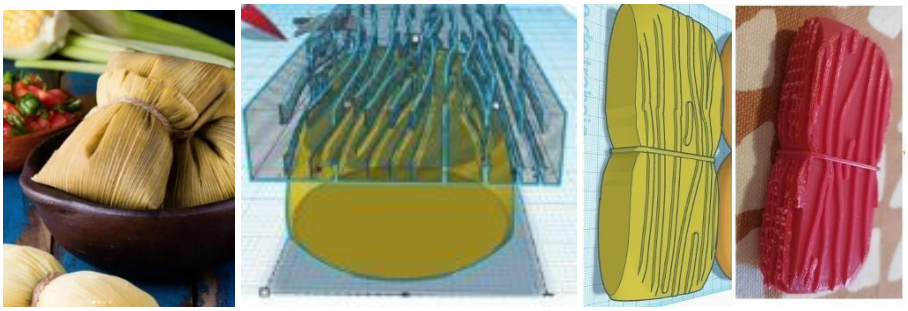


Figura 7. Imagen modelo de la humita real y proceso de relieve realizado para dar textura a la hoja de la humita.

Resultados de la Ruta Matemática

Los estudiantes de posgrado diseñaron una ruta matemática por el Campus de la UAM que fue puesta en práctica por alumnos de 5º de Primaria, implementando así la fase de aprendizaje-servicio.

La ruta se desarrolló con una temática pirata y aprovecharon los conocimientos que adquirieron con el de modelización e impresión 3D para diseñar en TinkerCad e imprimir medallas de pirata del tesoro final para los participantes. Ver Figura 8.

Figura 8. Creación de la medalla pirata para el cofre del tesoro los mapas realizados para la ruta.

La ruta final constaba de 10 pruebas separadas en diferentes temáticas: medida, geometría, cálculo y combinatoria.

Para el bloque de medida, una de las tareas pedía hallar la distancia a la que se encontraba el punto medio de una de las dos farolas (ver Figura 9 izquierda y centro). También se realizaron tareas de cálculo, como contar las mariposas situadas en las casillas que se tenían que tapar para que el resultado de multiplicar los números no tapados fuese 80 (Figura 9 derecha), y de combinatoria, como averiguar de cuántas formas diferentes podían subirse unos escalones sabiendo que solo podían subirse de 1 en 1 y de 2 en 2.

Figura 9. Alumnos de Educación Primaria realizando una tareas en la ruta matemática.

El bloque de geometría estuvo también muy presente en la ruta. Una de las tareas pedía determinar el patrón geométrico de una de las paredes de la Facultad para replicarlo usando lana en la barandilla (Figura 10 izquierda y centro). Otra tarea pedía a los alumnos que contaran el número de triángulos que había en una figura formada en el suelo (Figura 10 derecha).

Figura 10. Alumnos de Educación Primaria realizando actividades de geometría en la ruta matemática.

Los alumnos presentaron ciertas dificultades en la realización de algunas de las tareas. Algunos alumnos no tenían asimilado el concepto de área y mostraron

dificultades al usar la cinta métrica, en particular al medir distancias largas o no situando en ocasiones el 0 al inicio. La identificación de números grandes expresados con letra supuso otra dificultad. Pero, sin duda, la mayor dificultad fue el cálculo mental y escrito, pues presentaron muchos errores a la hora de hacer cálculos aparentemente sencillos, como dividir entre 2.

A pesar de estas dificultades, los estudiantes del máster acompañaron a todos los grupos y fueron capaces de utilizar recursos para guiarles de la mejor manera posible para que pudieran resolver el máximo número de tareas y disfrutasen del proceso. Aunque casi todos los grupos no hicieron todas las pruebas, se mostraron muy participativos, pidiendo extender el tiempo de la actividad y mostrando mucho interés en realizar tareas matemáticas fuera del aula.

Al finalizar la ruta se pasó un cuestionario al alumnado de Primaria que, en líneas generales, evidenció que la experiencia fue satisfactoria. En la pregunta *"¿Cuánto te ha gustado la ruta matemática?"* se obtuvo una media de 4 sobre 5 con una desviación típica de 0,73. En la pregunta *"¿En qué medida repetirías la experiencia?"* se obtuvo una media de 4,33 sobre 5 con una desviación típica de 1,15. Entre los comentarios recogidos sobre lo que aprendieron durante la realización de la ruta la mitad del grupo comentó temas relacionados con la medida con algunos comentarios como: *"Medir, porque no era tan buena, ahora lo entiendo un poco"*.

Con el estudiantado de máster se realizó una entrevista grupal al finalizar la implementación. Valoraron muy positivamente la experiencia completa (vivenciación+creación+servicio) y su aprendizaje, tanto de una nueva metodología como de una nueva herramienta, así como, aprender a sacar provecho de lugares simples para la creación de tareas matemáticas.

Respecto a las rutas consideraron que es una muy buena herramienta para trabajar matemáticas en el aula porque *"es una asignatura a la que se le suele tener tirria o genera ansiedad y esta herramienta permite que salgas, te muevas y hagas matemáticas de manera camuflada y huir del trabajo con el libro*". También mencionan que para llevarlas al aula hay que adecuarse correctamente al nivel de los estudiantes

redactando enunciados comprensibles y desafiantes, pero sin que supongan un reto demasiado grande como para generar mucha frustración.

Conclusiones

Las actividades de modelización e impresión 3D y las rutas matemáticas generaron un alto grado de participación e interés en el estudiantado máster. Consiguieron fomentar sus habilidades de modelización realizando ciclos para mejorar sus producciones. A pesar del escaso conocimiento y formación previa tanto en matemáticas como en las herramientas tecnológicas que se usaron, mostraron una notable evolución y un trabajo matemático destacable. Los buenos resultados obtenidos de la experiencia apoyan la pertinencia e idoneidad de incluir este tipo de actividades de modelización matemática en la formación del profesorado.

La inclusión del Aprendizaje-Servicio en el diseño del proyecto permitió al alumnado universitario obtener retroalimentación sobre la corrección de sus diseños y aprender a través de la implementación con alumnado real. Por otro lado, el alumnado de Educación Primaria pudo vivir una experiencia que de otra forma no lo habrían hecho dados sus limitados recursos.

Existen evidencias del papel fundamental que juegan los procesos y habilidades de visualización durante la creación de modelos 3D. La inclusión de actividades más guiadas y la reflexión sobre qué tipo de proyectos de modelización pueden fomentar un trabajo matemático más profundo surgen como líneas para considerar en futuras investigaciones.

Agradecimientos

Las dos acciones desarrolladas en este trabajo formaron parte del proyecto “UniversidApS: simbiosis universidad-centros educativos mediante Aprendizaje-Servicio” con referencia FCT-22-17979, subvencionado por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (Ministerio de Ciencia e Innovación).

Referencias

Anđić, B., Ulbrich, E., Dana-Picard, T., Cvjetićanin, S., Petrović, F., y Lavicza, Z. (2023). A Phenomenography Study of STEM Teachers' Conceptions of Using Three-Dimensional Modeling and Printing (3DMP) in Teaching. J. *Sci Educ. Technol., 32*, 45–60.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer International Publishing.

Blum, W., y Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics.* Chichester: Horwood , 222-231.

Botana, F., Kovács, Z., Martínez-Sevilla, A., y Recio, T. (2020). Augmented reality in mathematics education: The case of GeoGebra AR. In Prodromou (Ed.), *Augmented reality in educational settings* (pp. 347-368). Brill.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., y Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 435-456.

Ferrarello, D., Mammana, F., y Taranto, E. (2019). Dynamic Geometry Systems in Proving 3D Geometry Properties. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 27*(1), 19-27.

Ford, S., y Minshall, T. (2018). Where and how 3D printing is used in teaching and education. *Additive manufacturing 25,* 131-150.

Haas, B., Kreis, Y., y Lavicza, Z. (2021). Integrated STEAM approach in outdoor trails with elementary school pre-service teachers. Educational Technology & Society, 24(4), 205-219.

Haas, B., Lavicza, Z., Houghton, T., y Kreis, Y. (2023). Can you create? Visualising and modelling real-world mathematics with technology in STEAM educational settings. *Current opinion in Behavioral Sciences, 52*, 101297.

Hartmann, L.M., y Schukajlow, S. (2021). Interest and emotions while solving realworld problems inside and outside the classroom. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 153–163). Springer.

Jablonski, S. (2023). Is it all about the setting? A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educational Studies in Mathematics*, 113, 307-330.

Jablonski, S., Lázaro, C., Ludwig, M., y Recio, T. (2020). MathCityMap, paseos matemáticos a través de dispositivos móviles. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 87, 47-54.

Martínez-Jiménez, E., Nolla de Celis, Á., y Fernández-Ahumada, E. (2022). The city as a tool for steam education: problem-posing in the context of math trails. *Mathematics, 10*(16), 2995.

Medina Herrera, L., Castro Pérez, J., y Juárez Ordóñez, S. (2019). Developing spatial mathematical skills through 3D tools: augmented reality, virtual environments and 3D printing. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM),* 1-15.

Navas, J. (2019). Seminario federal: paseos matemáticos. *Suma*, 90, 119-125.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project.* Roskilde. Roskilde University.

Shoaf, M. M., Pollak, H., y Schneider, J. (2004). Math trails. *The Consortium for Mathematics and Itd Applications: COMAP*.

Silva-Hormazábal M., y Alsina Á. (2023). Exploring the Impact of Integrated STEAM Education in Early Childhood and Primary Education Teachers. *Education Sciences,* 13(8):842.

Tapia, N. (2006). *Aprendizaje y servicio solidario: algunos conceptos básicos*. Programa Nacional Educación Solidaria.

Píldoras de modelización en ingeniería

Joan-Vicenç Gómez i Urgellés
joan.vicenc.gomez@upc.edu
Universitat Politècnica de Catalunya

Núcleo temático: Procesos

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universidad (Ingeniería).

RESUMEN

En la formación de futuros ingenieros se presenta una experiencia docente realizada en la Universitat Politècnica de Catalunya basada en la modelización matemática. Para ello, en el binomio enseñanza/aprendizaje se incorporan las técnicas de trabajo en proyectos bajo el hilo conductor de STEAM como eje central de las sesiones.

La experiencia implementa el trabajo en proyectos y a su vez utiliza herramientas de uso común en la comunidad de estudiantes como son las redes sociales (principalmente Instagram, X) realizando también actividades en GeoGebra. Se muestra una pequeña "píldora" de algunas actividades ilustrativas con diversos ejemplos de utilidad para la comunidad educativa, así como de la importancia de incluir las técnicas de modelización en la Universidad para enriquecer el conocimiento y las producciones académicas de los alumnos. Finalmente se presentan los resultados de la experimentación a nivel cognitivo, heurístico y epistemológico destacando que la modelización matemática es una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas y una propuesta metodológica eficaz.

Palabras clave: modelización, matemáticas, educación, STEAM, Universidad

1. Preliminares

1.1 Introducción

La investigación sobre didáctica de las matemáticas en la enseñanza superior rara vez se lleva a cabo en disciplinas que no pertenecen al ámbito de las Ciencias de la Educación. En este caso se presenta una experiencia de enseñanza/aprendizaje a nivel universitario en el grado de ingeniería informática impartido en la Universitat Politècnica de Catalunya. La herramienta utilizada es la modelización matemática plasmada en la realización de proyectos contextualizados. La experiencia implementa el trabajo en grupo y a su vez utiliza herramientas de uso común en la comunidad de estudiantes como son las redes sociales (principalmente Instagram, X) realizando también las actividades en GeoGebra. Se muestra una pequeña “píldora” de algunas actividades, así como de la importancia de incluir técnicas de modelización en la Universidad para enriquecer el conocimiento y las producciones académicas de los alumnos.

1.2 La experiencia

El escenario se ubica en la Escuela Politécnica Superior de Ingeniería (EPSEVG) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) en el grado de informática en la asignatura de “Fonaments Matemàtics”. Los contenidos se han contextualizado en función de las necesidades de la titulación y de los elementos propios de las matemáticas plasmadas en la informática. Los conceptos se presentan combinando trabajo en proyectos y sesiones teóricas en el aula, dichos proyectos se realizan en grupo y son defendidos en presentaciones presenciales en el aula. El hilo conductor es el esquema tradicional de la modelización matemática (Niss, M. 2020) en el que a partir de una situación o un reto se construye o trabaja el concepto.

Imagen1. Esquema del proceso de modelización

Para concretar plasmaremos algunos ejemplos ilustrativos, realizados por los alumnos del trabajo realizado con el fin de analizar y valorar los aspectos cognitivos, heurísticos y epistemológicos de los estudiantes. Del mismo modo se recogen algunas intervenciones de los estudiantes con el objetivo de que quien tenga interés los pueda visualizar. Los proyectos realizados son una pequeña muestra de trabajo en proyectos contextualizados usando modelización matemática susceptibles de incorporar en las aulas de ingeniería. La contribución enriquece la comunicación presentada en las XXJaem de Valencia (Gómez, J. 2022)

2. Las píldoras: Ejemplos de modelización y trabajo en proyectos

2.1 Diferencia de matrices (autora Joanna Bruguera)

El proyecto tiene como objetivo presentar la diferencia de matrices como un modelo matemático utilizado en la comparación de imágenes en blanco y negro y observando las diferencias entre ellas. Para ello los estudiantes escanean un par de imágenes y obtienen la matriz numérica asociada a cada imagen usando los programas Octave o

Matlab, realizando la diferencia entre dichas matrices observan en la matriz resultante los valores en que aparece un cero y los que no (estos elementos serán los que las imágenes difieren). El proyecto incluye un tuit (actualmente la red X) en el que se añade el video de todo el proceso

https://twitter.com/FOMA_EPSEVG/status/1471071843830439943

Imagen2. Detalle del tuit de la matriz

y otro tuit informando de la dirección de Drive donde están almacenadas las correspondientes matrices de las imágenes en Excel y su deferéncia respectivamente:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1PYpywY0j3SeRNESVoY28omMdiXs9_DP-/edit#gid=51125863

https://twitter.com/FOMA_EPSEVG/status/1471071843830439943

Imagen3. Detalle del tuit con los enlaces de los archivos Excel

En la siguiente dirección se puede visualizar el video de todo el proceso *https://www.youtube.com/watch?v=P1ioOtpCq8A*

El proyecto se enriquece mencionando que las cámaras de seguridad realizan constantemente comparación de fotogramas consecutivos y que si no hay diferencias en la matriz numérica asociada a cada fotograma no es necesario almacenar las imágenes en la memoria del dispositivo. ¡Con ello los estudiantes aprecian la importancia de la diferencia de matrices incluso en las cámaras de seguridad!

2.2 Descodificación de una bomba (autores Edgard Noguera, Dídac Bruzos i Milena Znatnova)

Imagen 4. Portada del proyecto

El proyecto nace del reto de desactivar una hipotética bomba a partir de diferentes actividades plasmadas en un código QR realizado por un grupo de estudiantes, las cuales se proponen para resolver a los demás compañeros de clase. Destacamos que incluso realizaron un prototipo de la bomba con una impresora 3D.

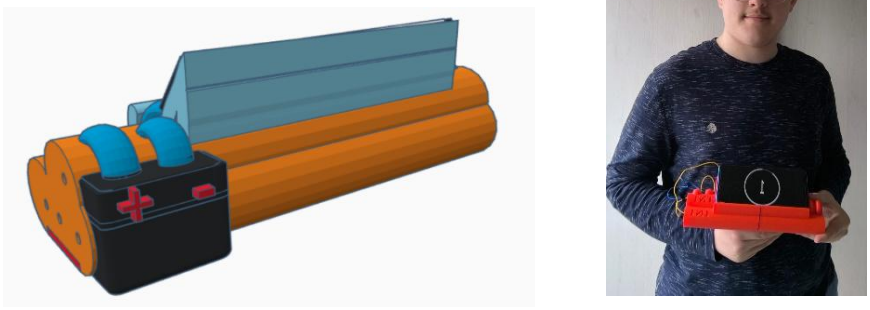


Imagen 5. Portada del proyecto

En una primera sesión, los componentes del grupo entregan el código QR a otros compañeros del aula para que en el plazo de una semana descubran la clave para desactivar el explosivo. En el código QR están las instrucciones que se articulan en torno al análisis de frecuencias, el código César y algo de aritmética modular. En este proyecto destaca la importancia del trabajo en grupo, el uso de material manipulable, competencias digitales (aplicativos web y hoja de cálculo) y la búsqueda de modelos matemáticos de criptografía para resolver situaciones contextualizadas entre otros aspectos.

Con todo ello, se consigue una participación activa del estudiantado y a su vez enriquecer las producciones académicas. A continuación, se muestra un resumen del proyecto realizado.

2.2.1 Enunciado de la situación:

Un grupo de terroristas de un país desconocido realiza un plan para establecer un ataque en Vilanova. Este atentado ha de ser ejecutado con una bomba de 100kT de fuerza que explotará exactamente en 6 días 16 horas y 4 minutos.

Tras interceptar el arma explosiva, las fuerzas especiales, han pasado una larga noche investigando y deciden que la mejor opción es confiar la labor a los mayores expertos en decodificación, ubicados en la capital del país. Para ello se han trasladado a Vilanova para poder observar el dispositivo. Para encontrar la clave para desactivar el explosivo la pista inicial es un código de QR para poder acceder al

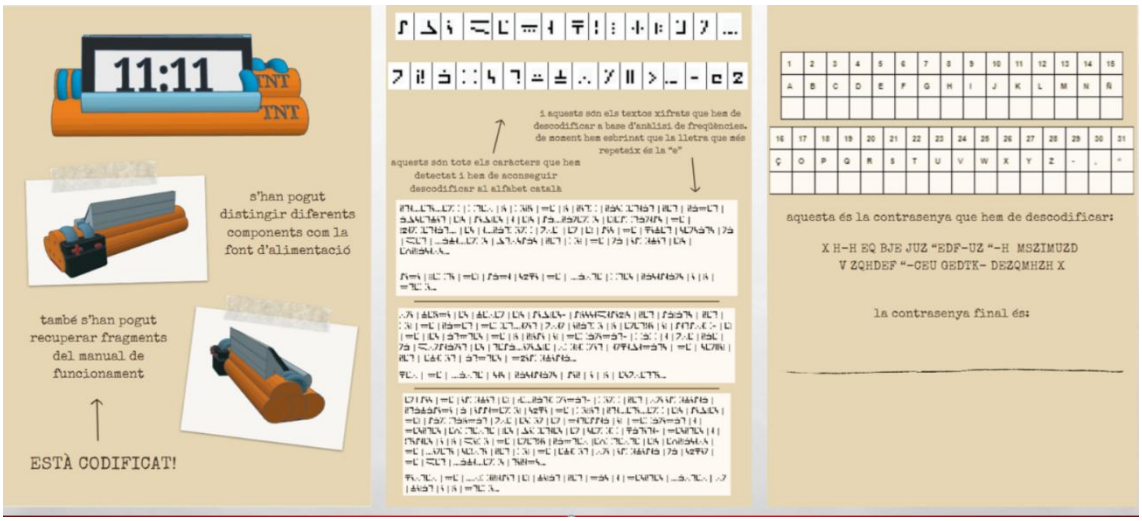
informe donde se ubican las instrucciones que facilitan la información para desactivar la bomba.

2.2.2 El código QR:

En dicho código aparecen las instrucciones que mostramos en las imágenes

Ubicación del código:

https://www.canva.com/design/DAF1viEtHjs/uDeO-K7EYzs3oF0-vGxA0g/view



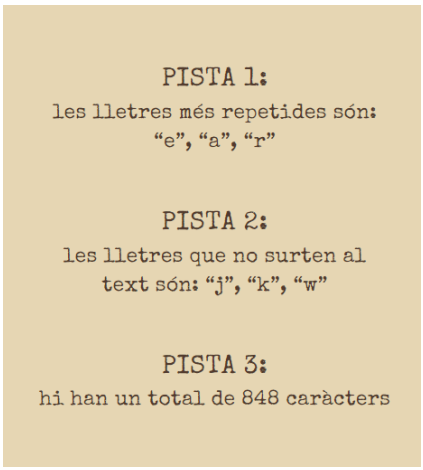


Imagen 6. Información que aparece al leer el código QR

Siguiendo las pistas indicadas se llega a la conclusión que la clave para desactivar el artefacto es la frase de Julius Verne "*tot el que una persona pot imaginar, altres poden fer-ho realitat*" (todo lo que una persona puede imaginar, otros pueden hacerlo realidad).

La exposición del trabajo se puede visualizar en:

https://www.youtube.com/watch?v=Mcph5bx9MxA

2.3 Construcción de un Teleférico (autor Alejandro Saiz)

En este proyecto el reto era construir un teleférico animado. Uno de los modelos matemáticos que descubre el estudiante son las matrices de desplazamientos. Los conceptos involucrados van desde ecuaciones de rectas hasta productos de matrices (en particular movimientos). En la realización del trabajo se utiliza el GeoGebra como

herramienta para plasmar los elementos y conceptos aprendidos y necesarios para la construcción animada del teleférico. En los aspectos cognitivos destaca el protagonismo de las TAC.

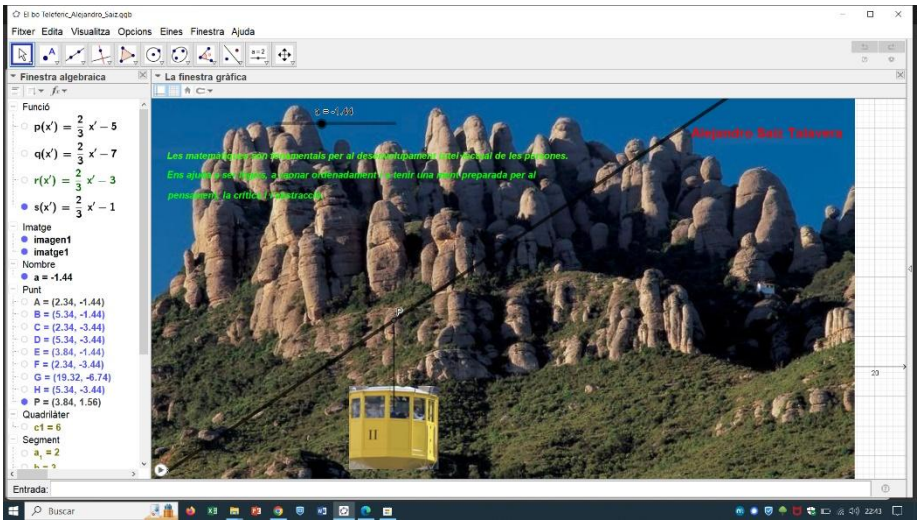


Imagen 7. Captura de pantalla del proyecto del Teleférico

La animación puede visualizarse en
https://www.youtube.com/watch?v=y4Onm7l44s0

2.4 Un paseo por las redes sociales

En este apartado se muestra algún ejemplo en el que se involucran en el proceso de enseñanza/aprendizaje las redes sociales, especialmente en Instagram i X (antiguo Twitter). La asignatura actualmente dispone de una dirección de X (@FOMA_EPSEVG**)** y de una dirección de Instagram @modelitzaciomatematica

Por todo ello se muestra una pequeña “cata” de situaciones de aprendizaje experimentadas para ilustrar la implicación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

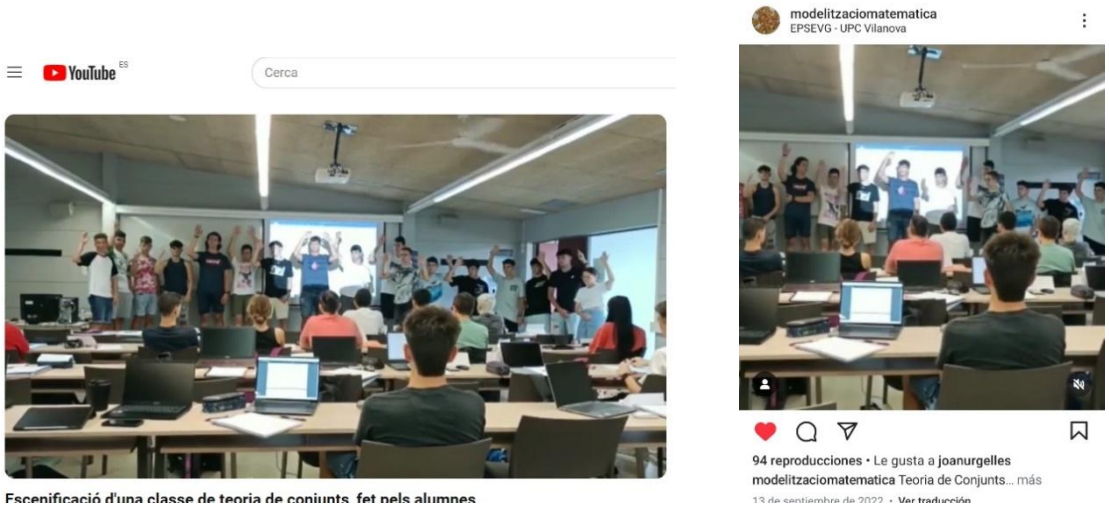
2.4.1. Un ejemplo de teoría de conjuntos

Se escenifica un sencillo ejercicio de cardinales en dos conjuntos finitos donde se presenta la intersección de ellos como modelo de “elementos comunes”; siendo los estudiantes los actores que comparten sus preferencias y observando que hay una

cantidad de estudiantes que se encuentra en ambas situaciones ya que manifiestan sus preferencias. Es una visualización de la igualdad

$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ que en este caso será el modelo matemático que ilustra la situación.

En las siguientes imágenes se muestra esta experiencia escenificada por los estudiantes en el aula y publicada en YouTube y en Instagram



Escenificació d'una classe de teoria de conjunts, fet pels alumnes

Imagen 8. Captura de pantalla de secuencia YouTube e Instagram

La secuencia entera puede visualizarse en https://www.youtube.com/watch?v=33qA9E2_W90

2.4.2. Un problema clásico de optimización

Se propone el clásico problema de recortar los bordes de una placa rectangular para construir una caja de volumen máximo. El ejercicio se realiza inicialmente recortando "a voluntad" un A4 y posteriormente calculando el volumen de la caja resultante; de esta forma el alumno observa que hay distintos volúmenes en función del trozo recortado. Finalmente se construye el modelo matemático que nos proporciona la medida que hay considerar para encontrar la caja de volumen máximo. El ejercicio se

realiza en grupo en clase con papel, tijeras, y todo el proceso se comparte en Instagram

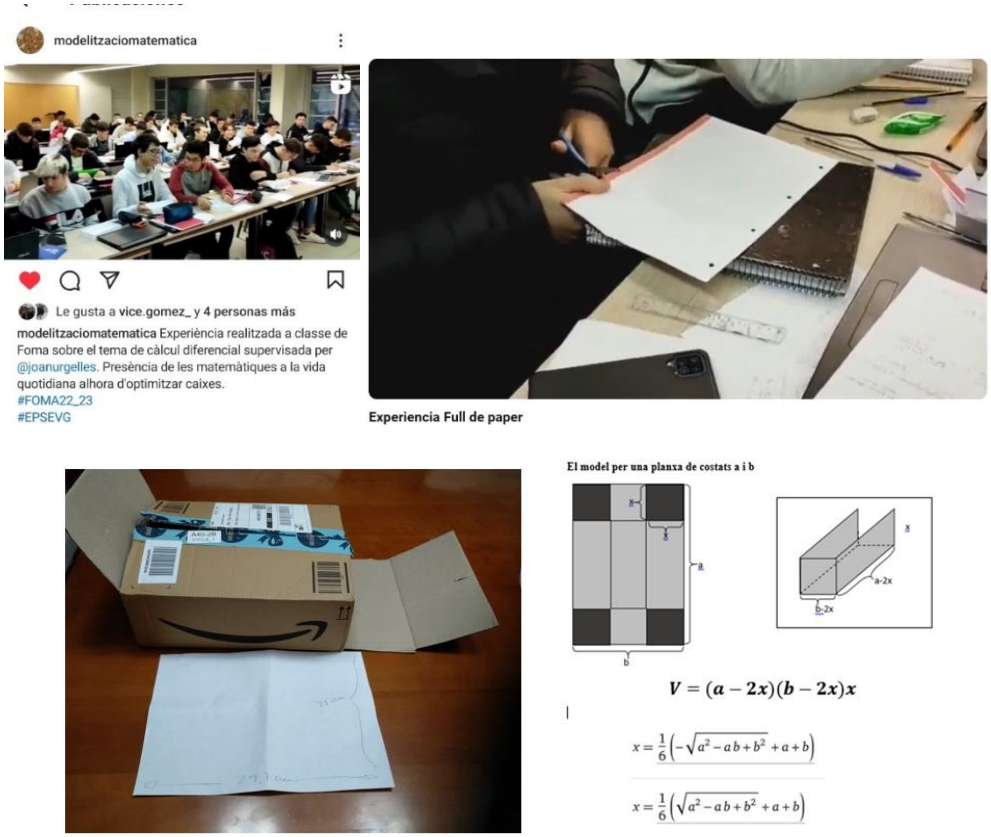


Imagen 9. imágenes de diversas escenas del problema

El video de todo el proceso también se puede visualizar en *https://www.youtube.com/watch?v=2pjzQUil8Cw*

2.4.3. Algunos Tuits

En la actividad docente también se sugiere a los estudiantes que muestren sus impresiones a través de la red X (antiguo Twitter). La utilización de esta red radica no solamente en trabajar la competencia digital sino también en mostrar la capacidad de síntesis (actualmente se permiten mensajes de 240 caracteres) en la escritura y además comunicar el contenido a gran cantidad de usuarios; esta práctica permite fomentar el debate y enriquecer con comentarios el contenido del mensaje.

Es interesante el “tuit” que se originó a partir de la visión de un surtidor de agua que su recorrido tenía como modelo matemático una función de cuarto grado; los estudiantes realizaron una simulación para obtener la trayectoria utilizando puntos deslizantes de GeoGebra y a su vez construyeron la función, en este caso obtuvieron

$$f(x) = -0{,}03x^4 + 0{,}72x^3 - 7{,}65x^2 + 38{,}53x - 73{,}53.$$

La animación se presentó en formato “gif” y a su vez se incorporó en un “tuit”. A continuación, se muestra una captura de pantalla del trabajo en GeoGebra, del tuit y de las direcciones en donde el lector puede encontrar la imagen animada *https://youtu.be/M1yo4E1ZVAo*

y el propio “tuit”: *https://twitter.com/i/status/1330977505667379202*

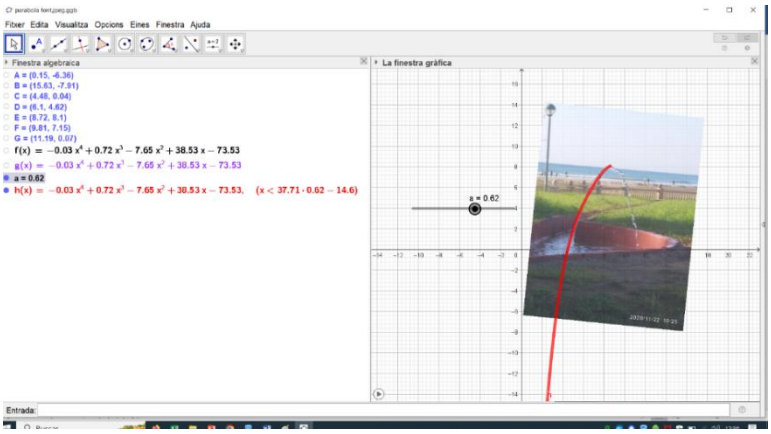


Imagen 10. Captura de pantalla de un instante de la animación

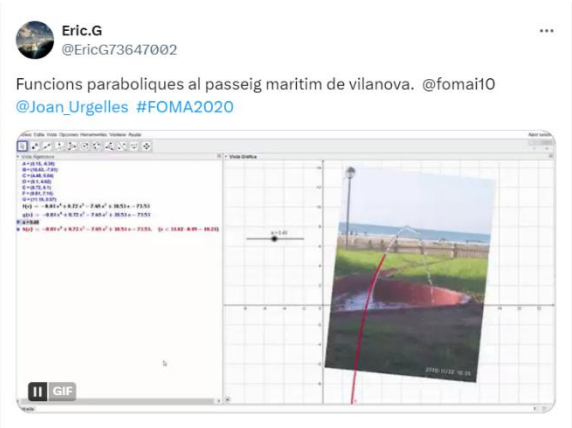


Imagen 11. Detalle del tuit

A continuación, se muestra otro “tuit” en el cual un grupo de estudiantes ilustra como realizan el trabajo en grupo y de qué manera progresa su investigación. El grupo en cuestión realiza un proyecto en el cual han diseñado una contraseña que posteriormente tiene que ser descubierta por los compañeros de clase

Imagen 12. Un par de tuits del trabajo en grupo

En el segundo de ellos se aprecia que comentan que están aprendiendo el código César y el análisis de frecuencias

En el siguiente tuit (*https://x.com/EricG73647002/status/1317928884244041729?s=20*) se aprecia la función logarítmica, en particular $f(x) = 0{,}78 \cdot \ln(x)$ como modelo de la estructura de un árbol torcido

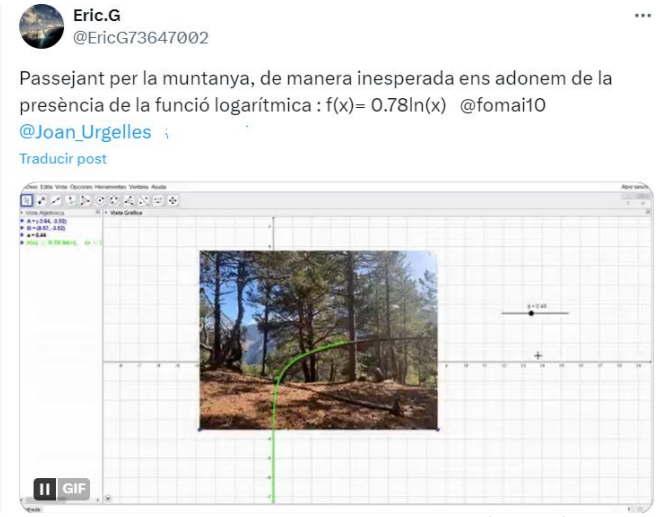


Imagen 13. Captura de pantalla instante función logarítmica

La animación del gif se encuentra en
https://www.youtube.com/watch?v=XodNQZbXJhs

2.4.4 Una página en Wikipedia

Un grupo de estudiantes configuraron una página en Wikipedia con una muestra de demostraciones visuales con animaciones realizadas por los propios alumnos y una extensa bibliografía para ampliar el tema. Destacan el teorema de Pitágoras, la suma de números impares y la suma de cubos. La dirección de la página es:

https://ca.m.wikipedia.org/wiki/Demostracions_visuals#

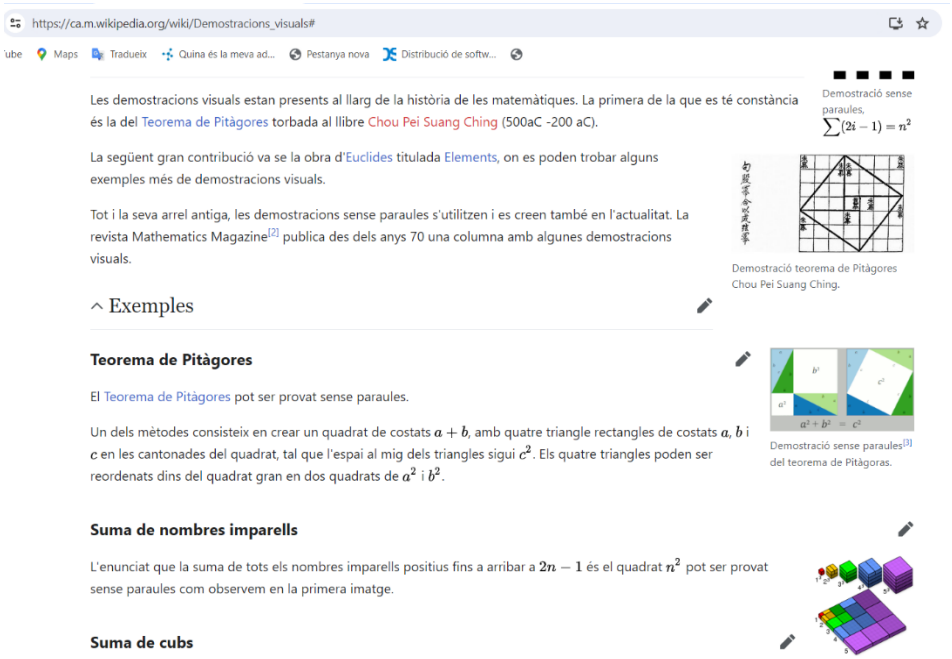


Imagen 14. Captura de pantalla de la página de Wikipedia

3. Conclusiones

1. En el proceso de enseñanza/aprendizaje es un buen aliado el uso de herramientas con las que los estudiantes están familiarizados: X y especialmente Instagram, elementos propios de la competencia digital
2. La experiencia presentada conlleva una gran componente de investigación por parte de los estudiantes

3. El trabajo en proyectos presentado fomenta el trabajo en grupo como forma de aprendizaje
4. Se potencia el aprendizaje de elementos de algebra lineal, criptografía (código Cesar, análisis de frecuencia, código Hill, …), cálculo diferencial, etc. de manera contextualizada
5. El uso de aplicaciones específicas como la hoja de cálculo Excel, GeoGebra, Octave refuerza la adquisición de la competencia digital
6. Se consigue una fuerte motivación debido a la contextualización de los conceptos (STEAM) y a su vez unas producciones académicas muy elevadas
7. A nivel pedagógico se destacan los aspectos cognitivos, heurísticos y epistemológicos de las matemáticas
8. Finalmente se puede afirmar que la modelización matemática es una metodología excelente y válida para incorporar en los currículos de matemáticas, especialmente en grados de ciencias y tecnología
9. La experiencia presentada es una propuesta de innovación eficaz versus la enseñanza tradicional

¿Como conclusión general de la experiencia presentada se incorpora un video, titulado "*Ho pots veure*?" ("*¿Lo puedes ver*?") de un minuto de duración realizado por los propios alumnos en el que manifiestan sus impresiones a partir de lo que han aprendido en las sesiones de clase:

https://www.youtube.com/watch?v=lMhWfaqF3_g

Imagen 15. Inicio del video con las impresiones de los alumnos

La transcripción del video en castellano es:

00:00:00 ¿Puedes verlo?

00:00:05 Las matemáticas son un arte y en la ingeniería te enseñan a apreciarlo.

00:00:10 Y te ofrecen la oportunidad de aplicar tus nuevos conocimientos

00:00:13 en distintos proyectos como los que hemos hecho.

00:00:16 La codificación y los videojuegos que muchas personas aprecian

00:00:19 son resultado de muchísimas operaciones matemáticas,

00:00:21 cómo pueden ser las matrices.

00:00:24 Otro ejemplo podría ser la protección de tus datos

00:00:27 que viene determinada por la aritmética modular.

00:00:30 Las matemáticas no deben ser un obstáculo,

00:00:32 sino una herramienta para optimizar la industria

00:00:34 o problemas que podemos encontrar en nuestro día a día.

00:00:38 Pero la vida no está en un papel,

00:00:40 por eso se han creado y se crearán nuevas herramientas

00:00:42 para poder observar y entender mejor las matemáticas.

00:00:46 El trabajo en proyectos nos ha servido

4. Referencias

Gómez, J. (2022). "*El secreto mejor guardado. Aprendiz de hacker*" XX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (XX JAEM, Valencia)

Libro de Actas *https://20.jaem.es/libro-de-actas/* pp. 485-494

Niss, M. Blum, W. (2020) "*The Learning and Teaching of Mathematical Modelling* IMPACT: Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching

21 JAEM

MATEMÁTICAS ENTRE EL MAR Y LA MONTAÑA

Talleres

Aprender a pensar desde infantil. El desarrollo del razonamiento lógico matemático

Autor: Carmen Rosa Mesa González

Correo: martestrece.59@gmail.com

Autor: Ana Rosa Díaz Rodríguez

Correo: adiarodp@gobiernodecanarias.org

Consejería de Educación, Formación profesional, Actividad física y Deportes del Gobierno de Canarias

Núcleo temático: Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Infantil, Primaria

RESUMEN

Vamos a acercarnos al desarrollo de la lógica y el lenguaje en la educación en la etapa preoperacional de 3 a 8 años. Este desarrollo será fomentado con un trabajo que contribuya a que el alumnado se enfrente a actividades que contribuyan a este desarrollo.

En esta etapa se ponen las bases del razonamiento lógico, partiendo del nivel evolutivo en que se encuentra el alumnado. El entrenamiento se basará realizar las siguientes actividades:

1. Manipulativas significativas.
2. Aprendizaje desde la observación, análisis y reflexión.
3. La verbalización de las ideas que surgen de la acción, primero de forma espontánea y luego ayudándoles a definir los procesos con el lenguaje lógico. Se necesita un material estructurado para visualizar los conceptos.

   Utilizaremos los bloques lógicos y otras colecciones.
4. Crear estructuras de clasificación y seriación.

Palabras clave: razonamiento, lógico, secuencia, enunciación, modelos

1. Esquema del Razonamiento lógico

En un primer momento se establecerán relaciones a partir de semejanzas y diferencias, y se trabajarán conceptos matemáticos como la forma, haciendo uso de los bloques lógicos y otros materiales.

2. Enunciar.

Para comprender enunciados y que sean capaces de inferir, tenemos que entrenarlos en enunciar.

- A partir de una colección o realidad les ofreceremos modelos.

Ej: El o la docente enunciará verdades y falsedades.

El alumnado contestará: “Verdad”, “Mentira”.

- Por medio de la acción, interiorizarán y darán flexibilidad a su razonamiento.

Ej: Hacer verdad lo que el profesor/a dice.

- El alumnado enunciará verdades o mentiras.

Primero de forma espontánea

Decir verdades con “SÍ”.....*Decir mentiras con “NO”

Decir verdades con “NO”....*Decir mentiras con ”SI”

3. Enunciar verdades

Haciendo uso de los bloques lógicos, en este apartado se realizarán actividades del siguiente tipo :

- ENUNCIAR VERDADES AFIRMANDO

Ej. “Todo lo que está sobre la mesa son figuras geométricas”

- ENUNCIAR VERDADES NEGANDO

Ej. “No hay figuras verdes”

4. Enunciar falsedades

En este apartado se realizarán actividades del siguiente tipo:

- ENUNCIAR FALSEDADES AFIRMANDO

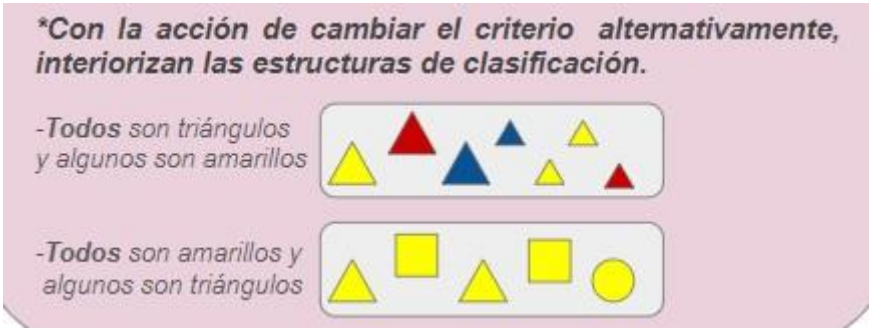
Ej. “Algunas son verdes”

- ENUNCIAR FALSEDADES NEGANDO

Ej. “No hay círculos sobre la mesa”

5. Cuantificadores lógicos

Siguiendo la línea de las actividades anteriores se trabajarán la enunciación usando los cuantificadores lógicos siguientes: Todos, algunos, no todos, ninguno, uno y sólo uno y, al menos uno.



Referencias

Crovetti Giacomo (1985). Educación lógico / Matemática 1 y Educación lógico matemática 2. Editorial Cincel

Fernández Bravo J.A. (2019) Desarrollo del pensamiento Lógico y Matemático

(educación Infantil). Grupo Mayéutica - Educación

Fernández Bravo J.A (2019). Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil. Grupo Mayéutica-Educación

Fernández Bravo J.A.(2023) ¡Que verdad! ¡Que mentira! Lógica para enseñar, lógica para aprender. Editorial CCS .

Kneller George. (1969) La Lógica y el lenguaje en la educación . Editorial Ateneo

Piaget Jean; Inhelder Bärbel. (1967) Génesis de las estructuras lógicas elementales. Printed in Argentina. Bu Editorial Guadalupe,

Santos Asensio, M. C; Ingelmo Hernández, Emilia; Mena Ramos, A. 1992 Los bloques lógicos de Dienes en educación Infantil y Primaria (de 5 a 7 años). Amarú Ediciones.

La Mercería: un espacio para enhebrar conocimientos matemáticos

Anna Rodríguez Casas
anrodriguez@fedac.cat
Grup Perímetre Girona / Escola Fedac Sant Narcís - Girona

Francesc-Xavier Fernández Berges
xfernan1@xtec.cat
Grup Perímetre Girona / Escola L'Estació - Sant Feliu de Guíxols (Girona)

Núcleo temático: Procesos, conexiones, recursos para el aula.

Modalidad:Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil.

RESUMEN

Todas y todos conocemos la importancia del juego simbólico, en la etapa de educación infantil, para el buen desarrollo emocional, cognitivo y social de nuestros alumnos. No hay aulas de esta etapa que no tengan espacio para la cocina, el taller, la enfermería o el supermercado, entre otras propuestas. Es importante que jueguen libremente, pero tenemos una gran oportunidad que podemos aprovechar para que se enriquezcan y sacar el máximo provecho desde una mirada matemática. Entre botones, cremalleras y alfileres, en este taller plantearemos diferentes actividades y retos abarcando todos los sentidos matemáticos.

Palabras clave: Educación infantil, juego simbólico, sentidos matemáticos, retos.

1. Introducción

La actividad principal de los niños y niñas en la educación infantil es el juego. Las maestras y maestros pueden hacer que el juego se convierta en un contexto que ayude a desarrollar un pensamiento matemático. Si identificamos las relaciones que se establecen y hacemos un buen acompañamiento, los ayudaremos a ser conscientes de aquello que empiezan a intuir. (M. Torra)

Después de una breve presentación y contextualización sobre el juego simbólico podremos manipular entre las diferentes propuestas expuestas.

Los participantes del taller se repartirán entre las distintas propuestas planteadas. Cada grupo llevará a cabo las actividades expuestas descubriendo posibilidades relacionadas con los sentidos matemáticos.

Finalizaremos el taller comentando las diferentes propuestas que hayan podido realizar, ampliando actividades o propuestas nuevas que puedan surgir, poniendo énfasis en cómo tratar el error y hacer un buen uso del vocabulario matemático en cada situación.

Debemos citar también la colaboración de Elisenda Casanova (ecasan3@xtec.cat) y Maite Terradas (mterrad8@xtec.cat) en la elaboración de este taller.

2. Las actividades del taller

2.1 Entre botones y agujas tendremos la posibilidad de contar, operar y hacer uso de cuantificadores.

Imagen 1. Nociones de cantidad (I3 Escola Fedac Sant Narcís)

2.2 Líneas, cuerpos, figuras y posiciones surgen entre telas y carretes de hilos.

Imagen 2. Primer contacto con el material (I3 Escola Fedac Sant Narcís)

2.3 Comparar, agrupar, seriar, ordenar, relacionar, clasificar e iniciarnos en el pensamiento computacional, tendremos la posibilidad de profundizar manipulando cintas, hilos, botones y cremalleras. Pondremos las bases del álgebra temprana.

Imagen 3. Patrones con botones (I3 Escola Fedac Sant Narcís)

2.4 ¿Qué cremallera es más larga?, ¿Caben estos botones en el recipiente? ¿Cómo podemos medir la tela? Son algunas de las preguntas que nos cuestionaremos cuando manipulemos las telas y otros materiales propios de la mercería. Actividades básicas para despertar el sentido de las medidas.

Imagen 4. Descubriendo longitudes (I3 Escola Fedac Sant Narcís)

2.5 Descubrir *la moda* con la moda. ¿Qué tela os gusta más?, ¿de qué color hay más botones? Con la recogida de datos, y realización de gráficos daremos un guiño a la estadística

2.6 Retos

- Resolveremos “Quelis” y tendremos la oportunidad de crear de nuevos.

Imagen 5. Queli: ¿quién es el intruso?

Imagen 6. ¿Quién se ha colado?

- La “ratita de pensar”, mascota de la mercería, nos desafiará con retos que nos harán pensar y discutir la solución.

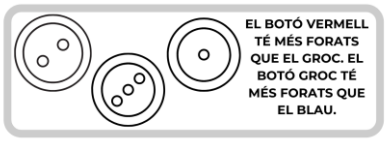


Imagen 7.“ El botón rojo tiene más agujeros que el amarillo.El amarillo tiene más agujeros que el azul

Imagen 8.“ El botón verde tiene menos agujeros que el amarillo.

2.7 Cuentos matemáticos

Un recurso más para nuestras intenciones. Si a los cuentos les damos un vistazo matemático tendremos propuestas tan sugerentes como las que realizaremos con “*Un puñado de botones” o “ Un metro de historias de metro”*

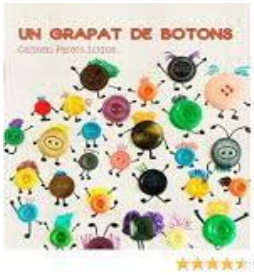


Imagen 9.“ Un puñado de botones

Imagen 10. Un metro de historias de metro

3. Conclusiones

Mediante el juego simbólico tenemos un buen recurso para comprender la realidad y el entorno. Si sabemos dar un enfoque concreto a los materiales del juego simbólico estamos ayudando a que borden la base de su aprendizaje matemático. Son ellos mismos quienes pueden hacer descubrimientos solo necesitan de un material, una disposición y una intención todo ello enhebrado con buenas preguntas y un acompañamiento del docente.

4. Referencias

Besora, Ramon y Asensio, Albert (2024). *Un metre d’històries de metre* Ed.Meraki

Parets, Carmen (2018) *Un grapat de botons.*

Acercando la topología a las aulas de Infantil y Primaria a través del juego del dominó

Sandra Reja Expósito
sandrarejasexp@gmail.com
Universidad de Huelva

Marta Rodríguez Pérez
marta.rodriguez.uhu@gmail.com
Universidad de Huelva

Clara Monteagudo Benítez
claramb491@gmail.com
Universidad de Huelva

Myriam Codes Valcarce
myriam.codes@ddi.uhu.es
Universidad de Huelva

Núcleo temático: Recursos para el aula; Procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil y Educación Primaria.

RESUMEN

La construcción de la noción de espacio, según Piaget, pasa por la adquisición de las relaciones topológicas. Con el dominó topológico, presentamos un recurso pertinente para trabajar la topología y adecuado para la etapa de Educación Infantil. Los participantes del taller tendrán la oportunidad de experimentar con este material y descubrir su potencialidad. En la puesta en común analizaremos las diferentes experiencias y compartiremos las implementaciones que hemos realizado en diferentes aulas. Uno de los puntos fuertes del recurso que hemos diseñado es su versatilidad que le confiere una capacidad adaptativa óptima para hacer frente a la diversidad del aula.

Palabras clave: Topología, Educación Infantil, Educación Primaria, recurso manipulativo, dominó.

Motivación

Introducir la topología en las aulas de Educación Infantil es una decisión pedagógica valiosa, fundamentada por la teoría piagetiana que reconoce la importancia de partir de los aspectos topológicos para contribuir en la construcción del espacio de la infancia. La realidad es que, a la hora de hablar de espacio y de crear estrategias y actividades desde la escuela que ayuden al desarrollo de este concepto, solemos tender a la enseñanza de un tipo de espacio en concreto: el espacio euclidiano, el mundo de las medidas y distancias, ángulos y áreas. Por contra, dejamos de lado al espacio topológico que, junto con el proyectivo, forman lo que Castro (2004) denomina *"espacio total"* y al que debemos nuestra capacidad para ubicarnos en el espacio. Aproximadamente a los 6 años, ratifica Piaget-Inhelder (1956, citado en Vidal y de la Torre, 1984), *"los conceptos topológicos van transformándose lentamente en conceptos proyectivos y euclídeos"* (p. 112).

Teniendo en cuenta esta premisa, proporcionar un espacio y crear situaciones de aprendizaje que busquen el trabajo en esta área, se convierte en una cuestión clave en edades tempranas; la enseñanza de la topología adquiere sentido no sólo por su impacto en el desarrollo matemático, sino en todo lo relativo a la estimulación de habilidades cognitivas esenciales. Siguiendo esta misma línea, existen investigaciones, como las de Zafra y otros (2016), que destacan los resultados positivos que aporta el trabajo de esta disciplina mediante la implementación de actividades lúdicas en las aulas de infantil: *"los talleres para la enseñanza de la topología tienen incidencia en el aprendizaje y dominio de las matemáticas estimulando el pensamiento analítico, espacial, lógico y estructurado que permiten un mejor desarrollo intelectual de los niños"* (p. 20).

Desarrollo del taller

El taller que presentamos tiene un doble objetivo. Por un lado, sensibilizar al profesorado con la importancia de trabajar la geometría topológica desde edades tempranas, y también a lo largo de la Educación Primaria. Por otro lado, facilitarle un

recurso pertinente para ese trabajo, que ya hemos implementado exitosamente en aulas de Educación Infantil y Educación Primaria.

El taller se desarrollará en cuatro partes en las que, en función del número de asistentes al taller, haremos grupos de entre tres y cinco personas para que trabajen compartiendo ideas y el desarrollo del taller tenga dinamismo. Además, en la primera parte tendrán que jugar una partida con nuestro dominó. Trataremos de que el profesorado integrante de los grupos coincida en el nivel educativo del que son especialistas para que comparta los objetivos de la experiencia que llevarán a cabo.

Parte I: Exploración del material e introducción a la geometría topológica

Dinámica: trabajo en pequeño grupo.

Material: dominó topológico facilitado por las autoras.

Tiempo: 20 minutos.

Se organizarán grupos de trabajo a los que se les repartirá diferentes ejemplares del dominó topológico que hemos diseñado y se les invitará a que observen y planteen hipótesis acerca del contenido matemático que se puede trabajar con él. Se les invitará a que realicen alguna partida para enriquecer su conocimiento sobre el mismo. Las autoras atenderán las demandas del trabajo en los pequeños grupos.

Imagen 1. Dominó topológico diseñado por las autoras.

Tras la exploración, se darán unas pinceladas teóricas sobre la geometría topológica para contextualizar el taller y se abrirá una discusión en gran grupo sobre el potencial

matemático del recurso. Este debate se enriquecerá con las experiencias de las autoras en la implementación del recurso.

Parte II: Diseño

Dinámica: trabajo en pequeño grupo.

Material: papel y lápiz.

Tiempo: 40 minutos.

Con los mismos grupos de trabajo, se elaborará una modificación de nuestro dominó topológico atendiendo a diferentes argumentos: simplificación, complejización, adaptación a necesidades específicas, otros contenidos matemáticos, …. Cada grupo diseñará un dominó atendiendo a un contenido matemático apropiado para un aula de Educación Infantil o Educación Primaria, según las características del profesorado integrante. Las autoras atenderán las demandas del trabajo en los pequeños grupos.

Parte III: Exposición de los diseños

Dinámica: exposición al gran grupo.

Tiempo: 15 minutos.

Cada grupo compartirá los diseños con el resto del profesorado participante y expondrá los argumentos en los que se han apoyado las modificaciones. Las autoras coordinarán la puesta en común.

Parte IV: Síntesis

Dinámica: trabajo en gran grupo.

Tiempo: 15 minutos.

Para cerrar el taller, se realizará una valoración de los diseños propuestos con base en las nociones matemáticas que se desarrollen en ellos. Además, se pedirá al profesorado participante que responda a una pequeña encuesta de valoración del taller.

Agradecimientos

Este taller está asociado al proyecto PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España, el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, el grupo de investigación DESYM (HUM-168), el proyecto ProyExcel_00297 (Junta de Andalucía) y a los proyectos de innovación educativa del 2020 al 2024 del Vicerrectorado de Innovación y empleabilidad de la Universidad de Huelva.

Referencias

Castro, J. (2004). El desarrollo de la noción de espacio en el niño de Educación Inicial. *Acción Pedagógica, 13*(2), 162-170. Disponible en *https://dialnet.unirioja.es/servlet/ articulo?codigo=2970459*

Vidal, E., y de la Torre, E. (1984). Enseñanza de la topología y geometría en los niveles elementales. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 2*(2), 111-115. Disponible en *https://raco.cat/index.php/ Ensenanza/article/view/50712*

Zafra, S. L., Vergel, M., y Martínez, J. J. (2016). Ambiente de aprendizaje lúdico de las matemáticas para niños de la segunda infancia. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología, 7(2),* 14-22.

Un recurso para establecer relaciones: cajas del 10

Autor: Francisco José Morales Villegas

Correo: elarqueropaco@gmail.com

Institución: Proyecto Matemáticas Newton Canarias, Consejería de Educación, Formación Profesional, Actividad Física y Deportes del Gobierno de Canarias

Autor: María Nila Pérez Francisco

Correo: mperfrah@canariaseducacion.es

Institución: Proyecto Matemáticas Newton Canarias, Consejería de Educación, Formación Profesional, Actividad Física y Deportes del Gobierno de Canarias

Núcleo temático: recursos para el aula, procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

Las “cajas del 10” constituyen una herramienta indispensable para trabajar la subitización, el concepto de número, los complementarios y las operaciones. Permiten al alumnado de infantil desarrollar el sentido numérico trabajando de forma visual y física los números del 1 al 10; y facilitan en el primer ciclo de primaria el aprendizaje del sistema de numeración decimal posicional y la comprensión de las operaciones de suma y resta unidas las acciones que se ejercen, mejorando enormemente el cálculo mental.

Palabras clave: subitización, numeración, complementarios, suma, resta.

Hay una creencia, difícil de erradicar sobre todo en nuestro gremio, que piensa que las verdaderas matemáticas son las que se trabajan a partir de secundaria, y con fórmulas, algoritmos y ecuaciones. Pero los cimientos sobre los que se construyen esas matemáticas hay que colocarlos mucho antes, desde la etapa de educación infantil. Los conceptos intuitivos de nuestro sistema de numeración, de las operaciones básicas y su significado, del vocabulario asociado y los juegos y acciones

que conducen a la comprensión de esos conceptos, hay que comenzarlos desde los 3 años.

Una cajita del 10 es un marco rectangular que contiene 10 cuadrados iguales colocados en dos filas de 5. Se rellenan con fichas, botones, garbanzos, peones, pompones, policubos, tapones… Aunque podemos trabajar cajitas con otro número de cuadrados, la decena nos va a permitir disfrutar de un gran número de ventajas: -número y cantidad

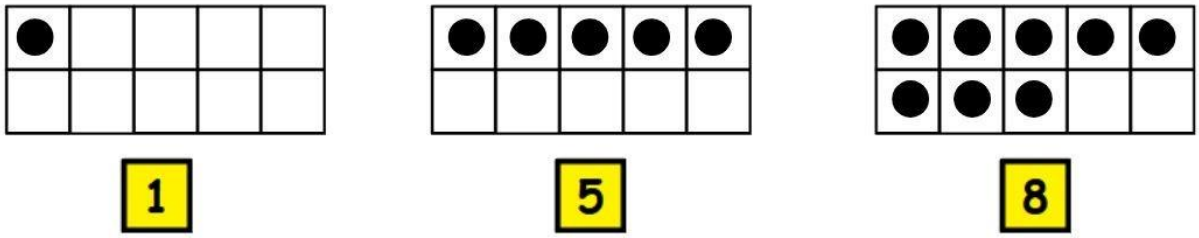


Imagen 1 - Número y cantidad

-adquirir el concepto de decena.

-trabajar los complementarios a 10.

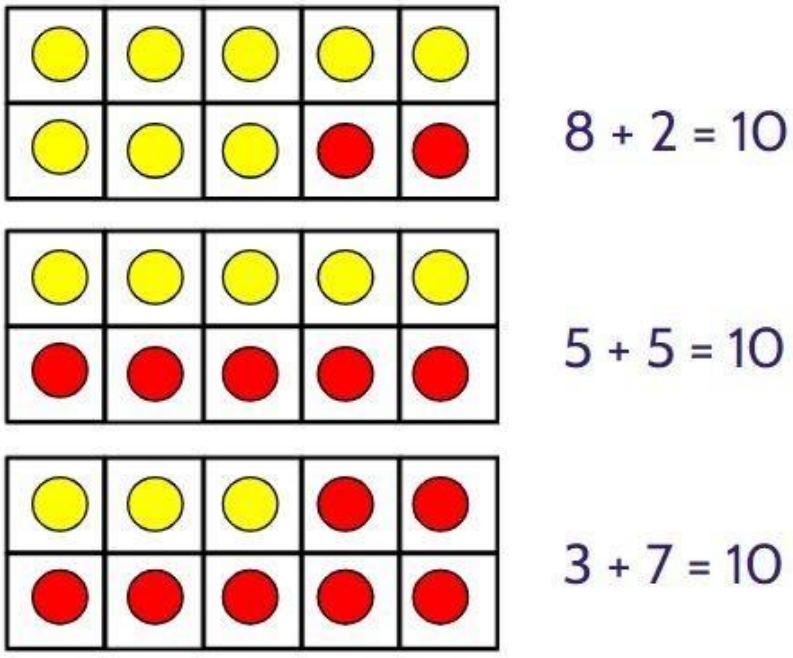


Imagen 2 - Complementarios a 10

-componer y descomponer cantidades con facilidad.

-facilitar la comprensión del sistema de numeración decimal.

-aprender más rápido el nombre de los números de dos cifras.

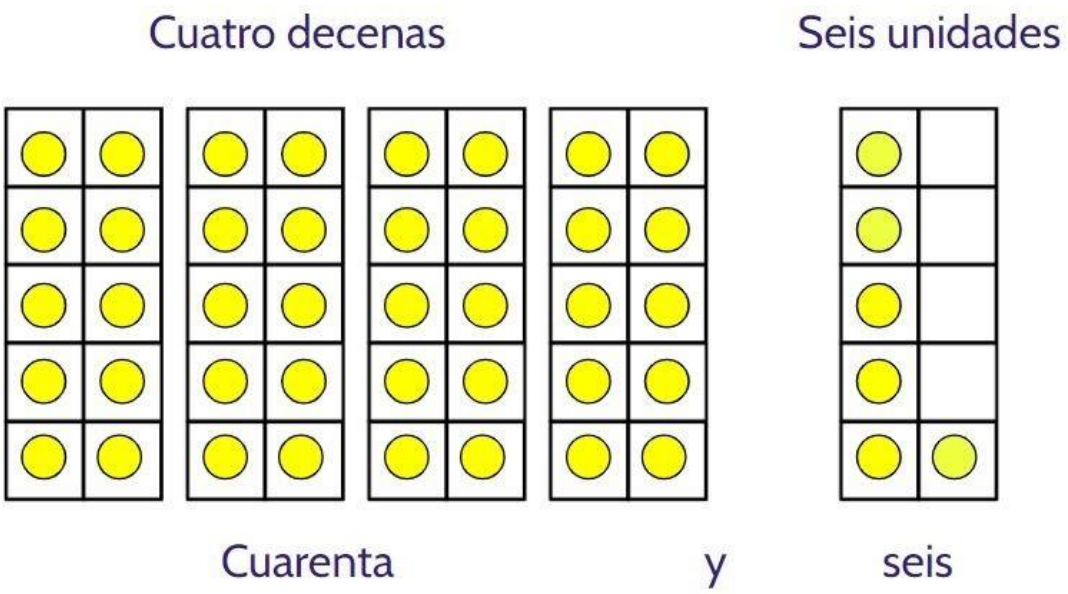


Imagen 3 – Números de dos cifras

-representar visualmente el número.

-facilitar el aprendizaje de la suma y la resta sin y con cambio de orden

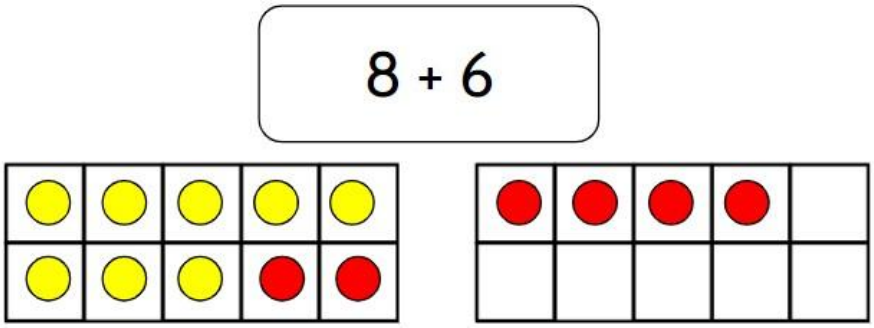


Imagen 4 – Suma con cambio de orden.

Normalmente se van rellenando fila a fila, asemejando a la representación numérica que hacemos con los dedos de las manos, favoreciendo que el alumnado trabaje la subitización y no tenga que contar.

Las "cajas del 10" son un recurso fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas básicas, como la numeración, concepto de decena, adición y la sustracción.

Las "cajas del 10" ayudan al alumnado a desarrollar habilidades numéricas clave, como la subitización, la comprensión de la estructura de nuestro sistema de numeración mediante la descomposición y composición de cantidades, el reconocimiento de patrones y la fluidez en el cálculo mental de manera eficiente. Establecer una comprensión sólida de estos conceptos desde edades tempranas proporciona una base crucial para el éxito futuro en matemáticas.

Las "cajas del 10" permiten dar una atención a la diversidad y un apoyo individualizado en el aula. El profesorado puede adaptar las actividades según las necesidades específicas de cada estudiante, brindando apoyo adicional a quienes lo necesiten y facilitando desafíos a quienes estén listos para avanzar.

En el taller se trabajarán los siguientes aspectos:

-número, grafía y cantidad

-series simples

-comparación mayor y menor

-complementarios a 10

-descomposiciones del 10

-anterior y posterior

-formación y lectura de números de dos cifras

-la suma y sus propiedades

-la resta con y sin cambio de orden

-descomposición de números hasta 100

-pares e impares

Comentaremos nuestro trabajo con este material en el aula en los cursos infantil de 4 años y de 5 años y primero de primaria. Así también podemos compartir la experiencia de su uso en combinación con el diagrama de la estructura aditiva y cómo se puede combinar con materiales como las regletas de Cuisenaire.

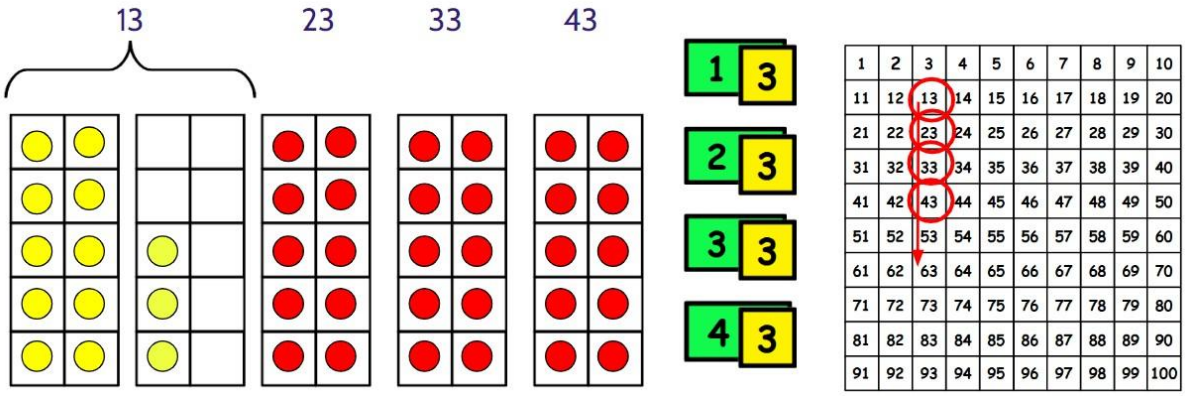


Imagen 5 – Combinación con otros materiales.

El profesorado asistente tendrá acceso a diferentes recursos en PDF, direcciones url y vídeos para tener ejemplos del uso de este material. También se darán algunas orientaciones para la evaluación formativa: momentos para evaluar, técnicas y herramientas de evaluación.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE ___						
ÁREA – MATEMÁTICAS			NIVEL 1º	TEMPORALIZACIÓN – ___ SEMANAS		
CE Y CRITERIOS	CE3 (3.1 y 3.2) – CE4 (4.1) - CE6 (6.1 y 6.2) – CE7 (7.1)					
APRENDIZAJES	Realiza conjeturas matemáticas sencillas de forma guiada, utilizando las cajas del 10 y representaciones gráficas, para extraer conclusiones, comunicarlas de forma verbal y manipulativa.	Identifica problemas en situaciones cotidianas que se resuelven con las cajas del 10, revisa la adecuación de los pasos seguidos para ver las conexiones entre las matemáticas y las situaciones cercanas.	Describe , con las cajas del 10, regularidades matemáticas que se realicen paso a paso, identificando patrones, utilizando secuencias numéricas o gráficas.	Reconoce y comprende el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana, en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario básico, para transmitir información matemática.	Comunica de forma verbal, apoyándose en las cajas del 10, ideas y procesos matemáticos, utilizando lenguaje matemático adecuado e intercambiando información, para dar significado y permanencia a las ideas.	Reconoce las emociones propias cuando trabaja con las cajas del 10, desarrollando así la autoconfianza, empleando actitudes positivas como la responsabilidad, ante nuevos retos y valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.
CRITERIO EVALUACIÓN	3.1	3.2	4.1	6.1	6.2	7.1
ALUMNADO						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						

Imagen 6 – Evaluación.

Referencias

Swan, Paul, Teaching with ten frames

Ecochardt, Janet, Understanding numbers to 10

Historia de la numeración. Contexto y pretesto para aprender Matemáticas.

Sílvia Margelí Voelp (1)
smargeli@xtec.cat *(1)*
CREAMAT, Departament d'Educació Generalitat de Catalunya (1)

Enric Castellà Carlos (2)
ecaste56@xtec.cat *(2)*
CREAMAT, Departament d'Educació Generalitat de Catalunya (2)

Núcleo temático: Comunicación y divulgación. Conexiones.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

Es interesante conocer la historia de la numeración y de las estratégias e instrumentos de cálculo usados por diferentes culturas en diferentes épocas. Y será mejor aún si lo hacemos a partir de la construcción de estos instrumentos y de propuestas para llevar directamente al aula. La historia será, pues, el contexto. Pero también puede ser un buen pretexto para trabajar a partir de saberes y procesos. Para aprender Matemáticas.

En el taller resolveremos problemas para descubrir el funcionamiento de sistemas de numeración de diversas culturas y épocas (china, egipcia, sumeria, ..) y construiremos un juego de regletas de Neper para usar en el aula como herramienta para multiplicar.
Palabras clave: Historia. Procesos. Divulgación.

Introducción

Cuando pensamos en el sentido numérico corremos el riesgo de olvidar que la adquisición de este sentido ha recorrido un largo camino a lo largo de la historia de la humanidad. Muchas de las propuestas se encuentran ámpliamente descritas en la web cálculus (1).

Proponemos actividades que nos permitan trabajar en un marco de resolución de problemas, con la ayuda de materiales y a través de la construcción de herramientas de cálculo.

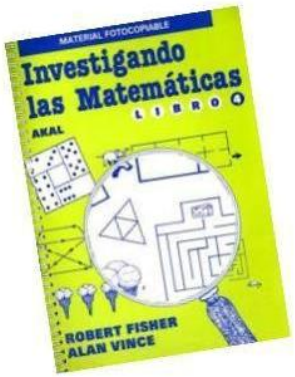
Se plantearán a partir de cajas que incluyen materiales diversos de numeración y cálculo de diferentes épocas y culturas.

El material, a partir de una idea original de Anton Aubanell (2) y del CentMat (3), se presenta en cajas: Una para cada cultura y cada momento de la historia.

La numeración en China

Actividad 1: 15 min. *Se propone a los participantes que rellenen los espacios vacíos que encuentran en una tabla de numeración china. Por parejas analizaremos semejanzas y diferencias respecto a nuestro sistema de numeración y las compartiremos.*

A partir de una tabla que de entrada nos parece indescifrable, vamos a **buscar patrones** hasta conseguir llenar los espacios vacíos, a la vez que descubrimos cómo funciona nuestro **sistema de numeración decimal**.



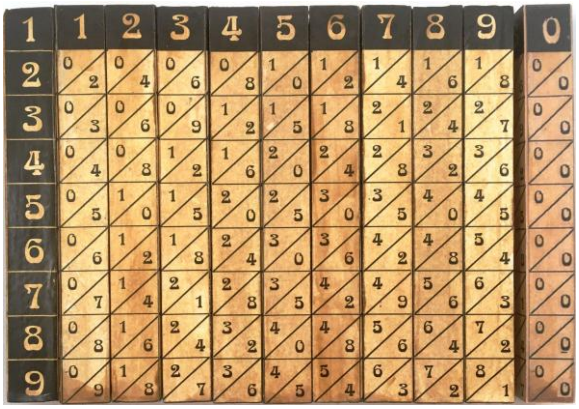
Se trata de una actividad de resolución de problemas que abordaremos trabajando por parejas.

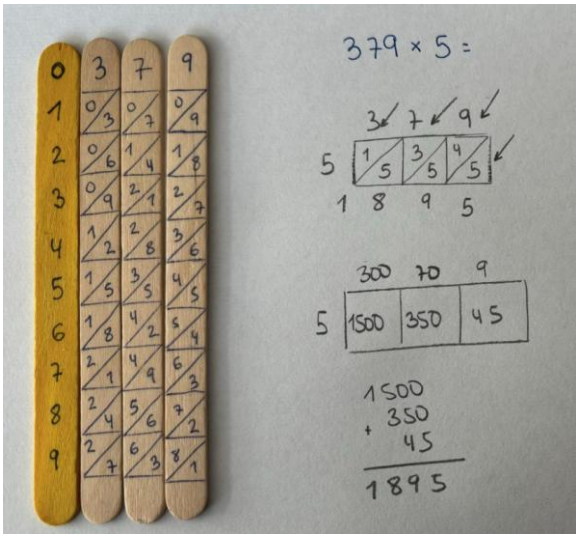
Las regletas de cálculo de Neper

Actividad 2. 30 min: *Resolución de multiplicaciones por el método de la parrilla y construcción (individual, uno para cada participante) de un juego completo de varillas de Neper con palos de polo de madera. Se analizará nuestro algoritmo clásico de multiplicación respecto al de las varillas y el valor didáctico de las varillas.*

Empezaremos descubriendo la multiplicación por celosía, usada en el renacimiento en Europa. Veremos ventajas de este sistema de cálculo a la vez que nos daremos cuenta de la arbitrariedad del uso de algunos algoritmos, que en la mayoría de los casos se deben a problemas que ya tenemos superados (como el hecho de que antes se escribiera en pizarra y no en papel)

De aquí pasaremos a la **construcción de un juego de bastones de Neper**, que con la ayuda de un poco de cálculo mental para sumar, nos permiten hacer multiplicaciones complejas y otras operaciones. **Cada uno de los participantes construirá su propio material.**





Además, nos centraremos en la argumentación de las soluciones y del uso de diferentes estrategias para seguir trabajando los procesos matemáticos en clase.

Numeración egipcia

Actividad 3. 15 min. *A partir de un juego de cartas construido especialmente para el taller, por parejas o grupos de 4 personas, conjeturamos para descubrir el funcionamiento del sistema de numeración egipcio. Analizaremos el material que se nos comparte y diseñaremos nuestras propias tarjetas.*

El sistema de numeración egipcio, a pesar de ser poco conocido, nos permite también entender cómo funciona un sistema aditivo en base 10 como el nuestro. Sin más pistas que las que nos den las tres imágenes, en pocos minutos nos convertiremos en expertos egiptólogos. ☺

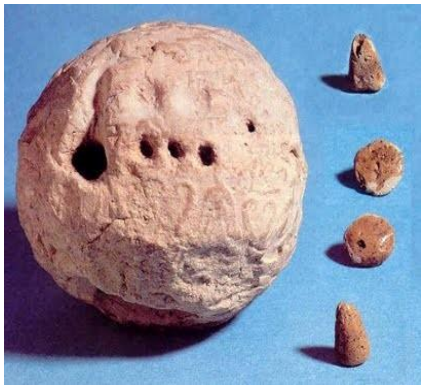
Egipto nos permite también aprender sobre fracciones y sobre las operaciones, con estrategias bastante diferentes a las que usamos nosotros. Descubriremos qué opinan los científicos sobre el hecho de que no los hayamos adoptado. (5) **Cada grupo de 4 participantes tendrá que resolver las diferentes tarjetas de numeración que se le adjudiquen.**

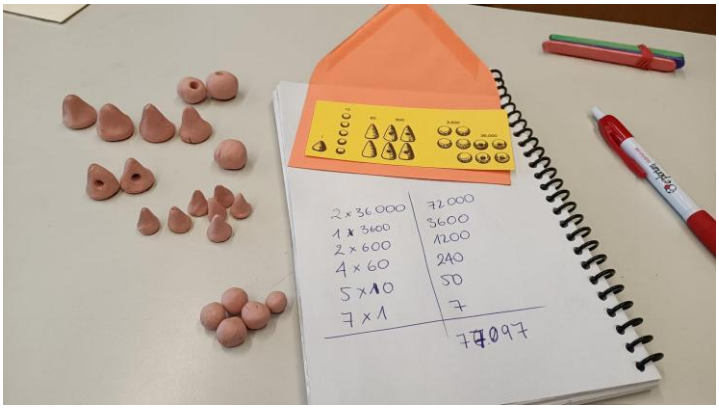
Sumerios y babilonios

Actividad 4. 15 min.

Cada grupo de 4 participantes deberá responder la cantidad a la que se refiere su bloque de nulls, usando diferentes sistemas de representación. Si queda tiempo cada participante podrá modelar con arcilla sus propias piezas.

Y para finalizar el taller pondremos en marcha nuestras estrategias de representación para compartir los resultados de un sistema de numeración complejo, en base 60 con una auxiliar de 10, cuando todavía no usaban la escritura para dejar registro de las cantidades, y lo hacían a través de piezas moldeadas en arcilla: Los Nulls. (4)





Referencias

1. Jareño, J. (2006) Sistemas de numeración y cálculo en la web Cálculus. http://www.xtec.cat/~jjareno/calculus/

2. Aubanell, A (2015) *Idea original de las cajas de sistemas de numeración, a partir de la aportación de un grupo del curso de didáctica en la UB. Versión: Indiana Jones en busca de la Numeración perdida.*

3. CentMat. *Centre d'Aprenentatge Científicomatemàtic. Materials amb més idees i propostes molt interessants per treballar la història de la numeració a l'aula.*

4. Ifrah, G. *La història Universal de las cifras. Georges Ifrah. La biblia de las cifras! 1996 en las que está todo. Más para consultar que para leer.*

5. Reimer, D. *(2014) Count Like an Egyptian. Estudio exhaustivo y reflexiones muy interesantes sobre las particularidades de la matemática en Egipto.*

   Oxford Press.

Conexiones: experimentando la probabilidad

Autor: Francisco José Morales Villegas

***Correo**: elarqueropaco@gmail.com*

Institución: Proyecto Matemáticas Newton Canarias, Consejería de Educación, Formación Profesional, Actividad Física y Deportes del Gobierno de Canarias

Autor: Ana Rosa Díaz Rodríguez

***Correo:** adiarodp@canariaseducacion.es*

Institución: Proyecto Matemáticas Newton Canarias, Consejería de Educación, Formación Profesional, Actividad Física y Deportes del Gobierno de Canarias

Núcleo temático: conexiones, procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

La incorporación de la probabilidad en estos niveles responde a la necesidad de promover que el alumnado adquiera conocimientos que le sirvan de base para la recogida, descripción e interpretación de datos. Se trata de ofrecer herramientas para contestar a preguntas cuyas respuestas no son inmediatamente obvias, y facilitar la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

La probabilidad es un concepto fundamental en la vida cotidiana. Introducirlo desde estas edades permite al alumnado desarrollar una comprensión básica de la incertidumbre y la aleatoriedad, lo que ayudará a abordar problemas y tomar decisiones de manera más efectiva en el futuro.

Tradicionalmente, la probabilidad no se ha trabajado en la educación primaria. Unas veces por estar relegada al final de los temarios, siendo desplazada por otros contenidos curriculares a los que se les daba mayor importancia (numeración y cálculo); y otras por falta de conocimientos sobre la mejor manera de abordarla.

Palabras clave: probabilidad.

PROBABILIDAD

Hay una creencia, difícil de erradicar sobre todo en nuestro gremio, que piensa que las verdaderas matemáticas son las que se trabajan en secundaria, bachillerato o la universidad. Pero los cimientos sobre los que se construyen esas matemáticas hay que colocarlos mucho antes, desde la etapa de educación infantil. Los conceptos intuitivos de probabilidad, el vocabulario asociado y los juegos y acciones que conducen a la comprensión de esos conceptos, hay que comenzarlos cuanto antes. Trabajar la probabilidad en edades tempranas fomenta el desarrollo del pensamiento crítico y analítico de los niños y niñas. Les permite explorar diferentes escenarios, predecir resultados y reflexionar sobre la certeza y la incertidumbre en diversas situaciones.

La idea de probabilidad todo el mundo la tiene en la cabeza y cualquiera puede afirmar que la probabilidad de que una embarazada tenga niño o niña es similar, o que la probabilidad de sacar un oro de una baraja es mayor que la de sacar un rey. También tenemos claro que si tiramos una piedra hacia arriba, subirá durante un tiempo pero luego caerá, y por más veces que lo hagamos siempre sucederá lo mismo.

¿Determinista o aleatorio? (10-15 minutos)

Comenzar presentando la diferencia entre experimentos deterministas y aleatorios puede ser un buen comienzo para trabajar la probabilidad desde educación infantil, priorizando la adquisición de estos conceptos al clásico cálculo que se realiza en educación primaria al aplicar directamente la regla de Laplace.

Desde edades muy tempranas, podemos presentar al alumnado un vocabulario que le permita comunicar ideas relacionadas con los experimentos aleatorios: expresiones como: es imposible, es poco probable, es bastante probable, es casi seguro, es totalmente seguro… ya nos pueden dar una orientación de la probabilidad de que ocurra un suceso, aunque todavía no son muy precisas. La probabilidad no es solo un concepto matemático, también lo podemos integrar en otras áreas del currículo, como conocimiento del medio, educación física o incluso en actividades cotidianas como juegos. Trabajar la probabilidad a través de actividades lúdicas y juegos puede hacer que el aprendizaje sea más atractivo y significativo para el alumnado. Aprenderemos estrategias y recursos para diseñar actividades divertidas que promuevan la exploración y la experimentación.

Dentro de las actividades se harán algunas sugerencias metodológicas y didácticas - Utilizar técnicas de recuento adecuadas.

Realizar pruebas y anotar los resultados de forma ordenada. (10-15 minutos) Para ello se trabajará con dados y con una moneda para que los asistentes recojan los resultados de una forma inteligente y rápida.

De esta manera se podrá comprobar la diferencia entre unos y otros sucesos, y se verá desde cursos muy pequeños la relación del azar con la estadística.

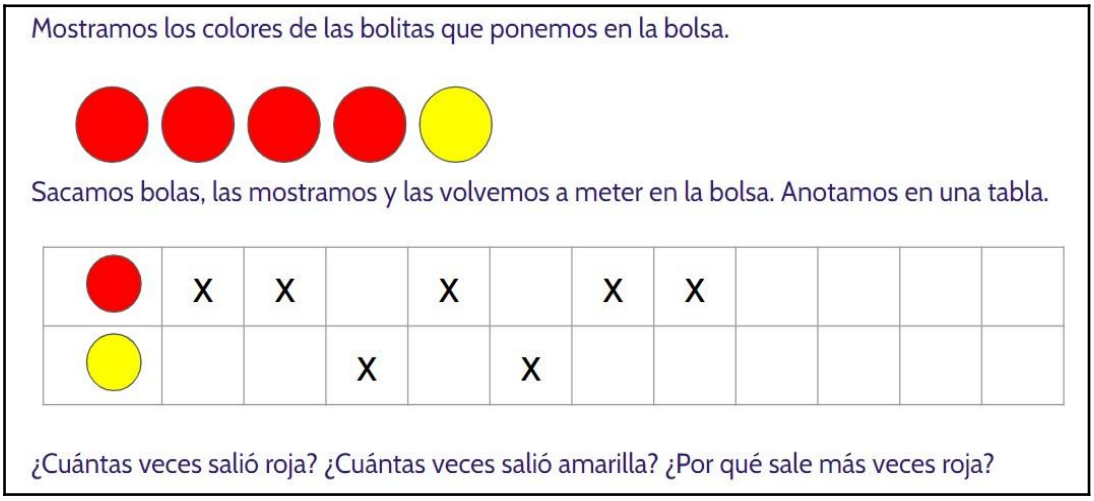


Imagen 1 - Anotar los resultados de forma ordenada

-Construir tablas de frecuencias.

-Utilizar de forma adecuada el vocabulario relacionado con la probabilidad. (10-15 minutos)

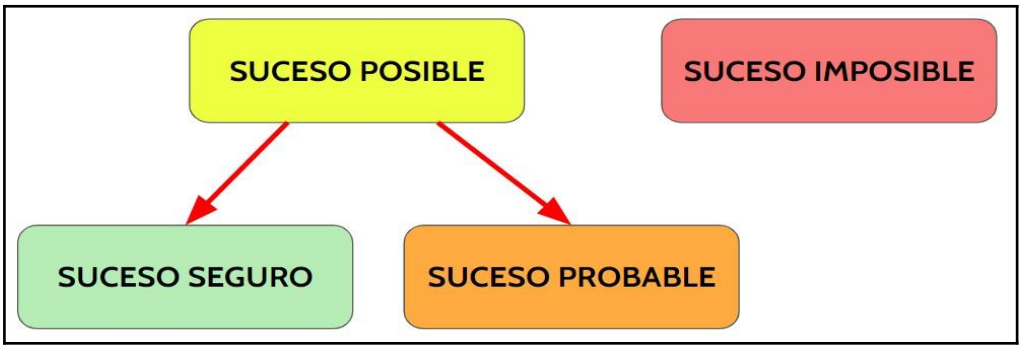


Imagen 2 – Vocabulario adecuado al nivel.

Para ello, se facilitarán al profesorado carteles con ese vocabulario sujetos a un depresor de madera. Por turnos se irán diciendo diferentes situaciones y el resto levantará el cartel o carteles que crean adecuados.

-Distinguir entre sucesos posibles, imposibles, probables y seguros.

-Distinguir entre fenómenos deterministas y aleatorios.

-Relacionar la probabilidad con situaciones cotidianas. (10-15 minutos)

Comenzaremos con juegos de tipo vivencial en los que serán los propios participantes del taller los objetos sobre los que se trabaje. De esta manera aumentaremos la motivación y las ganas de participar del alumnado de infantil y primer ciclo de primaria.

Serán juegos del tipo: “Ahora salen dos chicos y una chica al pasillo. Cerramos la puerta. Alguien toca con los nudillos. ¿Será un chico? Levantamos el cartel correspondiente. ¿Será una chica? Levantamos el cartel correspondiente. Esa persona entra y repetimos la operación.

En el taller intentaremos adaptarnos a diferentes niveles de desarrollo, proporcionando estrategias para adaptar los conceptos de probabilidad a las necesidades específicas de cada grupo de estudiantes, garantizando que todos tengan la oportunidad de participar y aprender de manera efectiva.

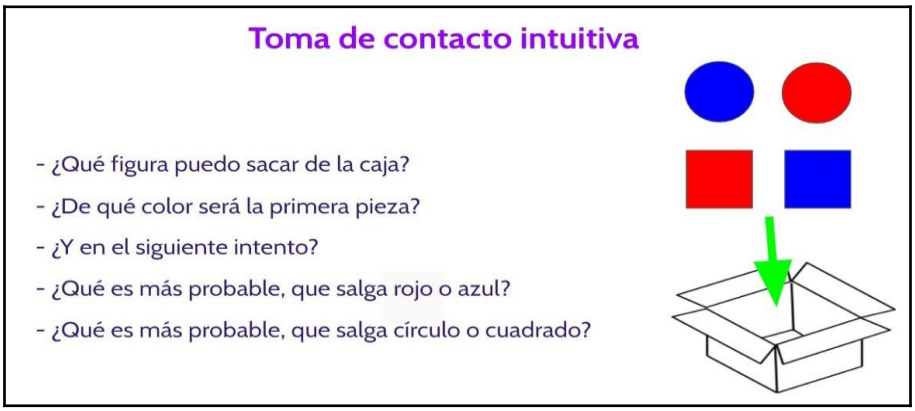


Imagen 3 – Secuenciación de actividades

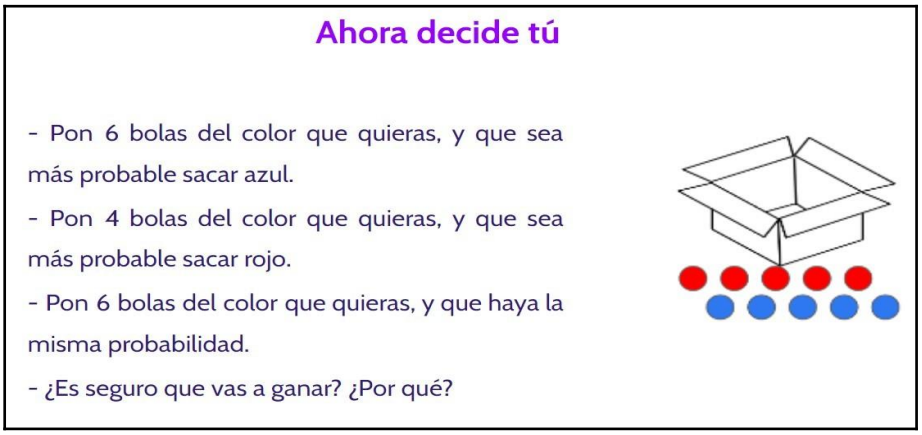


Imagen 4 – Secuenciación de actividades

Toma de contacto intuitiva (15-20 minutos)

Dispondremos de varias bolsas y figuras de colores. El profesorado participante, por turno, irá proponiendo diferentes situaciones con una cantidad limitada de objetos

para que el resto de los integrantes del taller puedan ir contestando a las preguntas que aparecen en las imágenes.

Se creará de esta manera una secuencia de actividades con un grado de dificultad cada vez mayor.

Para trabajar la reversibilidad del pensamiento, también haremos varios juegos en los que se dirá primero la probabilidad y después el profesorado tendrá que preparar el material adecuado que se corresponda con la respuesta dada previamente.

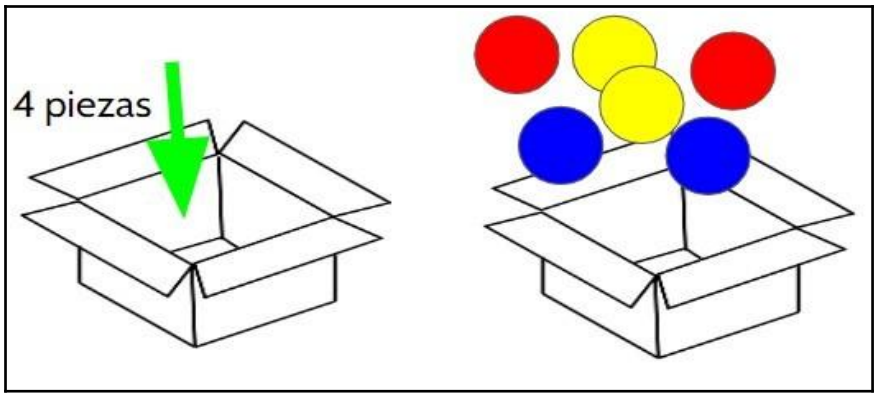


Imagen 5 – Juego: ¿Qué hay en la caja?

Juego ¿Qué hay en la caja? (15-20 minutos)

Hay 4 piezas circulares, (rojas, amarillas y azules) en una caja. Al menos hay una de cada color. Se van sacando una a una y volviendo a meter en la caja.

El profesorado participante tiene otra caja y piezas de los 3 colores para hacer sus conjeturas y debatir en cada grupo una posible distribución.

¿Cuántas piezas habrá que sacar para saber con certeza el contenido de la caja?

¿Cambia el juego si las piezas que vamos viendo se quedan fuera de la caja?

El profesorado asistente tendrá acceso a diferentes recursos en PDF, direcciones url y vídeos para tener ejemplos del uso de este material. También se darán algunas orientaciones para la evaluación formativa: momentos para evaluar, técnicas y herramientas de evaluación.

Evaluación

Escala de valoración

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE __ – _____						
CE6, CE8	6.1. Reconocer y comprender el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana, en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario básico, para transmitir información matemática. 6.2. Comunicar de forma verbal o gráfica ideas y procesos matemáticos, utilizando lenguaje matemático adecuado e intercambiando información, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas. 8.1. Participar en el trabajo en equipo, desarrollando la escucha activa y la resolución pacífica de conflictos y cumpliendo las responsabilidades individuales para la consecución de objetivos compartidos.					
APRENDIZAJES	Reconoce y comprende el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana relacionado con estadística y probabilidad.	Adquiere y utiliza vocabulario básico, para transmitir información matemática.	Comunica de forma verbal o gráfica ideas y procesos matemáticos mediante gráficas de barras y pictogramas.	Utiliza lenguaje matemático adecuado e intercambia información sobre estadística y probabilidad en un entorno de actividades lúdicas.	Participa en el trabajo en equipo en las actividades y los juegos, desarrolla la escucha activa y la resolución pacífica de conflictos.	Cumple las responsabilidades individuales para la consecución de objetivos compartidos.
ACTIVIDAD						
C. EVALUACIÓN	6.1	6.1	6.2	6.2	8.1	8.1
1						
2						
3						

Imagen 5 – Evaluación

Referencias

Batanero, Carmen y Godino, Juan D. (2002) Estocástica y su didáctica para maestros

Ángel Alsina, (2016) La estadística y la probabilidad en educación primaria ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir?

Construímos y Modelamos:

Conectando arquitectura y matemáticas

Ana Belén Petro Balaguer

anabelen.petro@uib.es

Universitat de les Illes Balears

Narcís Matas Tortosa

narcismatas@ceipmestrecolom.com

CEIP Mestre Colom (Bunyola – Illes Balears)

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

La geometría sigue siendo a día de hoy, un bloque olvidado, difícil de trabajar e incómodo para muchos docentes de este país. Desde este taller queremos mostrar una forma diferente de trabajar parte de este bloque con nuestros alumnos, de manera vivencial, significativa, manipulativa y motivadora tanto para el alumnado como para el docente. Para ello intentaremos llevar a cabo un nexo entre geometría y arquitectura, con diferentes actividades que pueden ser utilizadas y aplicadas tanto en situaciones de aprendizaje como en rincones o talleres. En este caso serán seis actividades donde trabajaremos la percepción visual, la organización espacial y la orientación espacial, las figuras planas y sus transformaciones, entre otras cosas.

Palabras clave: Geometría, arquitectura, conexiones, vivencial, significativo.

Introducción

Marco Lucio Vitruvio (arquitecto romano del siglo I a.C.) es el autor del tratado más antiguo sobre arquitectura que se conserva. En él, Vitruvio estableció tres principios ordenados sobre cómo debe de ser la arquitectura: “Firmitas, Utilitas y Venustas”; es decir: firme y duradera, útil o conveniente y bella o agradable (Carmona y Prado, 2023).

Si intentamos encontrar una definición concreta de arquitectura nos encontraremos con múltiples puntos de vista, según el artista, según la perspectiva, según la utilidad… En Torres (2014) podemos encontrar un compendio de estas definiciones, pero como indica ella, cualquier definición necesita un punto de vista particular y propio. Si pensamos desde el punto de vista matemático, podríamos quedarnos con la definición de Nikolau Pesvner:

Un edificio puede provocar sensaciones estéticas de tres maneras … La tercera manera también es en tres dimensiones, pero se refiere al espacio; más que las anteriores es propia del arquitecto. Las sensaciones estéticas se provocan por el efecto en nuestros sentidos del tratamiento del interior, la sucesión de los ambientes, el ensanchamiento de una nave en el crucero, el movimiento majestuoso de una escalinata barroca. Lo que distingue la arquitectura de la pintura y de la escultura es su característica espacialidad … Por tanto, la historia de la Arquitectura es, ante todo, la historia del hombre que modela el espacio (Pesvner, citado en Calcerrada, 2013).

A lo largo de la historia podemos encontrar numerosos ejemplos de la interesante conexión entre matemáticas y arquitectura. Los arquitectos (al igual que otros artistas) usan las matemáticas en su día a día, tanto en el cálculo y el diseño estructural de la construcción, como en la geometría de la visión espacial, necesaria para cualquier tipo de construcción.

Además de las consideraciones estructurales, las matemáticas también desempeñan un papel crucial en otros aspectos del diseño arquitectónico. Por ejemplo, el uso de principios matemáticos en el diseño de iluminación y acústica puede afectar significativamente el ambiente y la funcionalidad de un espacio.

Los principios arquitectónicos matemáticos se remontan a la antigüedad, cuando los arquitectos utilizaban geometrías simples, como cuadrados y círculos, para crear diseños armoniosos. También se usaron proporciones matemáticas, como la proporción áurea, que se consideraba el ideal de la belleza.

Sin embargo, a medida que el diseño arquitectónico evolucionó, también lo hizo el uso de las matemáticas. Los arquitectos modernos incorporan conceptos matemáticos complejos como fractales, teselaciones y topología.

Por desgracia, según Calcerrada (2013), podemos decir que hoy en día la figura del arquitecto casi ha desaparecido, figura que reúne al artista, al geómetra y al calculista. En nuestros días, los cálculos se dejan para el ingeniero, que es el que maneja las estructuras, el Arquitecto-Compositor diseña los planos y el Arquitecto Técnico es el responsable de que el constructor realice lo que se ha proyectado. Por tanto, la figura del geómetra simplemente ha desaparecido del escenario.

Conectando matemáticas y arquitectura con nuestros alumnos

Teniendo en cuenta todas esas matemáticas presentes en la arquitectura, podemos aprovechar la misma para ayudar al alumnado a descubrir que el sentido espacial es útil para la vida, valorando así a la geometría con la importancia que merece y de la que carece actualmente (Vargas y Gamboa, 2013).

Como indica el NCTM (National Council of Teacher of Mathematics) (2000), uno de los procesos básicos en la enseñanza de las matemáticas es la creación de conexiones y se debe conseguir que todos y cada uno de los estudiantes en los diferentes niveles reconozcan y apliquen las matemáticas en contextos fuera de las matemáticas.

Barrantes y Zapata (2008) consideran que el arte y la arquitectura son un buen punto de partida para conseguir un aprendizaje más significativo de la geometría. Al igual que ellos, podemos encontrar artículos o trabajos de fin de máster que trabajan la contextualización de las matemáticas con propuestas de estudio de edificios o elementos arquitectónicos de su entorno, por ejemplo, Sancho-Blanco (2021), Arjonilla-García (2023) o Díaz (2023).

Una de las mejores maneras de relacionar estos dos campos de los que hablamos son los paseos o rutas matemáticas. Estas propuestas implican el recorrido de zonas próximas (o no) al centro de los alumnos, planteando la observación de ese entorno desde una mirada matemática. Normalmente, son una gran oportunidad para desarrollar tareas motivadoras y transversales, además de ser una importante fuente de problemas, pidiendo a los alumnos que inventen, planteen, enuncien y formulen problemas, además de resolverlos, a partir de ese entorno social, cultural y comercial (Blanco y Blanco, 2020). Como podemos ver en el Cuadro 1, los diferentes referentes urbanos nos permiten trabajar muchos de los contenidos matemáticos.

Referentes urbanos	Contenido matemático
Fachadas y edificios	Identificación de figuras geométricas; movimientos en el plano, mosaicos y patrones.
Plazas, fuentes, arcos…	• Escalas, proporcionalidad; identificación de figuras geométricas y estimación/cálculo de sus dimensiones; análisis de los quioscos o templetes y de la configuración de los suelos. • Problemas numéricos en relación con la estimación de personas en la plaza, de grifos en las fuentes, estimación de peso y/o coste de bancos.
Estatuas, letreros	Cálculo de las alturas inaccesibles y proporcionalidad; fechas y datos numéricos de los letreros (algunos en números romanos).
Mobiliario urbano	Identificación de figuras geométricas y estimación y cálculo de sus dimensiones.
Escaleras, rampas	Ángulos, cálculo de pendientes, trigonometría.

Cuadro 1. Elementos del entorno urbano y tareas y contenidos matemáticos sugeridos. Extraido de Blanco y Blanco (2020).

Como se indica en Navas (2019), “según el tipo de pruebas, de cómo se llevan a cabo, del público al que van dirigidos y del entorno en el que se realizan, se pueden clasificar los paseos en siete categorías diferentes” (p. 120). Además, en la Imagen 1 podemos observar las recomendaciones para elaborar un paseo matemático que se hacen en el artículo de Arjonilla (2023).

Imagen 1. Recomendaciones para los paseos matemáticos. Extraído de Arjonilla (2023)

Finalmente, podemos indicar que, como en muchas de las propuestas de conexiones matemáticas, es muy difícil llevarlas a cabo siguiendo un libro de texto. Como nos explican Blanco y otros (2021), analizando la conexión arte-matemáticas en 24 libros de texto de primaria de Matemáticas y 24 de Educación Plástica a través de las manifestaciones artísticas presentes en ellos, se observa que la conexión ornamental prevalece sobre la contextual, la conceptual y la creativa y se desprende la necesidad de adaptar los libros de texto a la educación STEAM para potenciar las conexiones conceptuales y creativas, desde ambas asignaturas.

Actividades propuestas en el taller

En el taller intentaremos analizar una serie de propuestas para poder crear las conexiones entre arquitectura y matemáticas desde diferentes puntos de vista, para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sobre todo, del bloque de geometría. Las propuestas pueden llevarse a cabo en diferentes cursos y se intentará proponer actividades y diferentes variantes de las mismas.

Geometría de la ciudad

Una de las tareas de la arquitectura es la ordenación del espacio en las ciudades. Como nos indica Sorando (2008), a lo largo de la historia ha habido diferentes maneras de distribuir las ciudades y podemos observar como esos diseños geométricos se mezclan en las ciudades actuales. Así, los romanos distribuían las ciudades orientadas a partir de dos ejes de simetría, que venían marcados por las dos calles principales: el cardo (de norte a sur) y el decumanus (de este a oeste). Alrededor de estas calles se distribuían las demás de forma paralela y en la intersección de las dos calles estaba el Foro o lugar de encuentro. En algunas ciudades actuales como Valencia o Zaragoza aún podemos ver vestigios de esa distribución. Posteriormente, encontramos la ciudad medieval que viene marcada por los recintos amurallados. Las ciudades modernas se han producido ensanchando y creciendo a partir de esas construcciones iniciales y suelen distribuirse siguiendo tres formas geométricas: radiocéntrico, ortogonal o lineal. Dos ejemplos de esos tipos de ciudades se pueden observar en la Imagen 2.

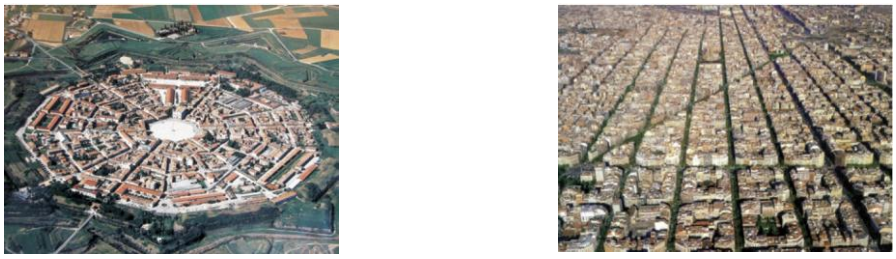


Imagen 2. Ejemplo de ciudad radiocéntrica (Palmanova, Italia) y de ciudad ortogonal (Barcelona). Extraído de Sorando (2008).

La idea de esta primera propuesta sería el estudio a fondo de mapas de ciudades o pueblos, estudiando los restos de esas ciudades primitivas o la distribución de las calles, las plazas y los edificios principales en esos mapas. Tanto podemos trabajar con:

- los mapas de la ciudad o el pueblo donde nos encontramos, para conocer nuestro entorno y para facilitar el reconocimiento y la orientación espacial;

- mapas o planos de ciudades con características especiales que nos permitirán trabajar conceptos concretos, como el plano de Nueva York

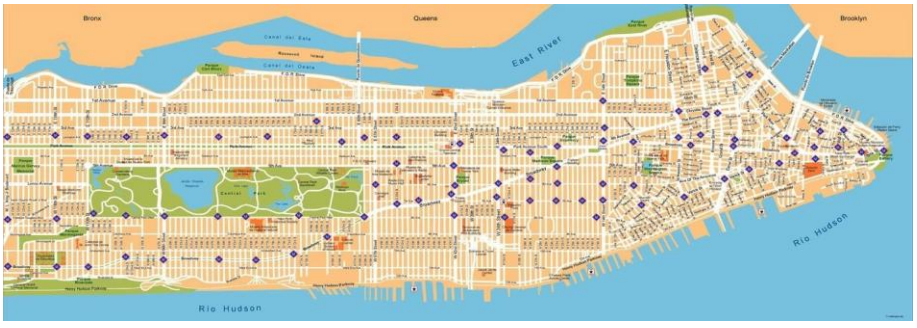


Imagen 3. Mapa de Nueva York, que nos permite trabajar los conceptos de línea paralela o perpendicular.

- la construcción de mapas o planos para poder indicar el recorrido de un punto a otro a nuestros compañeros;

- dictado de planos sencillos o de cuadrículas 4x4 o 5x5 con objetos situados sobre ella (se puede ver un ejemplo de estas actividades en la Imagen 4). Si hacemos referencia al dictado de mapas, debemos tener en cuenta que podemos hacerlo más sencillo poniendo una cuadrícula encima del plano y que la persona que debe dibujar también disponga de esa cuadrícula.

Imagen 4. Ejemplo de plano para hacer un dictado de mapas o ejemplo de la actividad de situar elementos en una cuadrícula.

En todos las propuestas anteriores debemos tener en cuenta que debemos cubrir los diferentes tipos de espacio que nos detalla Brousseau (1983):

- Microespacio: es aquel que se encuentra dentro de nuestro campo visual y se percibe sin necesidad de articular movimientos con la cabeza.

- Mesoespacio: es aquel que se encuentra al alcance de nuestro campo visual involucrando el movimiento de cabeza, no así el desplazamiento corporal.

- Macroespacio: es aquel que requiere el desplazamiento del individuo para poder percibirlo en su totalidad.

Con estas propuestas podemos trabajar los saberes básicos de “Localización y sistemas de representación” y de “Movimientos y transformaciones” del bloque de Sentido Espacial de los tres ciclos y de Educación Infantil.

Las medidas de un edificio

Como sabemos, la línea que separa la geometría de la medida es una línea delgada, difícil de marcar. De hecho, la palabra geometría proviene de la palabra “geo” - tierra y “metrein” - medir. Además, en los saberes básicos del bloque de Sentido Espacial encontramos “Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas en

situaciones de la vida cotidiana". Por tanto, podemos plantear todo tipo de actividades que nos relacionen estos dos contenidos, relacionándolos con la arquitectura.

Como indican diferentes artículos y páginas web (Fonseca, 1994 y Sanfulgencio,

2024), hay ciertas medidas que son básicas para el trabajo de cualquier arquitecto que están presentes en casi cualquier obra, que están íntimamente relacionadas con las dimensiones del cuerpo humano. Uno de los primeros que tuvo en cuenta esta idea fue Vitruvio (mencionado en la introducción), el cual ya en el siglo I a.C. ya hizo un intento de fijar estas medidas antropomórficas básicas.

En este primer bloque podríamos trabajar estas medidas básicas de las personas, haciendo un estudio estadístico, a partir de personas de diferentes edades del entorno de los alumnos. A partir de aquí podríamos plantear diferentes problemas:

- ¿Cómo varían las medidas en diferentes edades? Si queremos tenerlas en cuenta para la construcción de una casa en general, ¿cuál de ellas debemos tener en cuenta?

- ¿Cuáles serían las medidas mínimas que podría tener una casa? Podríamos recoger información de tiendas de muebles o de medidas de muebles también.

- ¿Sería suficiente tener la información de la altura de las personas?¿nos hacen faltas las medidas en diferentes posiciones de las personas? (consultar Sanfulgencio (2024) para posibles respuestas, por ejemplo). Le Corbusier (1980) intentó dar respuestas a este problema y podemos ver una de sus más conocidas ilustraciones en la Imagen 5.

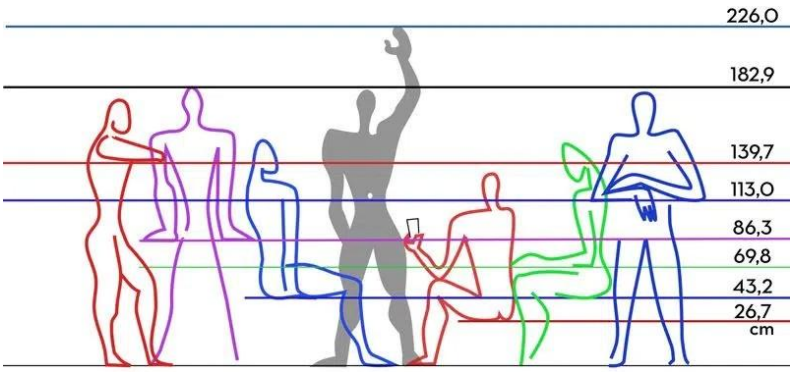


Imagen 5. El Modulor de Le Corbusier con las proporciones que usó para diseñar muchos de sus edificios.

A continuación podríamos trabajar el área y el perímetro de las casas o de las habitaciones de las casas. Este trabajo implica un estudio previo del concepto de área y perímetro, más allá del cálculo con fórmulas, intentando el aprendizaje significativo de estos términos. Este trabajo previo se puede llevar a cabo con diferentes

materiales manipulativos como policubos, regletas o geoplanos, intentando hacer el estudio de estos conceptos de figuras planas que no sean las figuras comunes que estudiamos en general, viendo como la composición y la descomposición nos permite el cálculo de estas dimensiones. Posteriormente, podemos aprovechar para estimar y calcular el área y/o el perímetro de cosas de nuestro entorno: mesas, baldosas, elementos de la pizarra, el huerto escolar, la clase…

El estudio del área de la clase, empezando por la estimación y llegando al cálculo completo, nos puede llevar a ver que nuestra aula puede ser más grande que un piso convencional (si el aula es suficientemente grande) y puede invitar a intentar diseñar la distribución de un piso en nuestro aula (podemos observar la secuencia en la Imagen 6). Esta actividad nos lleva a:

- Pensar la distribución del piso y que habitaciones debemos colocar. Se puede unificar el criterio de las personas que tienen que vivir en él.
- Diseñar y dibujar el piso en una pizarra vileda para poder borrar y rectificar con facilidad. Podemos hacer diferentes vistas del piso, intentando aclarar cuál es la vista ideal para trabajar.
- Posteriormente, pasamos la distribución creada al cuaderno, pero intentando hacerlo a escala real. Para ello debemos ponernos de acuerdo en la escala que usamos y cómo podemos tener idea de las medidas reales que tendríamos. Una buena idea sería usar las baldosas como referencia.
- Finalmente, podemos elegir entre todos los diseños realizados cuál sería el que nos gusta más, o podemos hacer una mezcla de los diferentes diseños. Esta elección podríamos construirla dentro del aula, usando cinta adhesiva, para poder observar el resultado final más fácilmente.

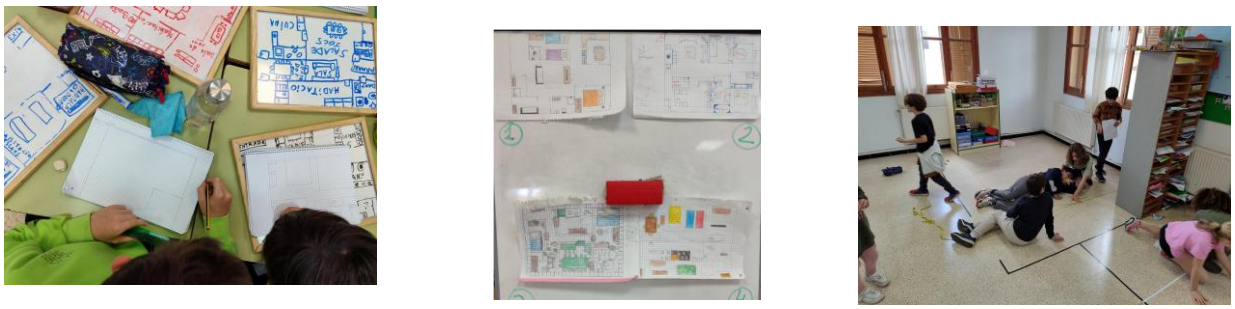


Imagen 6. Secuencia de la actividad llevada a cabo en una aula de primaria.

Edificios y su modelaje

Como hemos indicado previamente, los paseos matemáticos son una fuente muy importante para trabajar el nexo de la arquitectura y las matemáticas. A partir de estos recorridos podemos observar los diferentes edificios que forman nuestro entorno y observarlos con las gafas matemáticas, descubriendo sus elementos, viendo cómo los podemos representar, qué figuras geométricas aparecen… Un trabajo que podemos realizar es intentar construir esos edificios, imitando sus formas, a partir de material manipulable. También podemos usar software como el geogebra, o otros similares.

El estudio de las columnas de los edificios nos proporciona una gran fuente de información matemática, conocimientos un tanto elevados para infantil o primaria, pero que nos permitiría hacer comparaciones entre los diferentes tipos de arcos o construir arcos básicos como el arco romano o de medio punto. Estas construcciones nos permitirán introducir al alumnado en el uso del compás o de la regla. Tenemos diferentes fuentes sobre el tema en Sánchez (2011).

Finalmente, en este bloque podríamos hacer un estudio en profundidad de los rascacielos: tipos que hay, los más famosos, medidas…

La introducción de estos nos permitirá jugar a un juego de lógica llamado “Juego de los Rascacielos”. Es un juego que permite trabajar la situación en el espacio y las vistas bidimensionales y tridimensionales. Es un juego que tiene mucho que ver con el sudoku. Se puede plantear desde infantil hasta tercer ciclo. Para jugar necesitamos unas plantillas, realizadas en una cuadrícula de 4×4, y 16 edificios (que se pueden construir mediante policubos): 4 edificios de 1 altura, 4 de 2 alturas, 4 de 3 alturas y 4 de 4 alturas. Se puede ver un ejemplo en la Imagen 7.

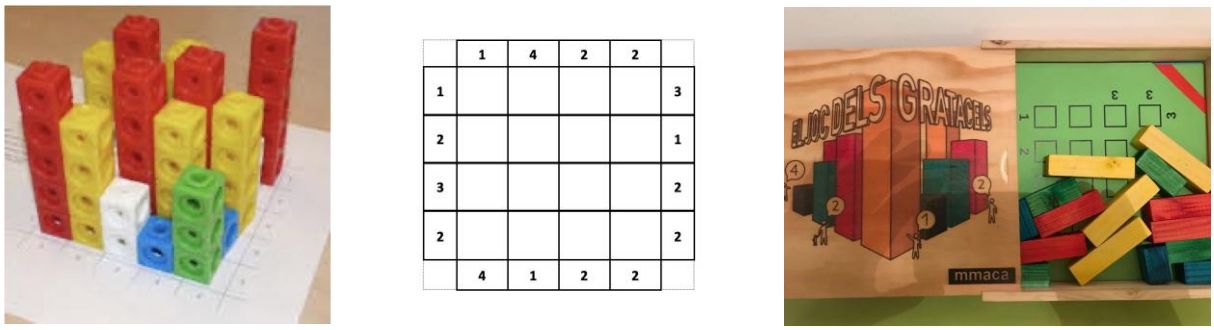


Imagen 7. Ejemplo del “Juego de los Rascacielos”, plantilla del juego, juego comercializado por el MMACA.

Las normas son las siguientes:

- El número que hay en el margen indica los edificios que se alcanzan a ver en esa fila o columna (los edificios mayores tapan a los más pequeños).
- En cada fila o columna sólo puede haber un edificio de cada tamaño. Una vez que se controla el funcionamiento del juego, se pueden hacer diferentes propuestas como: complicar las plantillas, poniendo menos números en estas, pedir que sea el alumnado el que genere nuevas plantillas, que los alumnos averigüen en una plantilla completa que números son redundantes y cuáles no, …

Los planos de un edificio

Cuando un arquitecto se enfrenta a un proyecto nuevo, ya sea una reforma o una construcción nueva, el primer trabajo que se debe realizar son los planos arquitectónicos. En estos se pueden representar distintos elementos que van desde las características del terreno en donde se pretende construir, los cimientos, muros, fachadas, distribución, instalaciones y más. Incluso puede realizarse un plano en donde se especifique la ubicación de elementos de decoración y mobiliario. Estos planos son básicos para pedir los permisos de construcción.

Los planos de una casa presentan diferentes representaciones de la misma desde diferentes puntos de vista. Como se puede ver en el ejemplo de la Imagen 8, las vistas que solemos representar en los planos son las vistas aéreas, desde la parte de arriba (planta), de un lado (perfil) y de frente (alzado).

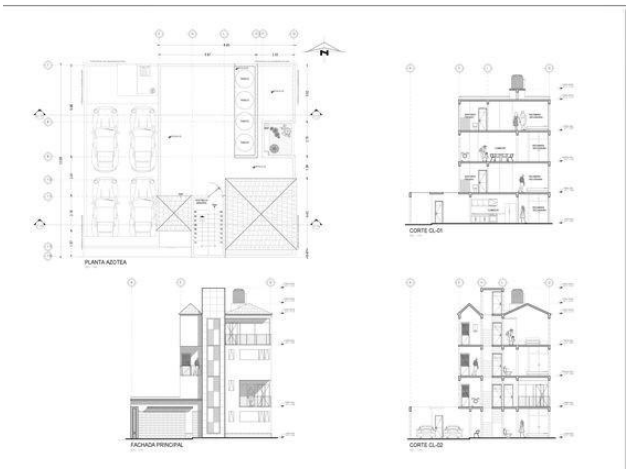


Imagen 8. Planos de un proyecto arquitectónico con diferentes vistas.

Relacionando esos planos con las matemáticas, nos podemos plantear cómo trabajar en nuestras aulas las relaciones entre las figuras de dos dimensiones (2D) y las de

tres dimensiones (3D). Una de las primeras propuestas que podemos realizar es ofrecer a los alumnos las vistas 2D de un figura de 3D, como las que se muestran en la Imagen 9 a la izquierda, y proponerles que construyan una figura en 3D usando policubos que sería representada por esas vistas. En la Imagen 9 a la derecha vemos una posible solución.

A raíz de esta actividad surgen diferentes preguntas y modificaciones que podemos realizar en la actividad:

- Plantear si podría haber más de una solución de las tres vistas dadas.
- Dar solo dos vistas, en lugar de tres, y construir todas las figuras posibles.
- Que sean ellos los que construyan una figura tridimensional y dibujen sus vistas.
- Dar las vistas a partir de parrillas con números que indican la altura de policubos que hay en cada posición.

Imagen 9. Izquierda, propuesta de las vistas en 2D de la figura de 3D. Derecha, ejemplo de figura de 3D.

Este tipo de actividades nos permitirá iniciar las relaciones entre las figuras de 2D y 3D, ayudando a actividades posteriores como los desarrollos planos de las figuras 3D, o problemas cómo averiguar qué pentominos (figura formada por cinco cuadrados que comparten al menos un lado en común) son la representación plana de una caja sin tapa.

La visualización es una de las partes más olvidadas en la geometría, pero es una de las más necesarias en el día a día. Por tanto, propuestas como las que hacemos aquí implican mejorar la competencia matemática, ayudando también en asignaturas como el Dibujo Técnico.

Estudio de simetrías

Como nos indican García y Rodríguez (2018), “una de las primeras características que llaman la atención a la hora de observar una obra arquitectónica es la presencia

(o ausencia) de simetrías". En la arquitectura las simetrías producen estabilidad, orden y hacen que la percepción de los edificios sea más bella.

La simetría es un concepto básico desde Educación Infantil hasta los niveles altos de Primaria. Como dice el currículum, en todos los ciclos debemos de estudiar los movimientos y las transformaciones mediante simetría. De la misma forma, usando la clasificación de figuras planas o de cuerpos geométricos podemos descubrir la simetría como una de las propiedades de los mismos, que nos permite distinguir y definir a estos. Así, el estudio de los ejes de simetría de una figura plana puede ser una de las actividades que podemos aplicar a la arquitectura, intentando descubrir los ejes de simetría de diferentes edificios.

Para ello, previamente, debemos haber explicado el concepto usando el libro de espejos u otros materiales manipulativos como el geoplano. Así, con el libro de espejos podemos ver cómo podemos crear los diferentes polígonos a partir de una simple línea y abriéndolo en diferentes ángulos de apertura. Posteriormente, podemos intentar crear diferentes propuestas de figuras usando el mínimo de piezas del geomosaico. Podemos ver algunos ejemplos en la Imagen 10.

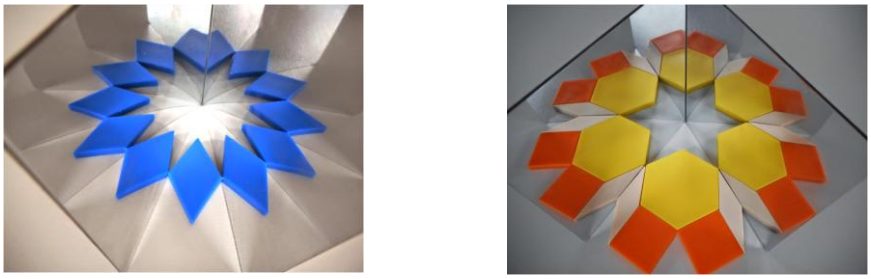


Imagen 10. Ejemplos del uso del libro de espejos con las piezas del geomosaico.

Como hemos indicado, también podemos llevar a cabo diferentes actividades a partir del geoplano, estudiando los ejes de simetría de diferentes figuras o crear figuras simétricas a otras a partir de ejes externos a la figura. En la Imagen 11 podemos ver dos ejemplos de este tipo de actividades.

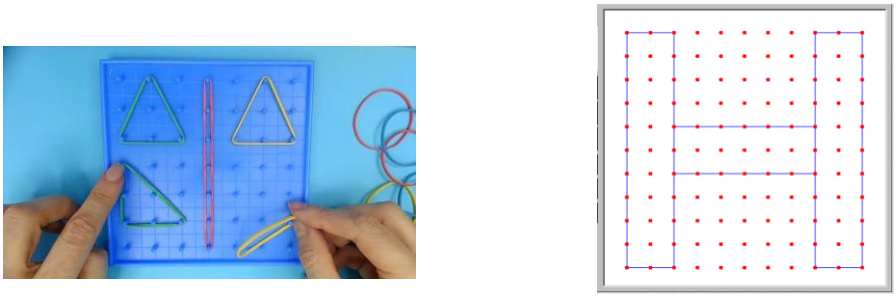


Imagen 11. Diferentes ejemplos de trabajo de simetrías con el geoplano.

Cuando el concepto de eje de simetría está asimilado podemos intentar encontrar estos ejes en plantas de edificios famosos, dividiendo estos en regiones marcadas por estas simetrías o por las ausencias de estas. Dos buenos ejemplos para llevar a cabo esta actividad serían la planta de la Basílica de San Pedro del Vaticano o la Place des Vosges en Paris (ver Imagen 12).

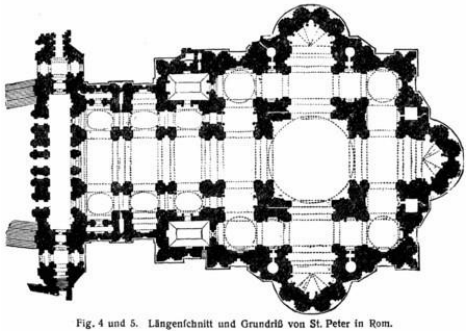


Imagen 12. Planta de la Basílica de San Pedro del Vaticano e imagen de la Place des Vosges de Paris.

En García y Rodríguez (2018), nos proponen una actividad de observación de edificios o construcciones con ojos matemáticos, en la cual los alumnos deben completar una ficha a partir de la observación. Dicha actividad la podríamos simplificar para que fuera más adecuada para primaria. La actividad sería:

- Primera fase: describe las impresiones al contemplar la obra:
    - ¿Te parece bello?¿Te gusta?
    - ¿Es simple o te parece complicado?
    - ¿Te parece que es estable o que se puede caer?
    - ¿Te queda claro cómo lo construyeron y las partes que tiene?
- Segunda fase: identifica y clasifica los principales elementos que la conforman:
    - ¿Qué tipo de rectas predominan?
    - ¿Hay alguna forma que se repite?
    - ¿Puedes distinguir algunas figuras planas que conoces?
    - ¿Puedes distinguir figuras que te recuerdan elementos de la naturaleza o de la vida real?
    - ¿Hay alguna forma escondida que no se puede ver del todo?

- Tercera fase: analiza las relaciones entre elementos:
    - ¿Hay simetrías?¿De qué tipo?
    - Si pudieras medir las diferentes partes, ¿crees que hay partes que miden lo mismo?¿Y partes que son proporcionales a otras?
    - Si miramos las diferentes líneas, ¿cómo crees que están colocadas?¿Son paralelas, perpendiculares, oblicuas, tangenciales,

      …?
    - ¿Puedes distinguir ángulos importantes en la construcción?¿Qué medidas tienen?
    - ¿Hay partes que se repiten?¿Y partes que se han rotado de un lugar a otro o que se ha realizado una simetría?

Realizando este tipo de análisis se puede trabajar una gran cantidad de vocabulario geométrico, aparte de conseguir una nueva mirada de edificios singulares de nuestro entorno o edificios famosos del mundo.

Baldosas y mosaicos

No podemos terminar el taller sin hablar de una de las partes decorativas más importantes de los edificios: el embaldosado y los mosaicos. Un mosaico o embaldosado debe tener la característica de que está formado por diferentes elementos que cubren el plano sin sobreponerse y sin dejar huecos. Las piezas que se usan se denominan teselas, por lo que estas composiciones se denominan teselaciones del plano.

Es muy interesante observar como los mosaicos han formado parte de los edificios de diferentes culturas y poder observar las diferencias entre estos mosaicos.

Podemos intentar crear una línea temporal situando esos mosaicos, por las características de los mismos.

Para trabajar con las teselas es importante, inicialmente, trabajar con los mosaicos más sencillos formados por polígonos regulares de un mismo tipo. Observaremos que, en ese caso, tenemos sólo tres posibilidades: mosaicos formados por triángulos equiláteros, por cuadrados o por hexágonos regulares. Debemos plantear al alumnado porque no hay otros polígonos regulares que nos permitan embaldosar el plano, llegando a la conclusión que necesitamos que los ángulos de los polígonos sean divisores de 360º.

Otro de los trabajos iniciales que podemos realizar con el alumnado es el estudio de las baldosas cuadradas, divididas en dos partes iguales con la misma superficie. Como nos indica Vilches (2020), puede ser una actividad que motive al alumnado si lo planteamos como una actividad creativa, en la cuál cada alumno puede crear diferentes baldosas que cumplan esa condición, poniendo un nombre a cada una de ellas. Con los infantes más mayores, intentaremos que descubran que hay una gran variedad de baldosas de este tipo y así poder relacionarlo con la idea de fracción.

Una de las baldosas que podemos usar en nuestro trabajo son las baldosas de "mocadoret", muy típicas de Mallorca. Este tipo de baldosas cuadradas, están divididas en dos partes por la diagonal y cada una de las partes está pintada de un color diferente (ver Imagen 13). Una propuesta inicial podría ser intentar construir todos los cuadrados diferentes usando cuatro baldosas de "mocadoret" (podemos observar un ejemplo en la Imagen 13).

Imagen 13. Imagen de la baldosa de "mocadoret" y dos composiciones diferentes de la misma.

Las propuestas de actividades con mosaicos pueden ser muy variadas y complejas, desde construir mosaicos con dos piezas diferentes del geomosaico, como estudiar la construcción del hueso nazarí (ver Imagen 14), figura característica de algunos mosaicos musulmanes del al-Ándalus.

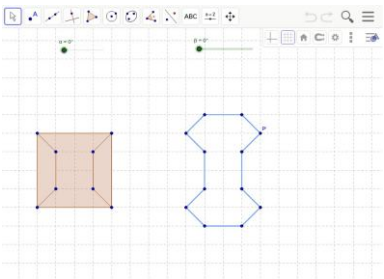


Imagen 14. Construcción del hueso nazarí usando Geogebra.

Conclusiones

En este taller hemos presentado una serie de propuestas para trabajar la geometría usando como contexto la arquitectura. Las propuestas nos enseñan como la unión de estas dos disciplinas permite idear una gran variedad de situaciones de aprendizaje, donde el alumnado podrá descubrir la visualización del espacio, trabajar la situación y la organización espacial y aprender las principales características de las figuras planas y los cuerpos geométricos.

Como nos indica Vilches (2020), en el tipo de actividades que nos involucra es importante definir el contenido matemático que se desea trabajar, hacer buenas preguntas, priorizar las competencias a los contenidos e incluir actividades creativas.

Por tanto, es imprescindible tener claro lo que queremos conseguir con este tipo de actividades, teniendo en cuenta, que dar un buen contexto a una actividad no es suficiente para que sea significativa y que mejore la atención y el aprendizaje del alumnado.

Referencias

Arjonilla-García, P. J. (2023). *El sentido espacial de las matemáticas en la arquitectura a través del aprendizaje basado en proyectos en 3º de ESO* (Master's thesis). Universidad Internacional de la Rioja. España.

Barrantes, M., y Zapata, M. A. (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas.* Dehesa, repositorio institucional.

Universidad de Extremadura. España.

Blanco, L. J., y Blanco, B. (2020). Mirar la ciudad con ojos matemáticos. U*no:*

Revista de didáctica de las matemáticas, (87), 7-13.

Blanco, T. F., González-Roel, V., Diego-Mantecón, J. M., y Ortiz-Laso, Z. (2021). Análisis de la conexión arte-matemáticas en los libros de texto de Educación Primaria. *Educación matemática,* 33(3), 67-93.

Brousseau, G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple: la geometrie. *Seminaire de didactique des mathematiques et de l'informatique*. IMAG, LSD. Grenoble.

Calcerrada, F. (2013). *Las matemáticas y la arquitectura*. Departamento de matemáticas. Universidad Politécnica de Madrid. España.

Carmona y Prado, M.J. (2023). *Matemáticas aplicadas en arquitectura. Algunos problemas*. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Arquitectura.

Corbusier, L., Vera, R., y Junyent, A. (1980). *El modulor*. Poseidón.

Díaz, M. D. P. M. (2023). *Mirada Matemática de la Sagrada Familia de Antoni Gaudí. De la fotografía al microrrelato matemático*. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19(69), 1 – 21.

Fonseca, X. (1994). *Las medidas de una casa*. Editorial Pax México.

García, P., y Rodríguez, J. (2018). *Las matemáticas del arte: más allá del número de oro*. Los libros de la Catarata.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Navas, J. (2019). Seminario federal: paseos matemáticos. *Suma*, 90, 119 – 125.

Sánchez Sánchez, N. (2011). *Geometría de los arcos: guía para la construcción y trazado de arcos.* Consejería de Educación, Formación y Empleo. Región de Murcia. España.

Sancho-Blanco, V. (2021). *La Zaragoza mudéjar escenario didáctico para el*

Aprendizaje Basado en Proyectos en la geometría de 3o Educación Secundaria Obligatoria (Master's thesis). Universidad Internacional de la Rioja. España.

Sanfulgencio, J. (26 de abril de 2024). *50 medidas que todo arquitecto debería saberse de memoria.* Arrevol Arquitectos Blog. https://arrevol.com/blog/

Sorando Muzás, J. M. (2008). *La ciudad y las matemáticas.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Badajoz. España.

Torres, M. (23 de octubre de 2014). *¿Qué es arquitectura? Ideas y contradicciones*.

Adici. Aula Digitalde la Ciudad.

https://www.adici.org/noticias/que-es-arquitectura-marta-torres-gonzalez/

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74 – 94.

Vilches, S. (2020). Elefantes, estrellas, baldosas y rotondas: Estrategias para la autorregulación del aprendizaje. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (87), 31-37.

Integrando el Pensamiento Computacional en 2º y 3er Ciclo de Educación Primaria y 1º Ciclo de la ESO

Ángel A. García Marrero
aagm38@gmail.com
Escuelas Pías Tenerife

Ana Rosa Díaz Rodríguez
adiarodp@gobiernodecanarias.org
Consejería Educación Gobierno de Canarias

Nieves R. González Arrocha
nievesglezarrocha@gmail.com
Escuelas Pías Tenerife

Núcleo temático: Procesos y Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria (2º y 3er. Ciclo, ampliable 1º ESO)

RESUMEN

El taller de pensamiento computacional (PC) estará dirigido a los métodos de enseñanza utilizados para acercar las habilidades como la resolución de problemas, el pensamiento lógico y crítico y la creatividad. Creemos que el PC debe enseñarse utilizando primero actividades desconectadas para que los estudiantes puedan captar las ideas antes de adentrarse en la tecnología. Las actividades desconectadas son fáciles de conseguir, fomentan el trabajo en equipo entre los estudiantes y ayudan a desarrollar una comprensión sólida de los principios básicos. Para demostrar cómo la mecánica de los juegos conduce al pensamiento computacional, veremos la correlación entre los juegos y el pensamiento computacional. También estudiaremos diferentes metodologías de enseñanza ya que cada alumno tiene necesidades de aprendizaje específicas.

El objetivo principal de la formación es enseñar a los participantes a incluir el PC en la enseñanza de forma eficaz. Para ello, aplicaremos una metodología participativa y

reflexiva en nuestro trabajo y, como resultado, generaremos estrategias que sean lo suficientemente prácticas para ser implementadas en el aula.

Palabras clave: Pensamiento computacional, Actividades desenchufadas, Scratch.

Taller: Integrando el Pensamiento Computacional en 2º y 3er Ciclo Educación Primaria y 1º Ciclo de la ESO

Introducción

En un mundo cada vez más digitalizado, es esencial preparar a los estudiantes con habilidades que les permitan enfrentar los desafíos del siglo XXI. El pensamiento computacional emerge como una competencia fundamental en este contexto, brindando a los estudiantes herramientas para resolver problemas de manera efectiva y creativa. Este taller tiene como objetivo explorar estrategias metodológicas y didácticas para integrar el pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas en segundo y tercer ciclo de educación primaria y primer ciclo de la ESO.

Líneas Metodológicas y Didácticas

El enfoque metodológico de este taller se basa en las siguientes líneas:

Experimentar: Se fomentará la experimentación activa como medio para descubrir conceptos matemáticos y desarrollar habilidades computacionales. Los estudiantes tendrán la oportunidad de manipular materiales concretos y participar en actividades prácticas que les permitan explorar diferentes conceptos matemáticos de manera tangible.

Descubrir: Se promoverá el descubrimiento guiado, permitiendo que los estudiantes exploren y construyan su propio conocimiento. Los educadores actuarán como facilitadores, planteando preguntas orientadoras y proporcionando oportunidades para la exploración independiente.

Comprender: Se priorizará la comprensión profunda sobre la memorización superficial, utilizando ejemplos concretos y situaciones reales para conectar los conceptos matemáticos con la vida cotidiana. Los estudiantes serán desafiados a explicar sus procesos de pensamiento y a buscar conexiones entre diferentes áreas del currículo matemático.

Verbalizar: Se alentará a los estudiantes a verbalizar sus procesos de pensamiento, explicando sus razonamientos y estrategias utilizadas para resolver problemas. Se promoverá el lenguaje matemático preciso y se proporcionarán oportunidades para la comunicación oral y escrita.

Aplicar: Se incentivará la aplicación práctica de los conceptos aprendidos en diferentes contextos, promoviendo la transferencia de conocimiento y habilidades. Los estudiantes serán desafiados a aplicar lo que han aprendido para resolver problemas del mundo real y para participar en proyectos interdisciplinarios.

Además, se fomentará el trabajo colaborativo y la interacción entre estudiantes como medio para enriquecer el aprendizaje y promover el intercambio de ideas. La discusión será un elemento central en el aula, permitiendo a los estudiantes reflexionar sobre sus propias ideas y comprender mejor los conceptos matemáticos. Se utilizará el error como una oportunidad de aprendizaje, alentando a los estudiantes a analizar y comprender sus errores para mejorar su comprensión.

Pensamiento Computacional

El pensamiento computacional se basa en los pilares de descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, algoritmos, lógica y evaluación. Estos conceptos se aplican en la resolución de problemas matemáticos de la siguiente manera:

Descomposición: Dividir un problema complejo en problemas más pequeños y manejables. Esto permite a los estudiantes abordar grandes problemas de manera sistemática y resolverlos paso a paso.

Reconocimiento de Patrones: Identificar regularidades o secuencias repetitivas en los datos o situaciones problemáticas. Los estudiantes aprenderán a buscar patrones en los datos y a utilizar esta información para predecir resultados futuros.

Abstracción: Simplificar la información, ignorando detalles irrelevantes para centrarse en lo esencial. Esto permite a los estudiantes concentrarse en los aspectos más importantes de un problema y desarrollar una comprensión más profunda.

Algoritmos: Desarrollar una secuencia ordenada de pasos para resolver un problema de manera eficiente. Los estudiantes aprenderán a diseñar algoritmos para resolver problemas matemáticos y a evaluar la eficacia de sus soluciones.

Lógica: Aplicar el razonamiento lógico para analizar y evaluar posibles soluciones. Los estudiantes aprenderán a pensar de manera crítica y a utilizar la lógica para tomar decisiones informadas en situaciones matemáticas.

Evaluación: Reflexionar sobre el proceso y los resultados obtenidos, identificando posibles mejoras o alternativas. Los estudiantes aprenderán a evaluar sus propias soluciones y a buscar oportunidades de mejora continua.

Actividades Desconectadas

Las actividades desconectadas son una herramienta poderosa para trabajar el pensamiento computacional sin necesidad de dispositivos digitales. Estas actividades son lúdicas, kinestésicas, intuitivas y fomentan el aprendizaje constructivista. Algunos ejemplos de actividades desconectadas incluyen juegos de mesa, rompecabezas, actividades de modelado con materiales manipulativos y desafíos matemáticos basados en situaciones reales.

Beneficios del Pensamiento Computacional

Integrar el pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas ofrece numerosos beneficios, entre ellos:

- Organizar y analizar información de manera lógica.
- Desarrollar habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico.
- Fomentar la creatividad y la innovación.
- Preparar a los estudiantes para enfrentar los desafíos del mundo digital.
- Promover una comprensión más profunda y significativa de los conceptos matemáticos.

A partir de aquí se relacionan las diferentes actividades que se llevarán a cabo dentro del taller:

https://www.canva.com/design/DAGDkJxnBsc/2NtsuAuSUUiSKGXRgiRaEA/edit?utm_content=DAGDkJxnBsc&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton

Conclusión

En resumen, el pensamiento computacional es una competencia fundamental que debe ser desarrollada en los estudiantes desde una edad temprana. Al integrar el pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas en educación primaria y primer ciclo de la ESO, podemos preparar a los estudiantes para enfrentar los desafíos del siglo XXI y equiparlos con habilidades que les serán útiles en todas las áreas de sus vidas. Con un enfoque metodológico y didáctico centrado en la experimentación, el descubrimiento, la comprensión, la verbalización y la aplicación, podemos proporcionar a los estudiantes las herramientas necesarias para convertirse en pensadores críticos y competentes en el uso de la tecnología.

Referencias

1.- Bibliografía

- Bell, T.; Witten, I.H. y Fellows, M. (2008). *Computer Science Unplugged. Un programa de extensión para niños de escuela de Primaria.* Traducido por Rodríguez A.; Mendoza, L. y Garza, C.E.
- Bordignon,F. e Iglesias, A. (2020). *Introducción al pensamiento computacional*. DG Tamara Pereyra. UNIPE. Argentina.
- Bordignon,F. e Iglesias, A. (2020). *Resolución de problemas con apoyo del pensamiento computacional.* UNIPE. Argentina.
- García Rodríguez, E. y Ramírez Aceves, LP (2022). *Guía de estudio.*

  Actividades desenchufadas. Alfa Digital. México.
- Posada Prieto, Fernando (2002). *Pensamiento computacional y currículum.*

  Algo más que aprender a programar.

Webgrafía

www.programamos.es

www.codeweek.edu

www.bebras.org

https://scratch.mit.edu/projects/editor/

https://www.scratchjr.org/

https://www.google.com/doodles/celebrating-50-years-of-kids-coding

https://ide.mblock.cc/

https://pencilcode.net/edit/first

https://beebot.terrapinlogo.com/

https://pilasbloques.program.ar/

https://aprendoaprogramar.com/

https://www.kodugamelab.com/

https://code.org/

https://www.tynker.com/

https://www.tynker.com/dashboard/student/#/hour-of-code/

https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/1

www.unipe.edu.ar

https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/pedagotic/files/2022/11/cd-12-0000001-pensamiento-computacional.pdf

https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/educarobot/participa2223/

https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/educarobot/

Estimaciones en el aula de Primaria

Francesc-Xavier Fernández Berges

xfernan1@xtec.cat

Grup Perímetre Girona - Escola L'Estació Sant Feliu de Guíxols

Anna Rodríguez Casas

anrodriguez@fedac.cat

Grup perímetre Girona / Escola Fedac Sant Narcís – Girona

Marta Aragüés Vidal

maragues2@xtec.cat

Grup Perímetre Girona / Escola Pompeu Fabra . Anglès

Núcleo temático: Procesos, recursos para el aula.

Modalidad: Taller, .

Nivel educativo: Educación Primaria,

RESUMEN

A veces, nuestro alumnado no es capaz de reconocer un posible error de cálculo. A menudo seleccionamos un tupper demasiado grande para guardar la verdura en la nevera. O, sencillamente creemos que se nos da mal calcular el paso del tiempo. Seguramente esto se produce porque no nos hemos parado a pensar ANTES de realizar esta acciones qué resultado nos parecería posible y qué error consideraríamos como aceptable. A través de actividades prácticas con diferentes materiales veremos que se puede aprender a estimar (tanto en el sentido de tantear un resultado como en el de amar, en nuestro caso, las matemáticas).

Palabras clave: Procesos, primaria, estimación, medida, numeración.

DESARROLLO DEL TALLER:

1. Estimaciones

El taller pretende, a partir de actividades prácticas y de materiales diferentes, proponer situaciones ricas en las que es conveniente hacer buenas previsiones de resultados, con el apoyo de situaciones similares, más reducidas y comprensibles que

sirvan para obtener una referencia. En matemáticas, estimar comporta, a menudo, la idea de redondear, de aproximar.

Dividiremos el tiempo de trabajo en 3 partes:

- Unas cuantas situaciones motivadoras, pequeños retos que nos hagan descubrir la necesidad de trabajar las estimaciones, las previsiones, la comparación con referencias conocidas y el dominio de la percepción.
- Unas cuantas actividades simultáneas por las que irán pasando los asistentes con pequeños retos de medida, percepción de cantidades y de cálculo.
- Un espacio para poner en común las actividades realizadas y poder crear y compartir alguna más.

2 Situaciones motivadoras

Podemos ponernos a prueba con diferentes actividades, siempre a partir de preguntas:

- ¿Cuánto dura un minuto?
- El papel con el que trabajamos ¿es de buena calidad?
- ¿Sabrías distribuir sucesos del pasado en la línea del tiempo?
- ¿Qué recordamos del espacio en el que estamos con los ojos cerrados?

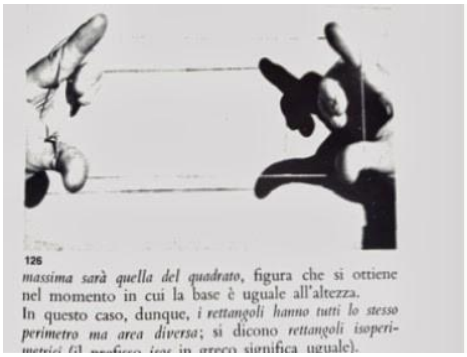
En todas ellas intervienen nuestros sentidos, nuestra memoria, la capacidad de relacionar lo que buscamos con alguna referencia conocida y, también, la gestión del error y de las emociones. Alguna de las actividades volverán a realizarse al final del taller para constatar la capacidad que todos y todas tenemos de aprender a hacer buenas estimaciones.

3. Actividades

A partir de 8 actividades simultáneas vamos a descubrir cómo adiestrar la capacidad de hacer buenas previsiones. En casi todas ellas se muestra una situación que viene acompañada por un modelo o ejemplo más sencilla (o una visualización simplificada) de la situación. Los asistentes, por parejas, van pasando por todas y cada una de las situaciones, usando los materiales, recursos y técnicas que consideren adecuados.

Aunque hay muchísimas actividades que podríamos usar, proponemos éstas:

- ¿Cuánto pesa el agua del acuario?
- ¿Qué cuerda es de un metro?
- Dibuja una longitud determinada en un papel
- Ordenamos pesos comparando de 2 en 2
- ¿Sabríamos prever el perímetro de diferentes objetos redondos?
- ¿Cuántos garbanzos hay en un Kg?
- ¿Cuál es la altura del señor de la foto?
- ¿Qué vale más, 66 x 68 ó 67^2?


126
massima sarà quella del quadrato, figura che si ottiene nel momento in cui la base è uguale all'altezza.
In questo caso, dunque, *i rettangoli hanno tutti lo stesso perimetro ma area diversa*; si dicono *rettangoli isoperi-*

Según el tiempo disponible podremos visitar todas o gran parte de las actividades, aunque quizá lo más importante sea la puesta en común.

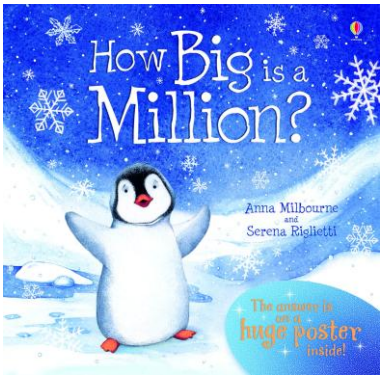
4. Puesta en común

Una de las claves del trabajo en el aula es dejar que nuestro alumnado comparta los descubrimientos que ha realizado y, también, las dificultades que ha tenido que superar. Un espacio de conversación matemática se hace imprescindible después de realizar este tipo de actividades. Resulta altamente enriquecedor y confiere la seguridad que el grupo puede dar a cada uno de los participantes.

Si es posible, cada pareja diseñará y compartirá, para acabar, una situación nueva, adecuada a la edad y circunstancias de sus propios alumnos.

5. Y además…

Comentaremos algunos recursos que podemos encontrar en la red, juegos y, cómo no, un cuento. O dos.



6. Conclusiones

- Las estimaciones se pueden adiestrar
- La estimación es parte del aprendizaje.
- La estimación forma parte del proceso de generalización
- Usamos las estimaciones para introducir conceptos y también para evaluarlos.
- Nos permite prevenir y corregir el error. Es una oportunidad para aprender.
- Estimar consiste en hacer un juicio de valor a partir de datos conocidos y de las circunstancias de quien realiza la estimación.
- Podemos hacer estimaciones de cálculos, de cantidades, de medidas, de datos desconocidos…
- Redondear para calcular, contar una muestra, usar casos más pequeños… son algunas de las técnicas que nos permiten afinar cada vez más nuestras estimaciones.

Referencias

Canals, M.A. (2009). *Els dossiers de la Maria Antònia Canals 108. Mesures i geometria.* Rosa Sensat. Barcelona

Formando pensadores matemáticos. La importancia de las preguntas en un ambiente de resolución de problemas

Cyntia Riquelme Carvallo
criquelmecarvallo@gmail.com
Col.legi Padre Damián SSCC, Barcelona
Cercle de mestres ABEAM
Carles Granell Fernández
cgranel4@xtec.cat
Col.legi Sant Lluís, Barcelona
Cercle de mestres ABEAM

Núcleo temático: Proceso (Resolución de problemas), Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria (1r ciclo)

RESUMEN

Creemos en la enseñanza de unas matemáticas significativas en un ambiente de resolución de problemas competenciales y manipulativos en que sean los alumnos los que descubran relaciones, realicen conexiones y construyan los conceptos matemáticos.

Para ello, nuestro papel como docentes es saber escoger problemas, y realizar preguntas abiertas, con intención y que induzcan al reto.

Partiendo de problemas simples de aplicación, los iremos transformando en más complejos que abran posibilidades a las diferentes estrategias del alumnado. También de la experimentación con materiales (panel del 100, dados, geotiras y pattern blocks)

A pesar de que pensamos que la experiencia del docente ayuda a una buena gestión de aula, a hacer este tipo de preguntas se aprende. Queremos dar al docente las claves para adaptar problemas con preguntas significativas con el fin de que los alumnos trabajen en el nivel más elevado de competencia matemática y se conviertan en verdaderos pensadores matemáticos.

Palabras clave: Resolución de problemas competenciales, Gestión del docente, Materiales manipulativos, Buenas preguntas, Matemáticas significativas.

En el contexto de unas Jornadas Virtuales Matemáticas que organizaba el Centre de Recursos Pedagògics de Nou Barris (Barcelona), se proponía a los docentes de las Escuelas e Institutos del barrio, la realización de una gymkana matemática virtual con problemas creados por sus alumnos (6º y 1º de ESO), y se nos propuso realizar una formación que titulamos: “Creadores de problemas”.

Dada nuestra experiencia en la creación y adaptación de problemas competenciales para el concurso del *Fem matemàtiques*[38] y la experiencia personal en el aula, sabemos que el nivel de “creación de problemas” corresponde al nivel más elevado y complejo dentro de la competencia de Resolución de Problemas[39]

Imagen 1. Concurso Fem Matemàtiques (Feemcat)

¡En el espíritu de los problemas de la primera fase se encuentra procurar que TODOS LOS ALUMNOS los puedan trabajar en un inicio ya que queremos que sean ejemplos DE TRABAJO DE AULA CENTRADOS EN LA INVESTIGACIÓN, EL RETO Y EL DISFRUTAR DE LAS MATEMÁTICAS!

Son un tipo de problema que quiere generar conexiones, razonamientos, que se pueden atacar con diferentes estrategias y permiten diferentes planteamientos desde diferentes perspectivas y miradas. Y en los que se potencia la argumentación y justificación de conjeturas, manipulación y experimentación y la generación de preguntas que van más allá del propio problema.

(Banc de recursos del FM, 2018)

[38] Concurs de la FEEMCAT: Què és el FEM MATEMÀTIQUES?

[39] Burgués, C. i Sarramona, J. (2013). Competències bàsiques de l’àmbit matemàtic Identificació i desplegament a l’ESO. Generalitat de Catalunya Departament d’ensenyament.

Por lo tanto, y antes que nada, teníamos que ofrecer a los profesores ejemplos de buenos problemas matemáticos para que luego los trabajasen con sus alumnos, y también, ejemplos de preguntas que ayudan a realizar un buen trabajo competencial.

Ya que íbamos a “crear problemas”, creemos aquellos problemas que para nosotros producen un aprendizaje más profundo de las matemáticas.

El taller es una pequeña muestra de las técnicas que utilizamos para adaptar problemas que nos gustan y transformarlos y “estirarlos” con ese fin.

1. Metodología para un aprendizaje basado en la resolución de problemas

Con pequeños cambios en las actividades, podemos enriquecerlas y pasaremos de “ejercicios de matemáticas” de pura gestión de datos y aplicación de reglas y operaciones a una “investigación matemática”, que es un proceso mucho más complejo.

También tienen que ser actividades de suelo bajo y techo alto. Con retos y preguntas que “todos los alumnos” puedan empezar a realizar atendiendo y respetando su diversidad. Y si a medida que las vamos haciendo encontramos buenas formas de gestionarlas, podremos ser más inclusivos, pero también más ambiciosos o exigentes para aquellos alumnos que quieran ir más allá.

Y para acabar, creemos que en un ambiente de resolución de problemas es necesario, en la medida de lo posible, partir de la experimentación para promover el descubrimiento por parte de cada alumno y que lleguen a hacer suyos los conceptos e ideas matemáticas que contienen. Y si es necesario… ya formalizaremos. Pero el formalismo no puede ser el punto de partida del aprendizaje.

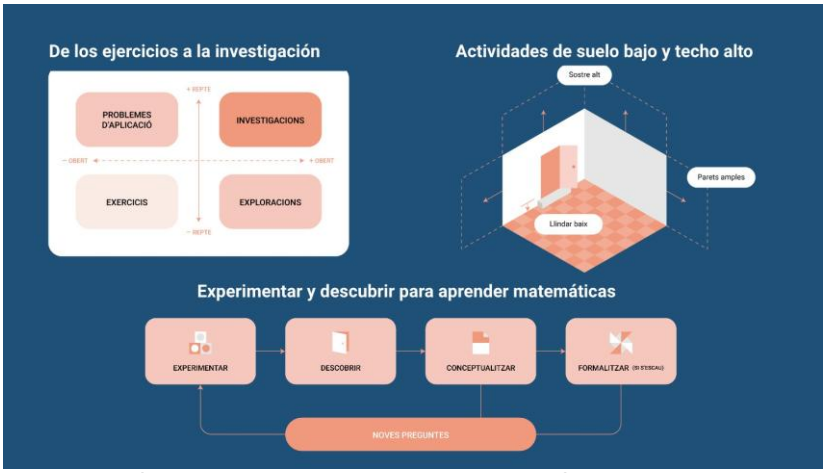


Imagen 2. Metodología para un aprendizaje basado en la resolución de problemas (*font: CREAMAT)*

Este taller recoge algunas de estas actividades y otras que hemos generado en el contexto del "*Fem matemàtiques"* y hace hincapié en el tipo de preguntas que ayudan a una buena gestión en un ambiente de resolución de problemas.

2. De los ejercicios a la investigación. Un camino sin retorno

2.2. Del ejercicio a la exploración

ACTIVIDAD INICIAL: Sumas de números de dos cifras

Esta actividad corresponde a un EJERCICIO o una actividad reproductiva de aplicación de un algoritmo.

Vamos a hacerla más *abierta* realizando un cambio en la actividad con una pregunta que ayude a explorar todos los resultados posibles y añadiremos la manipulación de dados, transformándola en una EXPLORACIÓN productiva en la que se realizan muchas sumas en un contexto más lúdico:

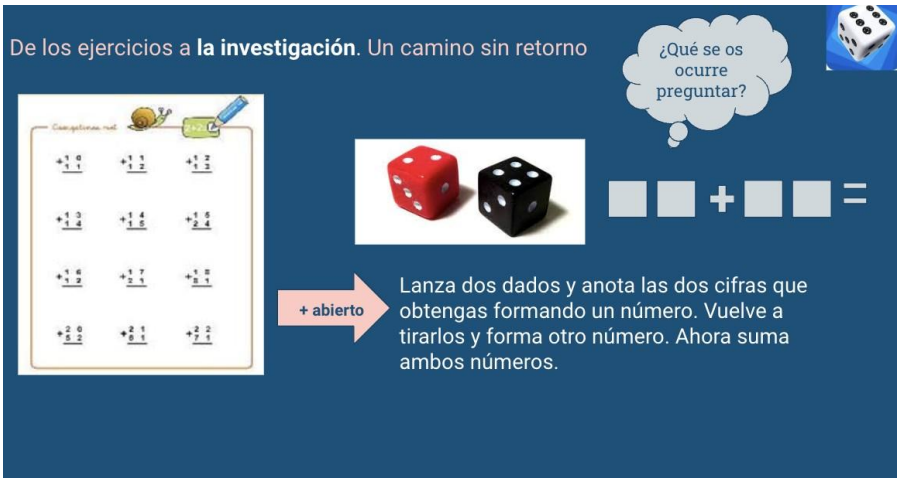


Imagen 3. Pasamos de un EJERCICIO a una actividad de EXPLORACIÓN **2.2. De la exploración a la investigación**

Con la pregunta:

¿Qué números capicúas podrías obtener como resultado de la suma final?

convertimos la exploración en una INVESTIGACIÓN con un fin concreto. En esta investigación deberán conjeturar, realizar pruebas y justificar matemáticamente la conjetura para llegar a una respuesta razonada. La estrategia para llegar a ello no viene indicada ya que la pregunta es abierta, por lo que los alumnos pueden emprender diversas maneras de llegar a la respuesta.

2.3. Investigación: los números palíndromos o capicúas[40]

Imagen 4. Números palíndromos en diferentes contextos

Y ya que estamos con números capicúas, también llamados palíndromos, vamos a investigar sobre ellos.

Sobre un panel de números del 1 al 100, ¿qué números son capicúas?

Así, rápidamente, dirán los números de dos dígitos iguales: 11, 22, 33, .. Quizás también caigan en que todos los números de un dígito también lo son: 6, 7, .. Pero los matemáticos siempre van más allá y buscan investigar más y más. Así, realizando la suma de un número con su inverso (dígitos invertidos) podemos obtener un número capicúa. Por ejemplo, si sumamos el 24 con su inverso 42 obtenemos el 66 que es un palíndromo. *¿Qué pasa si lanzamos la conjetura de que siempre que sume un número y su inverso obtendré un palíndromo? ¿Alguien puede probar que estoy equivocado?*. Los estudiantes encontrarán contraejemplos como 19 + 91= 110. *Pero, ¿y si vuelvo a sumar 110 y su inverso?. Obtenemos 110 + 11= 121 que sí que es capicúa. Sólo que ahora he tenido que realizar dos pasos para llegar a ello.*

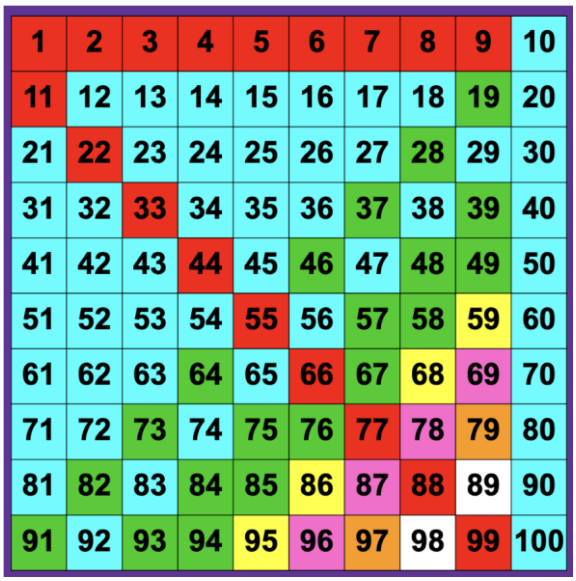
¿Esto pasará siempre? ¿Con todos los números?

Se entrega a los docentes una plantilla con el panel del 100 y se indica que, utilizando diferentes colores, vayan pintando los números en función de los pasos que se necesitan para obtener un palíndromo. Así se va generando una hoja con diferentes colores y en la que, mientras va realizando, se pueden observar patrones de simetrías y diagonales, que ayudan a rellenar la plantilla rápidamente.

¿Habéis necesitado buscar la respuesta para todos los números?

¿Qué habéis encontrado?¿Qué patrones habéis observado?

[40] *Fuente: mathforlove.com*



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Imagen 5. Números palíndromos del 1 al 100

No dejaremos que acaben de rellenar la hoja para hacer diferentes observaciones: . Caso especial del 89 y 98: dejaremos que empiecen la búsqueda del palíndromo pero no que acaben, ya que formará palíndromo en ¡24 pasos!

. De hecho, este problema es un problema no resuelto, ya que todavía hay un número que no se ha podido determinar si es o no palíndromo: el 196[41].

Es un problema muy rico que pide al estudiante que observen patrones, hagan conjeturas y las intenten demostrar, y sean capaces de comunicarlas. Da oportunidad a “todos” los estudiantes a hacer y pensar ya que sólo requiere de habilidades fáciles para que “todos” puedan comenzar (suelo bajo) realizando esas sumas simples. Y da al profesor muchas vías para desafiar a los que lo soliciten (techo alto). También demuestra que la matemática es una ciencia dinámica que sigue buscando certezas ya que se trabaja sobre un problema no resuelto todavía.

[41] *Conjetura del número palindrómico* https://mathworld.wolfram.com/PalindromicNumberConjecture.html [5] Castelnuovo, E. (1948). La Geometria . Edició catalana. Ed.KETRES

3. Experimentar, descubrir, conceptualizar… y formalizar si es necesario

3.1. Actividad de construcción de triángulos

Realizaremos esta actividad inspirados en Emma Castelnuovo que en su libro “La Geometría”[5]. La mayor parte de las personas han dibujado triángulos, a mano alzada o con compás, pero nunca han construido un triángulo con material. Es construyéndose que podemos observar varias de las propiedades del triángulo. Y si además añadimos un reto, transformaremos la actividad en una investigación matemática de descubrimiento de las propiedades que no olvidarán.

Una de estas propiedades suele aparecer de manera formal al inicio de muchas unidades que hablan del triángulo: *“la suma de dos de sus lados debe ser mayor a la longitud del tercer lado”*. Es uno de los ejemplos en los que empezar por el formalismo no ayuda a que se integren los conceptos matemáticos y que la mayoría de las personas recuerdan que hay algo pero no recuerdan exactamente el qué. El reto propuesto para trabajar con GEOSTICKS o barras de MECCANO, es el siguiente:

Con 3 palos cualquiera, ¿podrías construir siempre un triángulo?

Imagen 6. Reto propuesto en la actividad sobre la construcción de triángulos

Otra opción de reto es la versión: *“Vamos por el bosque y queremos construir un triángulo, si tomamos 3 palos del suelo cualquiera ¿lo podremos hacer?”*

. Antes de dar el material al grupo, que se planteen cuál será su respuesta y lo escriban en su papel.

. Se entregan tiras de diferentes tamaños para que hagan los triángulos y los vayan poniendo al lado. Al cabo de un rato, irán saliendo algunas conjeturas. El docente se acerca al grupo y ayuda a formular su conjetura. Siempre debe estar razonada.

Es el momento de que se estire con buenas preguntas:

. Si es que piensan que sí, que siempre se puede: *¿Y si ponemos tiras de tamaño muy diferente?.*

. Si ya ven que no siempre se pueden formar: *"Entonces, ¿cuál sería la condición para poder formar triángulos?".*

Otra propiedad que sólo se puede descubrir si construimos el triángulo y nunca dibujándolo es que la construcción de los triángulos proporciona una figura rígida que no se puede deformar y que sirve para dar rigidez a las construcciones de estructuras: puentes y edificios. Es un buen aprendizaje de la funcionalidad de las formas.

Con este reto pasamos por las fases de experimentación; descubrimiento (propiedades, regularidades, clasificaciones…); formalización: la suma de las longitudes de los lados menores debe ser mayor que la del lado mayor, tipos de triángulos; y conectamos con otras ideas matemáticas: el porqué de la construcción del triángulo con compás y la aplicación de las propiedades de la figura: estructuras triangulares en edificios y otras estructuras como puentes, techos,...

3.2. Un reto con Pattern Blocks

En este reto, muy sencillo, dejamos que los alumnos descubran: propiedades de las formas de los Pattern Blocks y las equivalencias entre ellas. Podríamos empezar una sesión con este material simplemente explicándolo, pero pensamos que el descubrimiento proporciona mayores conexiones y un aprendizaje más profundo. El reto es el siguiente: se les proporciona a los alumnos una hoja con triángulos que deben rellenar con las figuras de los Pattern Blocks y se les pregunta:

¿De cuántas maneras diferentes podemos llenar estos triángulos con las formas de los Pattern blocks?

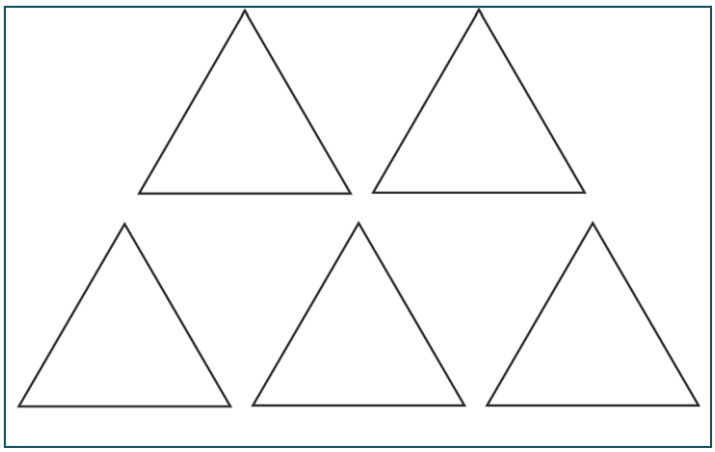


Imagen 7. Plantilla de triángulos para rellenar con Pattern blocks

Esta actividad se puede llevar a cabo con alumnos desde el Ciclo Inicial hasta la ESO. La información y el descubrimiento de las propiedades de las figuras viene dada a medida que se van aplicando diferentes estrategias para obtener todas las maneras posibles de rellenar los triángulos. Es una actividad de trabajo exhaustivo propio de las matemáticas: encontrar todas las soluciones posibles.

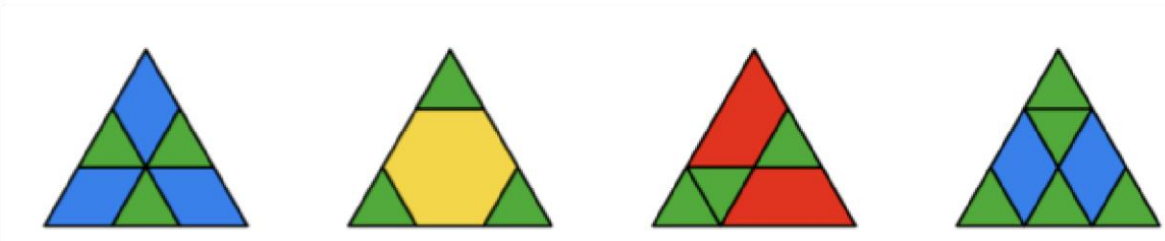


Imagen 8. Algunas de las soluciones posibles del reto con pattern blocks

Y para no dejarnos ninguna, tendremos que realizar un trabajo sistemático, también propio de las matemáticas. Para ello preguntaremos:

"¿Cómo sabéis que habéis encontrado todas las posibles soluciones? ¿Hay alguna manera de hacerlo para asegurarnos que no nos falta ninguna?"

¿Qué ideas matemáticas se están trabajando? Siguiendo a Simon Gregg (2020)[42]:

- Hay una rigidez en el marco, que afecta a la forma en que se ajustan las piezas, es decir: hay **restricciones**.
- También hay **libertad**: el espacio se puede llenar de diversas formas.
- Podemos **probar** con diferentes figuras.

[42] Gregg, S. (2020). Seeing mathematical filling. Recuperado de: https://followinglearning.blogspot.com/2020/10/seeing-mathematical-filling.html

- La actividad trata de **equivalencia,** ya que las diferentes formas de rellenar son equivalentes entre sí.

- Además del producto final, existe un **proceso**, y el proceso puede ser diferente para el mismo producto final.

- Tiene que haber aproximación, que está estrechamente ligada a la **estimación**.

4. Las preguntas sí tienen importancia

La clave de un buen problema matemático reside en realizar preguntas con intención: pocas, abiertas y retantes. Y, para ello no vale cualquier pregunta.

En función de la pregunta que hacemos, estamos favoreciendo una conexión concreta, o inducimos a profundizar más en un concepto. Cada pregunta lleva una idea matemática inherente que hemos de reflexionar y saber cuándo es el momento oportuno de hacerla. Esto se consigue viendo y trabajando con buenos modelos de problemas ricos, y, realizando el problema en situación de alumno para ver qué procesos matemáticos se le exige y cómo se podría resolver.

Por último, sería ideal una práctica reflexiva posterior a la puesta en práctica,ya viendo las representaciones de los alumnos y atendiendo a su razonamiento y comprensión, para revisar las preguntas y ver si las adecuamos más a la idea que teníamos.

4.1. Buenas preguntas que ayudan a pensar matemáticamente

Las buenas preguntas son aquellas que incitan a ver las relaciones (hacer conexiones), conjeturar, profundizar y razonar matemáticamente (Connell, G. 2014) Son preguntas fundamentales:

- **Explícame qué piensas** (incita a compartir y explicar conjeturas, estrategias, razonamientos).

- **¿Qué te hace pensar esto? ¿Cómo sabes que está bien?** (promueve que den razones matemáticas aunque sean muy pequeños).

- **¿Cómo lo has hecho?** (para describir la estrategia o el proceso seguido en la resolución del reto o problema. Es muy importante que realicen una representación personal utilizando el lenguaje en el que se sientan cómodos:

  verbal, gráfico, simbólico y matemático).

- **¿Qué pasaría si..?** (propone nuevas preguntas; apunta hacia la excelencia).

4.2. Generar nuevas preguntas a partir de un problema

Es una práctica que solemos realizar para poder atender a todos los niveles de competencia del alumnado, durante o posterior al problema base o inicial. Para ello proponemos diversas estrategias que ayudaran a este objetivo[43]:

4.2.1. Conectamos con un concepto relacionado

Podemos generar nuevas preguntas o retos solamente planteando la pregunta

"¿Qué pasaría si…?"

Puede ser cambiando las condiciones del problema base y conectando a un concepto relacionado.

Así en la investigación de los números palíndromos, podríamos cambiar la operación de suma palindrómica por la de resta palindrómica

"¿Qué pasaría si… en lugar de sumar el número con su invertido, los restamos? ¿Obtendremos algún número capicúa? ¿Podremos observar algún patrón?"

En la investigación sobre la construcción de triángulos podemos conectar y dar sentido a la representación de triángulos con compás:

"¿Y qué pasa si los dibujamos en el papel con ayuda del compás? ¿Qué relación encontramos entre las dos representaciones?"

Esta forma de construir un triángulo nos facilita entender por qué cuando queremos dibujar triángulos con compás marcamos un arco de circunferencia hasta que se juntan en un punto que será el vértice del polígono.

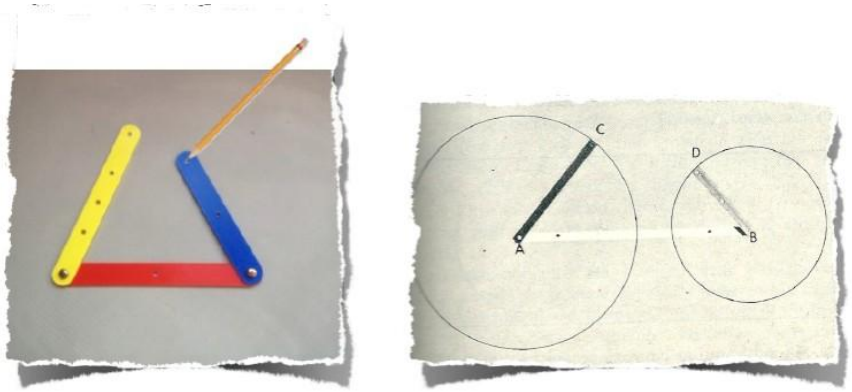


Imagen 9. De la construcción con geotiras al dibujo con compás

[43] https://www.mathsteachercircles.org/blog/deeper/

Y en el reto de los Pattern locks, ¿por qué no conectar con fracciones aprovechando las diferentes figuras o colores que rellenan el triángulo?

"¿y si observamos bien, podríamos calcular las fracciones de cada figura que rellenan el triángulo?"

Y podemos cambiar la unidad relativa, primero estableciendo como unidad el triángulo a llenar pero también cambiando a otra de las figuras.

La habilidad más poderosa de las matemáticas es poder formar nuevas conexiones y encontrar una relación entre distintas ideas.

4.2.2. Cambiamos un parámetro

Al cambiar un parámetro (y sólo un parámetro), los estudiantes pueden utilizar sus estrategias y pensamientos existentes a partir de un problema y aplicarlo al siguiente.

Si cambiamos demasiado a la vez, minimizamos la posibilidad de que los estudiantes puedan establecer conexiones y ver cómo se relacionan los problemas.

En la investigación de los triángulos, por ejemplo podríamos preguntar:

"¿Qué pasaría si… quisiéramos construir cuadriláteros? ¿Con cualquier tamaño de 4 tiras podremos construir siempre un cuadrilátero? ¿Y qué pasa respecto a la rigidez que observábamos en los triángulos? ¿Qué observamos ahora?

Hemos utilizado las mismas preguntas pero para otro tipo de figura plana, cambiando sólo los lados del polígono que queremos construir. Al poder comparar, hacemos que los estudiantes profundicen en las propiedades de cada tipo de figura.

También podríamos hacer una variación de las longitudes, por ejemplo:

"¿Qué pasaría si… alargamos la longitud de las geotiras por igual, por ejemplo, sumando 1 cm a cada lado? ¿Obtendremos un mismo tipo de triángulo con la misma forma?"

"¿Y si las alargamos duplicando las medidas…? o ¿Cómo podríamos conseguir otro triángulo rectángulo que tenga la misma forma partiendo de un triángulo rectángulo inicial?"

Y en el reto con los Pattern blocks:

"¿Qué pasaría si… intentamos llenar un triángulo de lado doble al inicial?¿Y si triplicamos el lado? ¿Qué observaremos?"

Lo que haríamos ahora es trabajar sobre un patrón de crecimiento geométrico, y como en todos los patrones de crecimiento, una de las preguntas fundamentales que ayudan a centrar al alumno y a observar el patrón es:

"¿Qué cambia y qué permanece constante a medida que la figura crece?"

4.2.3. Generalizamos

En el momento en que los estudiantes comienzan a generalizar –o encontrar una regla– se están retirando del problema y se plantean, a un nivel más amplio, qué significa.

En otras palabras, abstraen información y demuestran una comprensión profunda de lo que está pasando.

Estamos haciendo que se planteen generalizar con preguntas como:

"¿Todos los números acabarán formando un palíndromo?"

"¿Habrá una regla general para cualquier número de geotiras?"

"¿Se mantendrán las fracciones (proporción de colores) a medida que aumentamos el lado del triángulo?"

5. ¿Cómo tienen que ser las preguntas de un problema rico?

Pocas y con intención: ¿Qué idea matemática hay detrás? ¿Qué proceso matemático estoy potenciando con esta pregunta?.

Abiertas: no dirigidas a una solución única, que abran vías para que el alumno pueda pensar su propia solución y estratégia de ataque a partir de sus propias herramientas y con su bagaje. De esta manera, surgirán un montón de resoluciones que nosotros como adultos a lo mejor no podríamos suponer (ya que partimos de conexiones diferentes) y todas ellas ricas en su diferencia.

A la vez, al dejar que el alumno comunique y represente su solución estaremos observando desde donde parte, qué procesos matemáticos y en qué nivel competencial está y, ésto, es valiosísimo para la evaluación formativa de nuestros estudiantes que básicamente es el proceso de comprender su pensamiento.

A partir de aquí, las preguntas se pueden diversificar para cada grupo de alumnos en función de hasta dónde hayan llegado.

Y retantes: ya que el niño por naturaleza es activo y curioso y le gusta el reto, sobre todo, si se le anima a seguir por su camino de descubrimiento. Y ¿qué hay más motivador que hacer descubrimientos y que sean valiosos? Con esto conseguimos un objetivo fundamental dentro del sentido socio-afectivo que es disfrutar y ganar en confianza.

Por último, para nosotros los problemas ricos, aquellos que potencian el pensamiento profundo matemático són aquellos que tienen estas características:

- Enunciados con preguntas abiertas.
- Que condicionan a pensar en una estrategia de ataque (cómo empiezo a hacer pruebas, a pensar, a hacer)
- Nos inducen a deducir conjeturas, pero necesitamos realizar pruebas para poder ver si se cumplen.
- En los que existan diferentes vías o estrategias para llegar a la solución.
- Que pongan en marcha procesos matemáticos más complejos: razonamiento, representación, conectar diversos conceptos matemáticos, generalizar, comunicar.
- Que generen diálogo o conversación matemática y por tanto, una riqueza de las intervenciones donde los alumnos son activos.

Trabajando en un ambiente de resolución de problemas ricos y competenciales, los alumnos aprenderán un modelo que les llevará más adelante a que ellos mismos sean los que se hagan las preguntas y enriquezcan el problema.

Es importante dejar siempre un tiempo para que piensen cómo podrían estirar la investigación. Sólo dejando que los alumnos tengan la iniciativa de hacerse preguntas por sí mismos estaremos trabajando la competencia de generar preguntas de cariz matemático y plantear problemas[44].

6. Conclusión

Queremos dar al docente las claves para adaptar problemas con preguntas significativas que los hacen más competenciales, accesibles a todos los alumnos y

[44] Burgués, C. y Sarramona, J. (2013). Competencias básicas del ámbito matemático Identificación y despliegue en la ESO. Generalidad de Cataluña Departamento de enseñanza.

con posibilidades de ampliación. Creemos en la resolución de problemas como núcleo de trabajo en el aula y para conseguir un aprendizaje profundo en el que sea el alumno que descubra y que establezca conexiones. En definitiva, para formar pensadores matemáticos.

Referencias

Burgués, C. i Sarramona, J. (2013). Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic Identificació i desplegament a l'ESO. Generalitat de Catalunya Departament d'ensenyament.

Castelnuovo, E. (1948). La Geometria . Edició catalana. Ed.KETRES

Connell, G. (2014). Math Talk 101. Recuperado el 19 de septiembre de 2018 de

https://www.scholastic.com/teachers/blog-posts/genia-connell/math-talk-101/

CREAMAT (2022). Idees al voltant de l'activitat matemàtica a l'aula. Recuperado de: *https://serveiseducatius.xtec.cat/cesire/recurs-eco2/tipologia-dactivitats/*

Epstein, M (2023) Taking A Step Towards Deeper Learning. Recuperado de: *https://www.mathsteachercircles.org/blog/deeper/?ck_subscriber_id=2108309339&utm_source=convertkit&utm_medium=email&utm_campaign=A+step+towards+deeper+learning%20-%2012089313*

Gregg, S.(2020).Seeingmathematical filling.Recuperado de:

https://followinglearning.blogspot.com/2020/10/seeing-mathematical-filling.html

López, M. y Riquelme, C. (2019). *Banc derecursos del FEMMatemàtiques*.

Recuperado de: *http://bancfm.blogspot.com.es/*

López, M yRiquelme, C. (2019). Fem problemes del Femmatemàtiques.

Recuperado de:

https://bancfm.blogspot.com/2018/12/fem-problemes-del-concurs-fem.html

Math for love (2019).number palindromes

Recuperado de:

https://mathforlove.com/lesson/number-palindromes/

¿Dados y probabilidad? ¡Que empiece la subasta!

Carles Granell Fernández

Cgranel4@xtec.cat

Col·legi Sant Lluís

Núcleo temático: Recursos para el aula y Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria y Educación Secundaria

RESUMEN

El trabajo de la probabilidad desde edades tempranas ofrece al alumnado un conjunto de herramientas que le permitan dar respuesta a diferentes situaciones y tomar sus propias decisiones (Alsina, 2016). La propuesta del taller parte de la actividad *Dice Auction* (Banting, 2019) en la cual se compararán diferentes sucesos a partir del cálculo y estimación de la probabilidad de los mismos en un contexto lúdico que permite contrastar los resultados experimentales con la previsión probabilística. Cada equipo dispone de un presupuesto y un listado de compra, ¿quién elegirá la mejor estrategia? ¡Que empiece la subasta!

Palabras clave: probabilidad, estadística, sentido estocástico, ABJ

Introducción

El trabajo de la probabilidad, entendida como la forma de medir la certidumbre de que ocurra un suceso, se puede enfocar desde diferentes significados. Batanero (2004) diferencia entre un primer significado intuitivo, basado en experiencias previas y el uso de expresiones de lenguaje con significado propi (posible, imposible, probable, etc.); un significado clásico que surge de la necesidad de formalizar el azar y gira alrededor de la definición de Laplace (Albarracín, 2018) y, finalmente, un significado frecuencial para aquellos casos en los que no es posible definir la probabilidad a partir del recuento total de casos.

Alsina (2016) señala la importancia de trabajar estos significados desde edades tempranas para ofrecer al alumnado un conjunto de herramientas que le permitan dar respuesta a diferentes situaciones en un contexto de probabilidad de sucesos, así como tomar decisiones en situaciones en que la incertidumbre es relevante.

La propuesta del taller parte de la actividad *Dice Auction* (Banting, 2019) en la cual se compararán diferentes sucesos a partir del cálculo y estimación de la probabilidad de los mismos en un contexto lúdico que permite contrastar los resultados experimentales con la previsión probabilística.

Desarrollo de la actividad

Presentación

El grupo de participantes del taller se divide en equipos de 3-4 personas y cada uno recibe 25 cubos encajables que se usarán como moneda de compra y una copia del listado de tarjetas que entrarán en juego en la subasta. Cada una de las tarjetas contiene un suceso que puede ocurrir cuando se lanzan a la vez dos dados del 1 al 6, como, por ejemplo: ambos números son pares, la suma de los valores es igual a 7, los dos números son iguales, el producto es un número primo, etc.

Además, explicarán las normas de la subasta y el posterior juego:

- Los equipos disponen de 10 minutos para analizar la lista de tarjetas que serán subastadas. Además, deberán repartir diferentes roles: pujador/a, contable, moderador/a y analista de datos.

- Cuando empiece la subasta, se podrá pujar por las diferentes tarjetas. Todos los sucesos son posibles en lanzar ambos dados. Para comprarlas, inicialmente dispondrán de 25 cubos encajables. Se pueden comprar tantas como quiera o pueda el equipo, pero como mínimo deben tener una.

- Una vez empiece el juego, los dados se lanzarán 10 veces en la primera ronda. Posteriormente, habrá dos rondas más con un evento entre ellas.

- Cada vez que ocurra un suceso escrito en una tarjeta que el equipo ha comprado, éste recibirá un policubo que se añadirá a los sobrantes de la subasta. Es posible que, en un mismo lanzamiento, un equipo tenga varios sucesos a la vez. En tal caso recibirá un premio por cada uno de ellos. Al final de la partida, ganará el equipo con más policubos.

A continuación, se muestra un ejemplo después un lanzamiento (**Imagen 1**):

Imagen 1. Resultado posible de un lanzamiento

El material necesario para poder empezar la actividad es el siguiente:

- Dados del 1 al 6 (2 unidades)
- Cubos encajables o policubos (25 unidades por grupo)
- Listado de tarjetas con elementos subastados (1 por grupo)
- Adhesivos con nombres de los roles (para cada participante)
- Tarjetas para la subasta

Desarrollo

Una vez planificada la compra, empezará la subasta de las diferentes tarjetas. Los equipos irán haciendo sus pujas y el tallerista moderará la compra. Al finalizar la misma, empezarán las tres rondas de 10 lanzamientos de dados. Entre cada ronda, habrá un evento que podrá alterar el curso del juego:

- Después de la primera ronda, cada equipo seleccionará una de sus tarjetas y se deberá desprender de ella. Se recogerán todas y se repartirán de nuevo al azar. ¿Habrán salido beneficiados con el intercambio?
- Cuando acabe la segunda ronda de 10 lanzamientos, se repartirá a cada equipo un comodín que deberán situar encima de una de sus tarjetas.

  Cuando suceda ese caso, ganarán el doble de puntuación ¿Elegirán bien?

- Para acabar, después de la tercera ronda, cada equipo deberá elegir una de sus tarjetas y se harán los 3 últimos lanzamientos, cada uno de los cuales corresponderá con una puntuación triple a aquellos equipos que acierten.

Conclusión

Para hacer seguimiento del transcurso del juego y analizarlo posteriormente, se habrá pedido a cada equipo que sitúe encima de la tarjeta los policubos obtenidos con la misma. De esta tarea, así como del registro del resultado de los dados en cada uno de los dados, se encargará la persona con el rol de analista de datos.

Se procederá a hacer un recuento de la puntuación obtenida por cada equipo y se compartirán algunas ideas y opiniones: ¿Ha ocurrido lo que habías previsto? ¿Qué tarjetas han dado más puntos? ¿Qué hubieras hecho de otra manera?

También se podrán compartir algunas variantes o extensiones del juego:

- Como describe Banting (2019) puede ser interesante repetir la actividad más adelante una vez hecho el análisis de los diferentes sucesos. Esta actividad se puede realizar en diferentes momentos de una secuencia didáctica, ya sea inicialmente para valorar los conocimientos y herramientas previas, o bien como conclusión de la misma para poder transferir aprendizajes.

- Podemos introducir variantes, como modificar tanto el tipo de dados (tetraédrico, octaédrico, icosaédrico...) cómo la cantidad de éstos.

Referencias

Albarracín, L., Badillo, E., Giménez, J., Vanegas, Y. y Vilella, X. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Editorial Síntesis. España.

Alsina, A. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Revista Aula De...*, número 251, 12-17

Banting, N. (2019). *Dice Auction: Putting Outcomes of the Dice Up for Sale*. National Museum of Mathematics

Batanero, C., Batanero, C.; Godino, J. (2004): «Didáctica de la estadística y la probabilidad para maestros», en Godino, J. (coord.) (2004): Didáctica de las matemáticas para maestros. Granada. Universidad de Granada, pp. 405-456.

Mosaicos por la igualdad

Leyre Gilardi[1]

leyre.gilardi@estudiante.uam.es

Ariadna Gómezescobar[1]

ariadna.gomezescobar@uam.es

Javier Rodríguez Miravalles[1]

javier.rodriguez01@uam.es

Alvaro Nolla[1]

alvaro.nolla@uam.es

[1]*Universidad Autónoma de Madrid*

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Grado en Maestro/a de Educación Primaria).

RESUMEN

El taller Mosaicos por la Igualdad es una actividad de Aprendizaje-Servicio en la que alumnado universitario o de cursos superiores de la ESO diseña un mosaico en el que salgan a relucir saberes básicos sobre las transformaciones geométricas en el plano, para posteriormente generar un mural en el que alumnado de Primaria reciba estos conocimientos de forma activa. La temática del mural también trata de visibilizar las aportaciones de las mujeres a lo largo de la historia de las matemáticas.

La necesidad de pensar una serie de unidades básicas que, transformadas, teselen el plano y la posibilidad de recibir estos contenidos de forma contextualizada en la generación de la obra artística han sido una rica fuente de aprendizaje para el alumnado de todos los niveles implicado.

Palabras clave: *Geometría, mosaicos, mujeres matemáticas, igualdad, STEAM*

El taller Mosaicos por la Igualdad es una de las actividades promovidas por el proyecto

“FemSTEAM: fomento feminista de vocaciones STEAM” (27-4ACT-23), subvencionado por el Instituto de las Mujeres (Ministerio de Igualdad) y también forma parte de un proyecto de innovación docente denominado “Mosaicos por la igualdad:

Geometría y Arte a través del Aprendizaje-Servicio (FPYE_009.23_INN)”, subvencionado por la convocatoria INNOVA del Vicerrectorado de Docencia de la Universidad Autónoma de Madrid. El principal cometido de la propuesta es reconocer las aportaciones de personas, pero sobre todo mujeres que han sido silenciadas a lo largo de la historia. Desde una perspectiva interdisciplinar, que combina la creación de arte a través de la geometría, se busca crear obras artísticas relacionadas con aportaciones de mujeres en el ámbito STEAM y analizar su componente geométrico.

El proyecto Mosaicos por la Igualdad, está enfocado desde la metodología Aprendizaje-Servicio, el alumnado de grado y máster diseña actividades en línea con el Arte, la Geometría y las aportaciones de mujeres y hombres para que estudiantes de Educación Primaria vengan a la facultad a ponerlas en práctica. Esto supone una especie de “simbiosis educativa” entre ambos colectivos, pues el alumnado universitario obtiene retroalimentación sobre la idoneidad de su propuesta y el estudiantes y docentes de Primaria disfrutan de actividades innovadoras y conocen la universidad. En este taller nos centramos en la parte que realizaría el alumnado en etapas obligatorias.

Objetivo del taller

El principal objetivo de este taller es el reconocimiento del papel fundamental que tuvieron las aportaciones de mujeres a lo largo de la historia de las matemáticas y realizar creaciones artístico-geométricas vinculadas, reconociendo conceptos matemáticos incluidos en ellas.

Contenidos trabajados

Los contenidos matemáticos que se trabajan en el taller son:

- Simetría axial y simetría central
- Giros o rotaciones
- Traslaciones
- Teselaciones

ISOMETRÍAS: Transformaciones geométricas que mantienen forma y tamaño

(NCTM, 2020)

- Simetrías centrales: tipo de simetría en el que un objeto se mantiene invariable bajo una rotación de 180º alrededor de un punto fijo (centro de simetría) (NCTM, 2020). o Simetrías axiales: tipo de simetría en la que un objeto se mantiene invariable cuando se refleja en una línea imaginaria (eje de simetría) (NCTM, 2020).

- Giros: consiste en rotar un objeto alrededor de un punto fijo (centro de rotación), conservando distancia y forma (NCTM, 2020).

- Traslaciones: transformación geométrica que desplaza un objeto en una dirección específica son cambiar forma ni orientación (NCTM, 2020).

TESELACIONES: Proceso de cubrir una superficie con patrones repetitivos sin dejar huecos ni superponerse, utilizando una o más formas básicas (NCTM, 2020). Las isometrías son herramientas esenciales para crear teselados.

Desarrollo del taller

El taller “Mosaicos por la Igualdad” consta de tres partes:

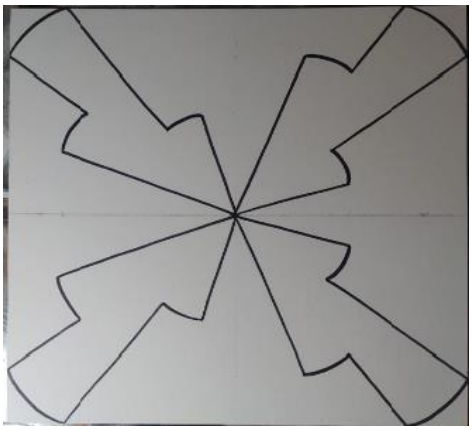
Fase 1 – Un viaje a través de la historia

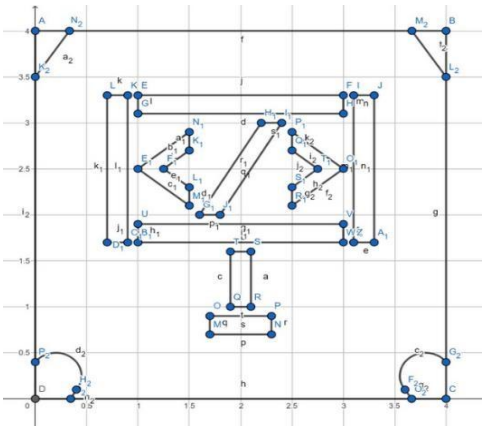
En la primera fase se trata de conocer (o recordar) a personas que han dejado huella en las matemáticas a lo largo de nuestra historia. Para ello se proponen unos pósteres informativos *ad-hoc* para conocer sus contribuciones más importantes.

También se realiza un repaso de aquellos contenidos matemáticos que se pretenden trabajar mediante el taller.

Fase 2 – Despertando tu creatividad matemática

En esta segunda fase cada persona (o grupo) escoge una figura matemática y algún elemento que la represente para diseñar una tesela (Figuras 1, 2, y 3) que posteriormente, a través de diversas isometrías, generará un mosaico que represente a la figura matemática. Para el diseño de la tesela, se deberán tener en cuenta las isometrías que se van a generar con la misma para obtener el diseño final del mosaico. Una vez diseñada la tesela en papel, se dibujará y recortará en la plantilla de acetato.





Imágenes 1 y 2. Ejemplos de teselas.

Imagen 3. Ejemplo de tesela.

Fase 3 – Plasmando tu visión en una *totebag* única

En esta última fase se procederá a la estampación de una *totebag* utilizando la plantilla creada en la segunda fase (Figura 4). De este modo cada persona da vida a su propia obra de arte en una bolsa original mediante unos *sprays*.

Imagen 4. *Totebag*.

Por último, entre todas las personas que han tomado partido en el taller, se realiza un mural común en papel continuo con todas las aportaciones (Figura 5).

Imagen 5. Mural común.

Agradecimientos/Financiación:

Proyecto “FemSTEAM: fomento feminista de vocaciones STEAM” (27-4ACT-23), subvencionado por el Instituto de las Mujeres (Ministerio de Igualdad).

Proyecto “Mosaicos por la igualdad: Geometría y Arte a través del AprendizajeServicio (FPYE_009.23_INN)”, subvencionado por la convocatoria INNOVA del Vicerrectorado de Docencia de la Universidad Autónoma de Madrid.

Referencias

National Council of Teachers of Mathematics. (2020). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, VA: Author.

Algoritmos flexibles para desarrollar el sentido numérico a través de la suma y la resta: movimiento OAOA

Marcos Marrero Cárdenas
CEIP Isaac de Veja
marcosmarrerocardenas@gmail.com

Núcleo temático: procesos, recursos para el aula.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Educación Primaria.

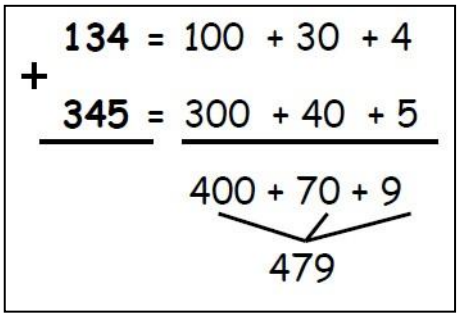
RESUMEN

Tal y como recoge la normativa actual, el uso de los algoritmos para las operaciones básicas debe tener como objetivo el desarrollo del sentido numérico, el cálculo mental, las relaciones y propiedades numéricas y la comprensión profunda de nuestro sistema decimal. Mas allá de obtener un número exacto en el cálculo (también importante), la propuesta aritmética desarrollada en el aula debe perseguir estos aspectos fundamentales en la aritmética escolar.

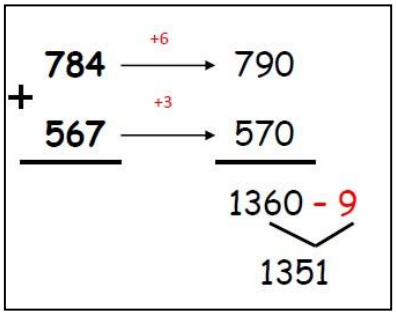
Palabras clave: sentido numérico, algoritmos, cálculo mental.

En este taller se mostrarán y se practicarán diferentes algoritmos para las operaciones básica de la suma y la resta, tanto con números naturales como con números decimales. El objetivo es practicar y analizar didáctica y matemáticamente los diferentes algoritmos para la suma y la resta y poder enriquecer nuestra práctica docente y mejorar el sentido numérico de nuestro alumnado.

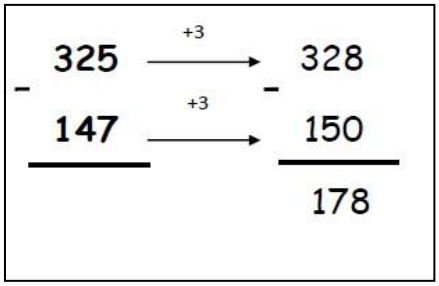
El tallerista realizará una puesta en común con los asistentes de cada uno de los algoritmos, una vez que estos hayan sido practicados por los asistentes (dificultades, posibles materiales manipulativos previos a utilizar, propiedades aplicadas y aprendidas a través de estos, etc.).



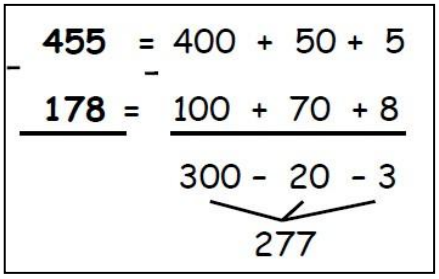
Suma por descomposición



Suma por redondeo



Resta: propiedad fundamental



Resta con “números negativos”

Referencias

Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2015). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. Revista Internacional De Educación Para La Justicia Social, 3(1). https://doi.org/10.15366/riejs2014.3.1.002

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Editorial CCS.

Constance, Kamii (2003). *El Niño reinventa la aritmética : implicaciones de la teoría de Piaget.* Editorial Visor.

De la Fuente Alía, S. (2018). El movimiento OAOA. Un enfoque para la enseñanza de la Aritmética en la Educación Primaria. (Trabajo de Fin de Grado). https://dspace.uib.es/xmlui/bitstream/handle/11201/147737/Fuente_Alia_Sandra.pdf?sequenc

Murcia, J.A. (2019). *OAOA.* https://www.tocamates.com/oaoa/

Martín, A. (2019). El movimiento “Matemáticas OAOA”. Números. Revista de

Didáctica de las Matemáticas, 101, 41-44. http://funes.uniandes.edu.co/14806/1/Martin2019El.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston.

Gestión de tares ricas para practicar las tablas

Cecilia Calvo Pesce
ccalvo@santgregori.org

Laura Roma Gómez
laurarg97@gmail.com

Maria Rojas Calvo
mariarojascalvo@gmail.com

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

La práctica es muy importante en el aprendizaje de las matemáticas. Pero, ¿qué tipos de práctica podemos proponer? ¿Se puede practicar con actividades competenciales y profundas? En este taller veremos que hay principalmente dos tipos de práctica y pondremos ejemplos de una de ellas, la práctica productiva: actividades ricas y dirigidas a todo el alumnado que nos ayudan a consolidar los saberes construidos en el aula sin dar la espalda a los procesos matemáticos. Concretamente, exploraremos la práctica de multiplicaciones a partir de tres actividades ricas para educación primaria, poniendo énfasis en la gestión del docente.

Palabras clave: actividades ricas, procesos, gestión de aula, tablas de multiplicar

Marco teórico de referencia

Centrar las clases de matemáticas únicamente en los contenidos curriculares resulta insuficiente para promover un aprendizaje significativo. Esta idea está presente en la base de nuestro currículum actual y es consistente con el consenso generalizado sobre la importancia de adoptar un enfoque que priorice el desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes. Esta conciencia compartida ha surgido de entender que los procesos matemáticos desempeñan un papel fundamental en la

construcción de significado y comprensión profunda de los contenidos. Por lo tanto, deben ser incorporados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Esta corriente no es nueva ni experimental. Tal como relatan Calvo y otros (2024), George Pólya subraya que la enseñanza basada únicamente en operaciones y procedimientos rutinarios puede provocar desinterés y limitar el progreso intelectual de los estudiantes. Por esta razón, insta a los docentes a cultivar la curiosidad de los estudiantes mediante la presentación de problemas adecuados a su nivel de conocimiento y apoyarlos en la resolución de estos a través de preguntas que promuevan el pensamiento crítico. Además de Pólya, que se centró principalmente en la resolución de problemas, otros autores como Freudenthal redefinieron las matemáticas como una actividad con procesos que se pueden enseñar y aprender, más allá de ser una lista de contenidos.

Para generar oportunidades de aprendizaje significativas en el aula es fundamental contar con actividades apropiadas que promuevan un entorno de aprendizaje enriquecedory competencial. En la siguiente sección, explicaremosqué entendemos por "actividad rica de matemáticas" y luego presentaremos ejemplos específicos que ilustran el taller que nos ocupa.

Actividades ricas de matemáticas

Diversos expertos han compartido sus perspectivas sobre cómo enriquecer las actividades matemáticas en el entorno escolar. El análisis realizado por Calvo y otros (2024) destacó el trabajo de Piggott, quien propuso un marco que aborda dos aspectos fundamentales: el contenido y la metodología de enseñanza. Según Piggott, para que una actividad sea considerada rica, es primordial que los problemas planteados resulten atractivos y desafiantes, estimulando así el desarrollo de estrategias y el pensamiento matemático. Además, estos contenidos deben estar respaldados por una gestión que fomente un ambiente abierto y flexible en el aula. Esto implica promover el trabajo colaborativo, la exploración y la comunicación, así como aprovechar las diferencias individuales como herramientas para el aprendizaje.

El siguiente esquema ilustra los dos factores mencionados que respaldan la afirmación de que la riqueza de una actividad depende tanto del enunciado de la tarea como de la manera en que se gestione su puesta en práctica en el aula.

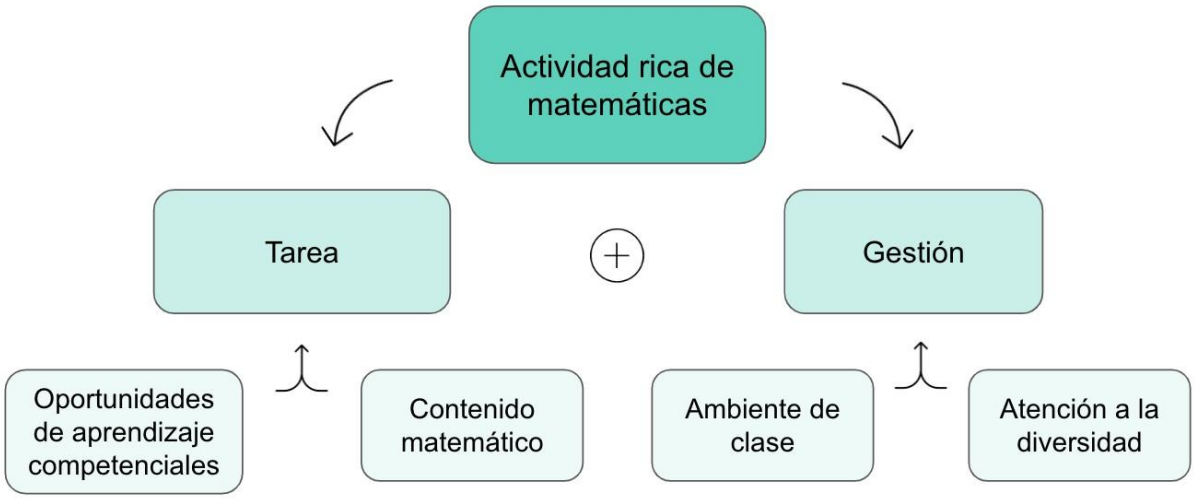


Imagen 1. Elementos de una actividad de matemáticas rica (Calvo y otros, 2024)

El enunciado de la tarea debe proporcionar al estudiante oportunidades de aprendizaje que involucren uno o varios procesos matemáticos, tales como la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, las conexiones y la comunicación, así como la representación. Además, debe abordar contenidos matemáticos relevantes y significativos para el alumno, que estén conectados con otros conocimientos matemáticos previos y futuros.

En cuanto a la gestión, es fundamental planificar y fomentar un ambiente de clase que fomente la discusión basada en preguntas, la colaboración y la conversación entre los estudiantes, así como la investigación activa por parte del alumnado.

Un aspecto que no todos los autores consideran al definir la riqueza de una tarea es la atención a la diversidad aunque algunos sí que entienden que la gestión no puede considerarse completamente rica si no tiene en cuenta las necesidades específicas de todos los estudiantes. A través de la gestión, se debe asegurar la participación de todos los alumnos. Este objetivo es alcanzable, como se describe en NRICH (2013), mediante la implementación de actividades de “suelo bajo” (que permiten la entrada a todos los alumnos) y de “techo alto” (que permiten extender la actividad a través de la formulación de nuevas preguntas y el establecimiento de conexiones en principio inadvertidas).

Continuando con este enfoque, en el próximo apartado caracterizaremos las tareas de práctica productiva como un caso de actividades matemáticas ricas.

Práctica productiva

La mera repetición hasta lograr la memorización no asegura un aprendizaje efectivo ni otorga un significado auténtico a los contenidos involucrados. Es esencial que el proceso de aprendizaje vaya más allá de simplemente retener información y que incluya actividades que fomenten una comprensión profunda de los conceptos. Sin embargo, esto no implica que debamos descartar completamente la práctica; en cambio, debemos buscar un equilibrio adecuado entre la práctica y la comprensión.

Después de presentar los conceptos y ofrecer al alumnado experiencias que les den significado y les permitan comprenderlos, es fundamental encontrar momentos para practicar los procedimientos utilizados con el fin de desarrollar precisión y eficiencia, hasta automatizarlos. Esta práctica no solo contribuye a una comprensión más profunda de los fundamentos, esencial para abordar conceptos más avanzados, sino que también puede infundir confianza en los estudiantes y ayudarles a desarrollar la capacidad para realizar estimaciones y verificar la razonabilidad de los resultados obtenidos.

Aunque la tradición escolar suele enfocarse en la práctica reproductiva, en didáctica se reconoce la práctica productiva como una alternativa que, si bien no reemplaza por completo a la primera, se ajusta mejor a la propuesta de tareas ricas.

La práctica reproductiva implica repetir un procedimiento varias veces, centrándose en la automatización de una destreza básica. Este tipo de práctica es la más convencional y, comúnmente, se realiza a través de fichas. Por otro lado, la práctica productiva es aquella que, a partir de una pregunta abierta, presenta al alumnado un contexto y un propósito que requiere practicar para dar una respuesta.

La principal ventaja de la práctica productiva radica en su capacidad para adaptarse a cualquier nivel de dominio de la destreza que se esté trabajando. Si un estudiante domina el procedimiento, con unas pocas repeticiones será suficiente para producir una respuesta y avanzar hacia desafíos más complejos. Por otro lado, si un estudiante enfrenta dificultades, la tarea le proporcionará la oportunidad de dedicar más tiempo y esfuerzo a las áreas que necesitan refuerzo.

Aunque no es necesario eliminar por completo la práctica reproductiva de las aulas, es importante considerar alternativas que resulten más beneficiosas para los estudiantes. Por ejemplo, se puede incorporar la práctica reproductiva en contextos lúdicos que motiven a los niños y niñas, o utilizar herramientas digitales que se adapten a los diferentes niveles de dominio de la destreza. Estas herramientas también ofrecen la ventaja de proporcionar retroalimentación inmediata sobre la corrección del trabajo realizado, lo que facilita el proceso de aprendizaje.

Para este taller se han escogido actividades de práctica productiva de multiplicaciones entre números de una cifra.

Práctica productiva para automatizar las tablas

Las tablas de multiplicar son un contenido fundamental y su memorización sigue teniendo mucha presencia en el día a día de nuestras aulas. Sin embargo, aunque la memorización podría asegurar una fluidez aparente a corto plazo, no puede ser el único camino para el aprendizaje de las tablas de multiplicar. Precisamente, para llegar a automatizar las tablas a largo plazo, la memorización debe dejar de ser la protagonista para ser una consecuencia del trabajo propuesto en el aula. Un trabajo que debe ir orientado a la comprensión.

Esta automatización a largo plazo, que vendrá acompañada del consiguiente dominio de las tablas de multiplicar, no se produce instantáneamente tras su construcción, sino que continúa y puede mejorar en cursos posteriores. De ahí la importancia de trabajarlas a partir de tareas ricas y en momentos de práctica productiva para que nuestros alumnos sigan desarrollando estrategias y automatismos con actividades que se adapten a su nivel de dominio.

Una vez definido el marco teórico, a continuación se muestran algunos ejemplos de tareas ricas centradas en la práctica productiva de las tablas de multiplicar que, junto con la gestión que las acompaña, conforman nuestro taller.

Actividades propuestas para el taller

Las actividades elegidas para este taller están enfocadas en la práctica productiva de multiplicaciones de números de una cifra y con ellas pretendemos ejemplificar las ideas desarrolladas en el marco teórico. El formato de taller es práctico, con una breve introducción al marco teórico y tres actividades de la naturaleza ya descrita. Para cada actividad, se presenta la tarea y se propone a los participantes que la resuelvan como si fueran alumnos. Después, se analizan y se discuten conjuntamente sus elementos de riqueza didáctica, desde los procesos hasta la gestión llevada a cabo por los ponentes, así como aspectos a tener en cuenta en una aula de primaria. El índice previsto es el siguiente:

I. Breve introducción a las actividades de matemáticas ricas (10’)

II. Actividad 1: Multiplicamos con cartas de dígitos (20’)

III. Actividad 2: Descubrimos el tablero multiplicativo (20’)

IV. Actividad 3: Persistencia multiplicativa (30’)

V. Conclusiones (10’)

A continuación se describe y se analiza cada actividad y se reflexiona sobre aspectos relacionados con los contenidos y procesos que se vayan a poner en práctica, sin perder de vista consideraciones relacionadas con la atención a la diversidad en el aula.

Durante la puesta en común de cada una de las tareas esperamos discutir sobre:

- El tipo de práctica de tablas que moviliza la tarea.
- La manera en que se puede llevar la tarea al aula (ya sea trabajando oralmente, con un soporte impreso o con material manipulativo) ● El repertorio de preguntas que:
    - Se pueden planificar para asegurarnos que explotamos el máximo potencial de riqueza de la tarea y su carácter de suelo y techo alto.
    - Se podrían plantear de manera improvisada como consecuencia de las contingencias que surjan en el aula.
- La gestión de variantes que puede hacer el maestro para atender las necesidades de apoyo o ampliación de determinados alumnos.

Tarea rica 1: Multiplicamos con cartas de dígitos

La primera tarea que analizaremos propone rellenar las tarjetas con dígitos entre 0 y 9 de tal manera que si una tarjeta es más pequeña que otra, debe contener un dígito menor.

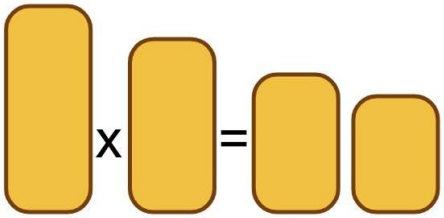


Imagen 2. Esquema para llevar a cabo la primera variación de la tarea rica 1. Elaboración propia.

Los asistentes al taller tendrán tiempo para encontrar las diez soluciones a este reto (9x8=72, 9x7=63, 9x6=54, 8x5=40, 8x4=32, 7x6=42, 7x3=21, 6x5=30, 5x4=20 y 5x2=10) y también para analizar dos interesantes variaciones:

- Si cambiamos el orden de tarjetas de sentido decreciente a creciente, el reto deja de tener solución.

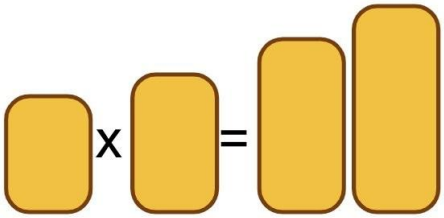


Imagen 3. Esquema para llevar a cabo la segunda variación de la tarea rica 1. Elaboración propia.

- Si cambiamos el orden de tarjetas de sentido decreciente a creciente de manera que el resultado sea de dos cifras, vuelve a tener solución, concretamente hay dos soluciones posibles que comparten una característica: se utilizan dígitos consecutivos (12=3x4 y 56=7x8).

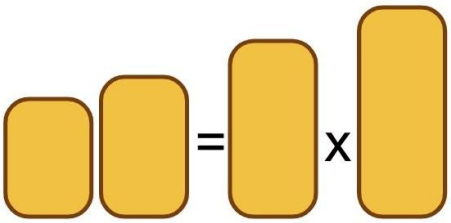


Imagen 4. Esquema para llevar a cabo la tercera variación de la tarea rica 1. Elaboración propia.

Durante la puesta en común de la experiencia que hayan tenido los asistentes durante la ejecución de esta tarea en su rol de “alumnos” les propondremos cambiar al rol de “maestros” y reflexionar sobre cómo podrían llevarla al aula: ¿en qué cursos?, ¿con qué formato?, ¿con qué preguntas acompañarían a sus alumnos?, etc. Algunos de los aspectos que esperamos que surjan en esa reflexión son los siguientes:

- En el primer reto hace falta que el alumnado sea exhaustivo para no olvidar ninguna solución. Al alumnado con más dificultades podemos sugerirle que escriba una tabla concreta y que tache todas las opciones en las que todos los números de la multiplicación no aparecen escritos de mayor a menor. El tiempo que implica proceder de esta forma impedirá que estos alumnos encuentren todas las opciones, pero no que cumplan el objetivo de la tarea de practicar las tablas.

- El segundo reto nos ofrece la oportunidad de trabajar con el alumnado la diferencia entre que un reto no tenga solución o que el alumno no haya encontrado ninguna solución, lo cuál nos permitiría entender la necesidad de una argumentación.

- En el último de los tres retos es muy importante que el alumnado sea consciente de que el signo de igual representa que lo que hay a la derecha es lo mismo que hay a la izquierda y viceversa. Es por eso que el resultado puede estar escrito a la derecha y la multiplicación, a la izquierda.

-

Tarea rica 2: Descubrimos el tablero multiplicativo

En la segunda tarea analizaremos el potencial que hay detrás del tablero multiplicativo como modelo de representación que contribuye a la automatización de las tablas. Para dar a conocer el funcionamiento del tablero, dada una imagen como la que se muestra a continuación, propondremos a los asistentes que observen que el valor de cada celda se puede completar tanto multiplicando el número que identifica a la fila y la columna como contando cuántos cuadraditos hay en total en la región que esta celda define (4x5=20).

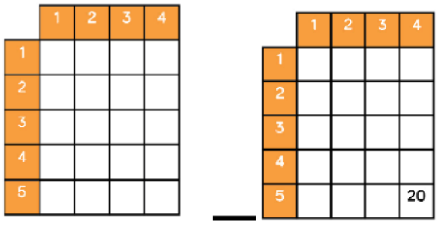
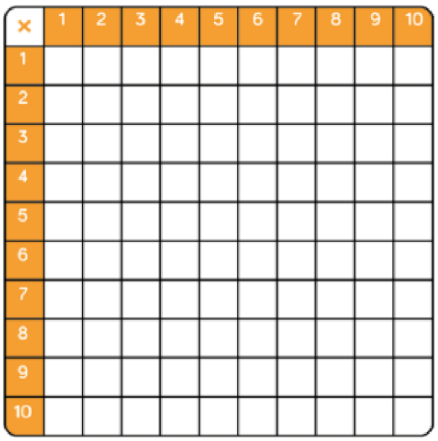


Imagen 5. Esquema parcial del tablero multiplicativo. Elaboración propia.

Una vez presentado el tablero y cómo funciona, pediremos a los asistentes que respondan algunas preguntas con el tablero vacío como referencia, con la intención de que evoquen mentalmente los resultados de las tablas:

- En la columna del 3, ¿hay más números pares o impares?
- ¿Cuántos números hay de una cifra?
- ¿Cuántos números hay acabados en 7?
- ¿Cuántos números hay que empiecen por el 6?



×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Imagen 6. Tablero multiplicativo vacío. Elaboración propia.

Para acabar, les ofreceremos un soporte impreso con un tablero multiplicativo vacío para que lo completen a partir de demandas del tipo:

- Completa las casillas que contienen valores mayores que 50.
- ¿Dónde están los números que contienen al 8? Completa dichas casillas. El objetivo de esta actividad es completar el tablero para, posteriormente, analizar con los asistentes las regularidades que se ponen de manifiesto cuando representamos todos los resultados de las tablas de multiplicar.

Igual que en la primera actividad, haremos una puesta en común en la que reflexionaremos sobre la tarea desde el punto de vista docente. Lejos de ser una tabla de números para recordar, el tablero nos ofrece un modelo para representar los resultados de las tablas y analizarlos:

- Su simetría refleja la propiedad conmutativa de la multiplicación.
- Solo la cuarta parte de las 100 celdas corresponden a números impares.
- Aunque hay 100 celdas en total, solo hay 42 valores diferentes: algunos de estos valores aparecen solo una vez (por ejemplo, 49) y otros aparecen varias veces (por ejemplo, 30 aparece cuatro veces) lo que permite ver qué resultados tienen en común distintas tablas.
- Si extendemos el tablero hacia la derecha y hacia abajo podemos analizar la distribución de los múltiplos de un número.

Imagen 7. Tablero multiplicativo extendido con los múltiplos de las tablas del 3, 4, 6 y 8. (Barba & Calvo, 2016)

- Si pedimos a los alumnos que completen las celdas que contienen números superiores a 50 pueden sorprenderse al ver que a pesar de que los 100 números que llenan la parrilla están en el rango [1,100], la cantidad de resultados en el rango [51,100] es inferior al 20%. También podemos pedirles que analicen la distribución de los resultados en cuatro zonas según los resultados sean menores que 25, entre 25 y 50, entre 50 y 75 o mayores que 75:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Imagen 8. Distribución de los resultados de las tablas en 4 zonas del tablero multiplicativo (Barba & Calvo, 2016)

Tarea rica 3: Patrones y persistencia multiplicativa

La última tarea que propondremos consiste en hacer un análisis de la persistencia multiplicativa en un tablero del 10 al 99.

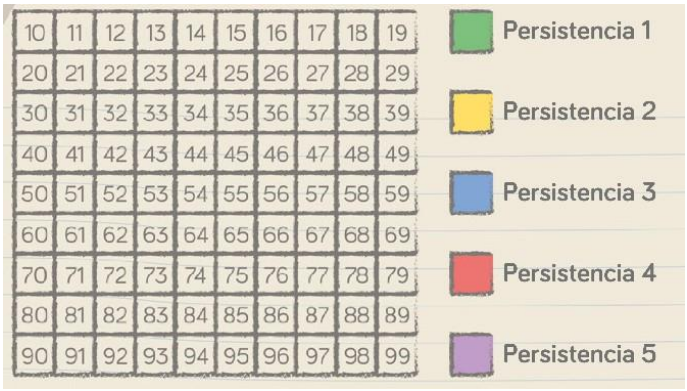


Imagen 9. Tablero con números del 10 al 99 para calcular la persistencia multiplicativa. Elaboración propia.

En el taller descubriremos (o recordaremos) en qué consiste la persistencia multiplicativa de un número natural. Por ejemplo, la persistencia de 26 es 2 porque sus cifras necesitan dos etapas de multiplicaciones entre ellas para llegar a un número de una cifra: 2x6=12 y 1x2=2.

Antes de completar el tablero anterior, pediremos que hagan una predicción: ¿Qué número de 2 cifras creéis que tiene una persistencia multiplicativa mayor? ¿Y menor?

Una vez puestos en común los razonamientos, pediremos que completen el tablero según la persistencia multiplicativa de cada número y que vayan completando un gráfico de barras que nos permitirá analizar qué persistencia multiplicativa es la más frecuente y la menos frecuente.

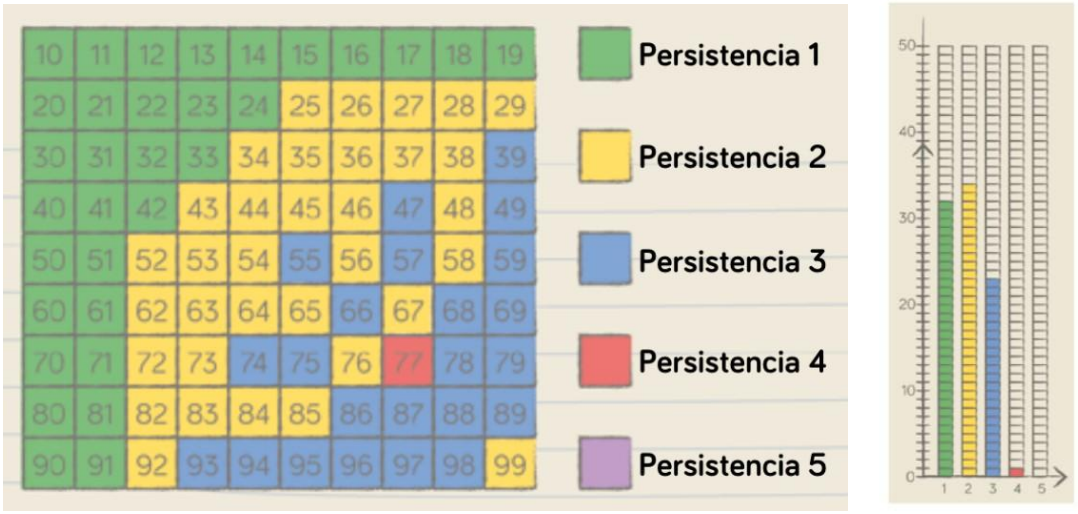


Imagen 10. Tablero con números del 10 al 99 coloreados según su persistencia multiplicativa y gráfico de barras que recoge la cantidad de números que hay con cada persistencia. Elaboración propia.

A continuación, analizaremos patrones de los resultados obtenidos. Pretendemos que los asistentes observen regularidades, por ejemplo, relacionadas en el tipo de cifra que hay en los números.

- ¿Qué pasa cuando una de las cifras es un 0? ¿Y si es un 1? ¿Y si es un 2?
- ¿Podemos deducir la persistencia de un número a partir de otra?

Le daremos mucha importancia a esta instancia de buscar y compartir las regularidades, con el objetivo de potenciar destrezas propias del proceso de razonamiento.

Durante la realización de la tarea por parte de los asistentes, encontraremos oportunidades para experimentar preguntas que pueden enriquecerla. Al concluir,

reservaremos un espacio para discutir los elementos clave que debemos considerar para llevar a cabo la actividad de manera efectiva en el aula, así como las preguntas que pueden potenciar aún más nuestra propuesta. Por ejemplo, en el tablero que contiene números menores que 100 la mayor persistencia es 4, si ampliamos el tablero para analizar números de tres cifras:

- ¿cuál es el primer número de persistencia 5? (679).
- ¿continúa habiendo números de persistencia 1? (muchos ejemplos: 100, 101, 202, 308, etc)
- ¿cuál es la persistencia más frecuente? (2).

Conclusión

A través de actividades ricas y variadas, como las presentadas en este taller, los estudiantes no solo consolidan su dominio de las tablas de multiplicar, sino que también exploran patrones, desarrollan estrategias y fortalecen su capacidad de análisis y razonamiento. La gestión adecuada por parte del docente, que fomenta un ambiente colaborativo y de exploración en el aula, es fundamental para garantizar que todos los alumnos puedan participar activamente y beneficiarse plenamente de estas actividades.

Al considerar la implementación de estas prácticas en el aula, es importante tener en cuenta las necesidades individuales de los estudiantes y adaptar las actividades para asegurar la inclusión y el éxito de todos. Esto implica no solo ofrecer apoyo adicional a aquellos que lo necesiten, sino también desafiar a los estudiantes más avanzados con oportunidades de ampliación y exploración.

Referencias

Barba, D. & Calvo, C. (2016). Ell@s tienen la palabra: Tareas ricas para practicar las tablas. *SUMA: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, nº 82, 69-76.

Calvo, C., Caelles, M., Morera, L. & Torrellardona, M. (2024). Atividades Ricas para Ensino Fundamental II: Os Processos Matemáticos em Sala de Aula. *MultiAtual*, nº 5(1), 22-31. https://doi.org/10.5281/ZENODO.10513162

NRICH team (2013). Low Threshold High Ceiling - an Introduction. Millennium Mathematics Project. Cambridge University. https://nrich.maths.org/10345

Vilalta, A., Calvo, C. & Correig, E. (2023). Automatizar las tablas de multiplicar: Un propósito que va más allá de 3ro de primaria. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº 99, 61-67.

¿JUGAMOS OTRA?, ¡¡¡JUGAMOS OTRA!!!

José M. Maimó Oliver[1], Luis Cros Lombarte[2], Helena Garví Casas[3].
josemiguelmaimo@gmail.com[1], lluis.cros@sarria.epiaedu.cat[2], hgarvi@xtec.cat.[3]

[1]CEIP Ses Rotes Velles, Santa Ponça, Calvià (Baleares, España)

[2]Escola Pia Sarrià (Barcelona, España)

[3]Institut Pau Casals (Badalona, España)

Núcleo temático: Recursos para el aula, procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Todos los niveles educativos.

RESUMEN

Los juegos de mesa ofrecen una experiencia de aprendizaje activa y participativa. A través de la generación de estrategias ganadoras se desarrollan habilidades y competencias de manera significativa, tanto a nivel social y personal como de contenido matemático. El objetivo del taller, es invitar a los asistentes a probar varios juegos de mesa contemporáneos, juegos que hemos probado en el aula y han funcionado muy bien. Además son juegos que se pueden usar para diferentes niveles y diferentes contenidos, esperamos que después del taller los asistentes puedan llevarlos al aula aplicando todas las ideas que surjan en el taller.

Palabras clave: ABJ, aprendizaje lúdico, aprendizaje significativo, matijugando.

1. Presentación.

Hace siete años, un grupo de docentes amantes de las matemáticas y de los juegos de mesa tomamos la decisión de unir esas dos pasiones. En clase, habíamos utilizado juegos clásicos adaptados, como las damas del cálculo, el parchís matemático o el dominó de fracciones, pero veíamos que estos juegos generaban interés al principio, pero enseguida los alumnos perdían interés. Quedando para jugar a juegos de mesa contemporáneos, observamos que todos los juegos, establecer una estrategia ganadora, tiene gran similitud con la resolución de problemas. Además, veíamos que con algunos podíamos hacer practicar, de manera repetitiva, errores que nuestros alumnos cometían de contaje o cálculo sencillo, con una ventaja clara sobre los juegos adaptados, su rejugabilidad, al acabar una partida surgía la frase: ¿JUGAMOS OTRA?, incluso con juegos con un alto componente matemático. Desde ese momento decidimos quedar de manera periódica para analizar juegos y ver su viabilidad como herramienta pedagógica en el aula. Constituimos un grupo de trabajo *SET grup de jocs*, bajo el paraguas de la asociación de profesores de matemáticas de Barcelona *ABEAM*, con un objetivo principal: cubrir todo el contenido que se ha de trabajar en la materia de matemáticas, desde I3 hasta 2º de bachillerato, con juegos de mesa. Desde el comienzo del grupo en el curso 2016-17 hemos analizado más de 200 juegos, compartido la información en talleres para familias, alumnos y profesores, congresos y jornadas de aprendizaje de matemáticas, formando parte de concursos y programas matemáticos, asesorando a claustros de profesores y estudiantes del master de educación, TFG o TRs y amenizando jornadas lúdicas y ferias de juegos. Desde la creación del grupo hemos sobrepasado nuestro ámbito territorial y en estos momentos tenemos miembros colaboradores del grupo en Cataluña, Baleares, Extremadura, incluso Australia. Esperamos seguir muchos años más y ampliar nuestros colaboradores, ya que el mundo del juego de mesa es un mundo vivo, cada año se estima que en el mundo se crean entre 4.000 y 5.000 juegos.

Os invitamos a contactarnos: grupdejocsabeam@gmail.com

2. ¿Cómo se desarrollará el taller?

Dividiremos el espacio donde se realice el taller en cuatro zonas, en cada zona dispondremos las mesas y sillas necesarias para que los participantes puedan jugar a los juegos de la zona. Cada zona corresponderá a un contenido matemático:

+ Numeración, con los juegos Toma 6 y Código secreto 13+4.
+ Geometría: con los juegos La morada maldita y Blokus.
+ Azar: con los juegos Can't stop y SET
+ Lógica/Resolución de problemas: con los juegos 7 to Euler y Hanabi.

Los participantes estarán en cada zona 20 minutos, en ese tiempo jugarán una partida o parte de una partida para conocer el juego. A continuación, intercambiarán propuestas de cómo usar el juego en el aula, del contenido que pueden trabajar y del nivel en el que lo pueden llevar a cabo. Los miembros del grupo que realizarán el taller, darán unas fichas de lo que el grupo SET ha analizado de cada juego. En estas mismas fichas se podrán apuntar las ideas que se compartan para que se puedan llevar a casa y aplicar ellos mismos o compañeros del centro de otras etapas.

Cada 20 minutos los participantes rotarán de zona de juego con el objetivo que puedan probar todos las zonas.

Los talleristas también compartirán los enlaces a la lista de juegos analizados y a las carpetas con el material producido por el grupo durante estos siete años.

3. Descripción de los juegos.

3.1. Numeración.

3.1.1- *Toma 6.*

Descripción del juego: *Toma 6* es un juego de cartas en el que pueden jugar de 3 a 10 jugadores, en las que cada jugador dispone de 10 cartas, en cada ronda cada

jugador selecciona una carta que descubren todos los jugadores a la vez. En ese momento se colocan en las cuatro filas de cartas de referencia en orden ascendente por proximidad superior, cuando una fila llega a las 6 cartas, el jugador que la ha puesto se queda con las cartas de la fila y la sanción en puntos que corresponda. Al acabar las 10 rondas, el jugador con menos puntos de sanción, gana la partida.

Las matemáticas en el juego: el juego tiene dos conceptos de trabajo en el bloque de numeración, la secuenciación de números y el trabajo del concepto de decenas, y el concepto de múltiplo y divisor.

Interés en el aula: el juego es adaptable, ya que dispone de 104 cartas, con lo que se puede reducir el número de cartas según interese. En cuanto al concepto de múltiple, se pueden crear barajas de cartas usando otras multiplicidades. Otro de los motivos por los que el juego es ideal para aula es que con tres ejemplares puede jugar toda la clase de manera simultánea.

3.1.2- Código secreto 13+4.

Descripción del juego: en el Código secreto 13+4 unos exploradores han de conseguir llegar al centro de la pirámide para conseguir el amuleto. Para conseguir llegar han de superar las pruebas de cálculo que les irán apareciendo. En cada nivel se han de lanzar 8 dados de diferentes valores, combinando los resultados obtenidos han de igualar el valor que indica el nivel.

Las matemáticas en el juego: las matemáticas en este juego son muy evidentes y están muy presentes por el cálculo.

Interés en el aula: la dificultad de las operaciones matemáticas que se pidan realizar se adaptarán al nivel de los alumnos, simplemente desde sumas y restas hasta operaciones combinadas. Aunque el juego no lo exige, se puede incentivar el uso de operaciones combinadas dando puntuación extra.

3.2 Geometría.

3.2.1- *La morada maldita*.

Descripción del juego: *La Morada maldita* es un juego de mesa diseñado para entre 1 y 4 jugadores. En este juego, los jugadores asumen el papel de valientes aventureros que exploran una mansión encantada en busca de tesoros (gemas) y respuestas sobre la misteriosa maldición que la acecha, ya que hay una gema maldita (la morada maldita).

De esta forma, se colocan todas las fichas del juego en el centro de la mesa. Las fichas, como antes se ha mencionado, representan gemas, cada una con unas características en concreto (color y forma geométrica). Cada jugador recibe cuatro cartas de reto que tendrá que superar colocando las correspondientes gemas encima de la carta. Es un juego de velocidad ya que todos van cogiendo gemas para poder superar sus retos, pero, a diferencia de otros juegos de velocidad, no tiene porque ganar el más rápido en conseguir sus retos, ya que todos los retos que están bien conseguidos son puntos que se guarda cada jugador.

Las matemáticas en el juego: Con el juego se trabajan contenidos de geometría. Con el juego original sin hacerse ninguna adaptación no se trabajan dichos contenidos. De esta forma será a partir de posibles adaptaciones que se pudieran hacer para conseguir que la geometría se pueda trabajar de una forma más evidente. De esta forma, en el taller que planteemos enseñaremos posibles variantes que se pueden hacer por tal de trabajar diferentes contenidos de matemáticas, ya sea a partir del mismo juego o a través de otras propuestas relacionadas con él.

Interés en el aula: A partir del análisis de las fichas del juego se pueden trabajar muchos conceptos geométricos, tanto relacionados con las figuras planas como también con los cuerpos geométricos. Se pueden reforzar conceptos como podrían ser el nombre de las diferentes figuras, sus elementos, la simetría e incluso el perímetro y área.

Por otra parte, también se pueden realizar diferentes clasificaciones o agrupaciones teniendo en cuenta una condición que coincida en diferentes fichas. Otra propuesta podría ser la creación de nuevos retos (nuevas cartas) añadiendo los conceptos geométricos que se pretendan trabajar. De esta forma el propio alumnado tendría su propia versión del juego. Para que el nuevo diseño sea más completo también podrían diseñar nuevas fichas.

3.2.2- *Blokus.*

Descripción del juego: *Blokus* es un juego de estrategia abstracta diseñado para 2 a 4 jugadores. En este juego, los jugadores colocan piezas de colores en un tablero cuadriculado con el objetivo de cubrir la mayor área posible mientras bloquean a sus oponentes. Cada jugador comienza con un conjunto de piezas de forma única y debe colocarlas estratégicamente para maximizar su espacio y limitar las opciones de los demás jugadores.

Las matemáticas en el juego: *Blokus* es un juego con un gran potencial educativo porque permite trabajar procesos matemáticos muy variados. A partir del componente principal del juego, sus fichas, se podrían trabajar conceptos geométricos partiendo de las figuras planas y también del concepto de simetría. Por otra parte, las fichas tienen áreas diferentes, se podrían usar las fichas de área 5 (pentóminos) y ver con cuáles de ellas se podría construir un cubo.

Por otra parte, el potencial principal del juego sería analizar posibles estrategias en función de las fichas del juego y el momento de la partida para poderlas usar. Se trata de un juego en el que los jugadores deben pensar de manera estratégica para optimizar el uso de su espacio en el tablero, lo que implica planificación, cálculo de áreas y visualización espacial.

Interés en el aula: *Blokus* tiene un gran potencial para ser usado en el aula ya que ayuda a fomentar el desarrollo de habilidades cognitivas como la planificación, el razonamiento lógico y la toma de decisiones. Los estudiantes pueden mejorar su

capacidad para pensar de manera estratégica mientras exploran diferentes formas de organizar y manipular las piezas en el tablero.

En el taller además de dinamizar partidas con el juego explicaremos qué tipos de preguntas se pueden plantear para trabajar la metacognición (pensar a partir del propio pensamiento), a través de preguntas que te hacen reflexionar sobre el propio progreso, la comparación de diferentes estrategias, el propio análisis de dichas estrategias, posibles usos de cada ficha, etc.

3.3 Azar.

3.3.1- Can’t stop.

Descripción del juego: *Can't Stop* es un juego de mesa diseñado por Sid Sackson y publicado por Parker Brothers el 1980. La edición original se agotó, hasta que Face 2 Face Games lo reeditó en 2007. Playdek desarrolló una versión para iOS el 2012. El objetivo del juego es ser el primero al conquistar tres montañas (llegar a la parte superior de tres de las columnas del tablero, que simulan cordadas de escalada). Pero cuanto más arriesga el jugador al echar los dados durante su turno, más grande es el riesgo de perder todos los adelantos realizados durante este turno.

El juego consta un tablero con once columnas, una para cada uno de los números del 2 al 12. Las columnas tienen 3, 5, 7, 9, 11, 13, 11, 9, 7, 5 y 3 casillas cada una, respectivamente. La cantidad de espacios de cada columna se aproxima a la probabilidad de obtener el número correspondiente a aquella columna al lanzar dos dados y sumar los resultados. Además del tablero, necesitamos 4 dados y 11 fichas de cada color (tantos como jugadores participen), y 3 fichas de un color neutro (blanco o negro) que usarán todos los jugadores para avanzar durante su turno.

A cada turno, el jugador tira cuatro dados, los separa en dos parejas como quiera, suma cada pareja obteniendo dos números y elige una de las parejas de números obtenidas. Por ejemplo, si se obtiene un 2, 3, 5 y 6 puede agruparlo como: 5 y 11, 7 y 9, o 8 y 8. Si los marcadores neutrales están fuera del tablero, se ponen al tablero en las columnas correspondientes a los 2 totales escogidos. Si ya tiene una ficha de su color en la columna, pone el marcador neutral un espacio más arriba. Si los tres marcadores neutrales ya están colocados en el tablero, pero en columnas que no se pueden hacer con ninguna suma, el turno acaba, el jugador retira los marcadores neutros y no avanza nada en este turno.

Después de mover los marcadores neutrales, el jugador elige si volverá a tirar o no. Cuando el jugador se para, cambia los marcadores neutrales por fichas de su color. Si el jugador reinicia esta columna en un turno posterior, empieza a subir desde el lugar donde había colocado anteriormente la ficha de su color. Si el jugador no se detiene, tiene que poder avanzar como mínimo uno de los marcadores neutrales en su próxima tirada, de lo contrario pierde cualquier avance realizado en este turno.

Cuando un jugador llega al espacio superior de una columna y se para, conquista la columna y ningún otro jugador podrá hacerlo. El primer jugador que conquista tres columnas gana la partida.

Las matemáticas en el juego: Uno de los juegos usados para descubrir la no equiprobabilidad es la carrera de camellos. Sin embargo, este juego es poco interesante como juego ya una vez descubierto cuáles son los camellos que tienen mayor probabilidad de ganar, el juego deja de ser divertido. En cambio, Can't Stop es un excelente y divertido juego para tratar la misma idea de no equiprobabilidad que mantiene la incertidumbre hasta el final. El cambio esencial es que la forma del tablero trata de compensar las diferencias de probabilidad.

Interés en el aula: Can't stop es uno de los juegos con mayor rejugabilidad que hemos usado, esto permite profundizar tanto en la probabilidad como en la estadística de los resultados obtenidos. Además, se puede profundizar cambiando las condiciones de los dados usado o el cálculo con los resultados obtenidos.

3.3.2- SET

Descripción del juego: Este juego fue creado por Marsha Falco (1974) y publicado inicialmente por Set Enterprises el 1991. La idea del juego proviene del sistema de codificación que su creadora estaba utilizando en su trabajo como genetista. Actualmente se puede encontrar una edición del editorial Devir. Es un juego de lógica y percepción visual que se puede jugar de forma individual o en grupo. Está formado por una baraja de 81 cartas que habrá que mezclar bien y colocar 12 cabeza arriba formando un rectángulo de 3 x 4.

Cada carta tiene cuatro características:

SÍMBOLO: óvalo, gusano o rombo.

COLOR: rojo, verde o lila.

CANTIDAD: uno, dos o tres símbolos.

FONDO: el interior de los símbolos puede ser totalmente coloreado, rayado o blanco.

El objetivo del juego es identificar sets. Un SET son 3 cartas de forma que cada una de las 4 características, evaluadas por separado, son iguales en las tres cartas o diferentes en todas ellas. Es decir, si dos cartas son iguales en alguna de las características y la otra carta es diferente, entonces no es un SET. Cuando un jugador encuentra un SET lo muestra al resto de jugadores que lo tendrán que validar. Si es correcto se quedará con las tres cartas y si no lo es tendrá que devolver tres cartas suyas a la pila. De este modo se habitúa a todos los jugadores a evaluar un resultado obtenido, hecho importante en la resolución de problemas. Cuando se ha hecho un Set, se ponen tres cartas de la pila en el lugar dejado por las cartas retiradas y sigue el juego hasta que se agotan todas las cartas.

Las matemáticas en el juego: Aunque es un juego que trabaja la lógica y la búsqueda de patrones, nosotros lo traemos en este bloque de contenidos para trabajar la combinatoria en la creación de las cartas.

Interés en el aula: El *SET*, juego que da nombre a nuestro grupo, puede introducirse en clase de matemáticas en muchos niveles distintos. Si queremos usarlo para plantear problemas de probabilidad, será adecuado para cuarto de ESO o

Bachillerato.

Es posible plantear problemas de dificultad muy diversa. Esta es una lista de 10 problemas para empezar:

- ¿Cuántas cartas tiene el juego si sabemos que aparecen todas las posibles (con las cuatro características y las tres posibilidades para cada característica) sin ninguna repetición?
- Si en lugar de cuatro características solo hubiera tres, pero cada una tuviera cuatro posibilidades, y como antes hubiera todas las cartas posibles sin repeticiones, ¿habría más cartas ahora la pila? Generaliza el número de cartas de la pila para n características y m posibilidades para cada una.
- Si tenemos dos cartas, ¿cuántas cartas habrá que hagan un SET con estas? ¿Y si tenemos una carta?
- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden poner las 12 primeras cartas formando un rectángulo de 3 x 4?
- Fijamos el valor de una variable. Por ejemplo, nos quedamos con todas las cartas de color azul y descartamos el resto. ¿Cuántas cartas tendremos?
- ¿Cuántas cartas hay si fijamos el valor de dos variables? Es decir, ¿cómo podemos calcular la cantidad de cartas que son rombos de color azul?
- ¿Cuántos Sets diferentes podemos encontrar si nos quedamos con las cartas que son rombos azules? ¿Y si nos quedamos con las que son azules?

- Si jugamos con las 81 cartas, ¿cuántos Sets hay de forma que las cartas no compartan el valor de ninguna característica? ¿Y cuántos Sets diferentes hay en total?

- Si sacamos tres cartas de la pila al azar, ¿cuál es la probabilidad que hagan un SET?

- Cuál es la probabilidad de no formar un SET con las 12 primeras cartas?

3.4 Lógica/Resolución de problemas.

3.4.1- 7 to Euler

Descripción del juego: Este juego de cartas competitivo, es una adaptación matemática desarrollada por nosotros, se inspira en el aclamado *Love Letter*.

La trama del juego gira en torno a la necesidad de obtener la aprobación de un matemático de renombre o eliminar a los competidores que han realizado descubrimientos similares para poder publicar nuestra propia investigación. Cada participante asume el rol de un matemático que ha realizado un descubrimiento de importancia. Esta dinámica exige el uso de la lógica y la estrategia para eliminar a los rivales o sobrevivir hasta el último turno de la ronda y alcanzar al matemático de mayor prestigio.

Las matemáticas en el juego: *7 de Euler* fomenta el desarrollo de diversas estrategias, así como la memoria y el razonamiento, en la búsqueda de la victoria. Además, ofrece una oportunidad para explorar en el aula la historia de las matemáticas y algunos matemáticos célebres.

Interés en el aula: Concebido para ser disfrutado por 4 jugadores, es fácilmente adaptable a grupos mayores de jugadores, Recomendado para los últimos ciclos de primaria, así como para la educación secundaria y el bachillerato, este juego proporciona un recurso educativo emocionante y desafiante para el alumnado.

3.4.2- Hanabi

Descripción del juego: Este juego de cartas colaborativo ofrece una experiencia única, diseñada para ser disfrutada en parejas o grupos de hasta 5 jugadores. La victoria del grupo se determina por la habilidad conjunta de alcanzar los objetivos establecidos durante el juego.

En *Hanabi,* los participantes tienen acceso a la información de las cartas de sus compañeros, pero no a las propias, lo que implica una dinámica donde la comunicación estratégica y la capacidad de deducción son fundamentales para conseguir completar las series de fuegos artificiales completas sin errores que eliminen a los jugadores.

Además del juego comercial, veremos una adaptación geométrica y una adaptación algebraica creada por los miembros de *SET, grupo de juegos de ABEAM.*

Esta dinámica fomenta el desarrollo de habilidades como la lógica, la memorización y la estrategia.

Las matemáticas en el juego: el juego es de secuenciación numérica siguiendo un patrón de color y numérico. La estrategia y la lógica que se ha de aplicar nos servirá para potenciar la resolución de problemas.

Interés en el aula: Este juego se presenta como una herramienta pedagógica valiosa, ideal para promover el trabajo en equipo y el desarrollo cognitivo en entornos educativos. Su aplicación en el aula resulta beneficioso tanto para el ciclo superior de primaria como para la educación secundaria o el bachillerato

Conexiones entre área y perímetro con material manipulativo

Carles Granell Fernández

Cgranel4xtec.cat
Col·legi Sant Lluís

Núcleo temático: Recursos para el aula y Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

La construcción y descomposición de figuras planas es un proceso clave en el desarrollo del sentido espacial (Albarracín et al., 2018). A través de diferentes tareas contextualizadas en un ambiente de resolución de problemas y usando diferentes materiales manipulativos (baldosas cuadradas, papel y tijeras, geoplanos, *Pattern Blocks* y aplicativos digitales) se propone una secuencia de actividades prácticas que contribuya a la diferenciación entre los conceptos de área de y de perímetro, así como sus relaciones estableciendo conexiones entre el sentido espacial y de la medida ¿Qué rectángulos tienen el mismo valor de área que de perímetro? ¿Cuál es el perímetro máximo que se puede obtener con un número de baldosas cuadradas? ¿Cómo podemos aumentar el área sin modificar el perímetro de una figura construida con *Pattern Blocks*?

Palabras clave: área, perímetro, sentido espacial, material manipulativo

1. Introducción

La geometría escolar debe tener en cuenta la importancia de diferenciar los conceptos *construir* y *dibujar* (Albarracín et al., 2018) y este hecho recae en la relación que existe entre la fase de construcción y los procesos de composición y descomposición de las figuras, así como la relación con las propiedades de las mismas. El modelo desarrollado por van Hiele de desarrollo del pensamiento matemático no solo tiene en cuenta dicha relevancia, sino que describe cinco niveles de comprensión por los cuáles pasa el alumnado: visualización, análisis, abstracción, deducción y rigor (Crowley, 1987). Estos niveles se gradúan de 0 a 4, siguiendo el trabajo de los van Hiele (Vojkuvkova, 2012).

Así pues, *construir* consiste en elaborar elementos geométricos a partir de unidades pequeñas y conocidas por el alumnado, como por ejemplo pentominós (Golomb, 1996). Esta experimentación con materiales manipulativos (baldosas cuadradas, papel y tijeras, geoplanos, *Pattern Blocks*) sobre la cual proponer actividades de construcción, descomposición y análisis permiten no solo diferenciar el área del perímetro, sino también explorar de manera comprensiva las posibles relaciones existentes entre ambos (Normativa Educación Primaria Aragón, 2022).

A partir de la actividad descrita por Malloy (1999) y su conexión con el modelo de pensamiento geométrico de van Hiele, en el taller se propondrá una secuencia de actividades en un ambiente de resolución de problemas que, mediante el uso de diferentes materiales, ayudaran a diferenciar área de perímetro, así como a ver las relaciones entre estos conceptos. El aprendizaje de las áreas no debería organizarse nunca en torno al aprendizaje de las fórmulas, sino a través de la descomposición y medida (Normativa Educación Primaria Aragón, 2022).

2. Secuencia de actividades prácticas

2.1. Construcciones con baldosas

La primera tarea parte de la propuesta de Malloy (1999) y se propone que se construyan diferentes figuras a partir de baldosas cuadradas de papel. En las

diferentes situaciones que se proponen a continuación se fomenta la exploración de las propiedades de los materiales y se explotan las propiedades de los mismos

2.1.1 *¿Y tú qué puedes añadir?*

Supongamos que los lados de las baldosas cuadradas en esta figura tienen una unidad de longitud (**Imagen 1**). Agrega las losetas cuadradas necesarias para que la figura tenga un perímetro de 16. Los cuadrados que se agreguen deben coincidir de modo que se toquen en al menos un lado de la figura (Malloy, 1999, p. 89).

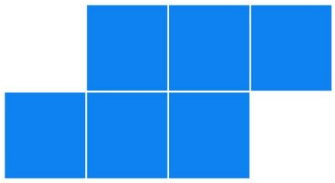


Imagen 1. ¿Y tú qué puedes añadir?

A continuación, se propondrán otras preguntas para seguir estirando la tarea:

¿Dónde colocarías una baldosa para aumentar el perímetro en 1 unidad? ¿Y en 2 unidades? ¿Cuál es el perímetro máximo que puedes obtener?

¿Cómo podrías aumentar el área en 3 y no aumentar el perímetro?

¿Cuál es la menor cantidad de losetas que se pueden agregar para aumentar el perímetro a 16 unidades? Describe esta nueva forma. ¿Cuál es su área?

2.1.2 *¡Manos a la obra!*

Esta segunda tarea requiere que los participantes sigan trabajando con baldosas cuadradas, las cuales podrán usar para realizar una serie de construcciones que deberán cumplir unos requisitos de dimensiones de área y perímetro (**Imagen 2**).

Podrán usar tijeras y papel para modificar las baldosas, si así lo necesitan.

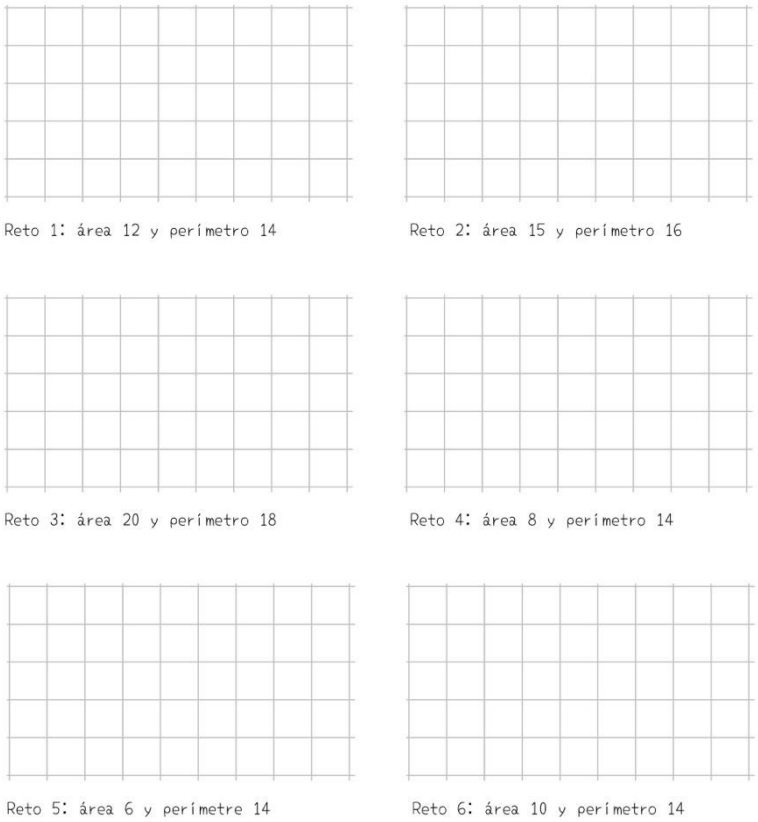


Imagen 2. Ficha de la actividad *¡Manos a la obra!*

2.1.3 *¿Es posible?*

La tercera tarea se propone investigar "¿Qué rectángulos tienen el mismo valor de área que de perímetro?". En esta última parte, se trabajará una investigación exhaustiva para determinar en qué casos es posible y analizar qué relaciones se pueden observar (**Imagen 3**) "¿Es posible obtener un perímetro con valor impar?" Para la actividad se proporcionarán también geoplanos y gomas elásticas.

Imagen 3. Fotografía de alumnado de 4º de primaria haciendo la tarea

2.2. Construcciones con *Pattern Blocks*

Para esta propuesta se usarán los bloques lógicos conocidos como *Pattern Blocks* y, en concreto, el hexágono amarillo, el rombo azul, el trapecio rojo y el triángulo verde (**Imagen 4**), ya que para el trabajo del área y el perímetro que se busca, esta última figura ejerce como subunidad de medida de todas las anteriores.

Imagen 4. Selección de *Pattern Blocks* que se usarán en la actividad

2.2.1 *Usa la subunidad*

Para esta primera tarea, se usará el triángulo verde como unidad de medida tanto de la superficie (1 u^2) como para la longitud del lado (1 u). Siguiendo la mecánica de la segunda actividad con baldosas cuadradas, los participantes deberán realizar una serie de construcciones que cumplan unos requisitos de dimensiones de área y perímetro (**Imagen 5**). Sin embargo, como se puede ver en la plantilla, para cada caso únicamente se podrán usar las figuras indicadas. Para representar las soluciones, se proporcionarán tramas isométricas.

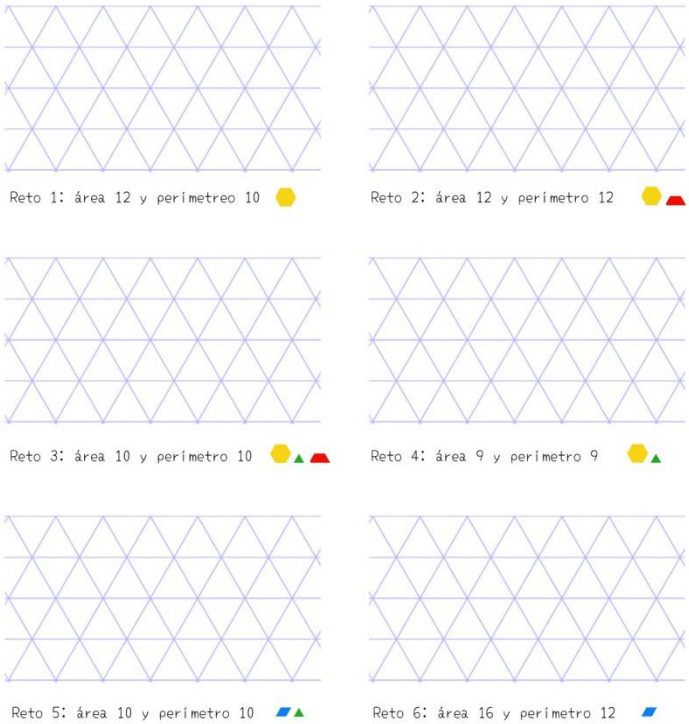


Imagen 5. Ficha de la actividad *Usa la subunidad*

2.2.2 *Construye la figura*

Para esta última actividad, se usarán también los *Pattern Blocks* seleccionados y seguiremos usando el triángulo verde como unidad de medida de la superficie y longitud. Para este caso, cada figura tendrá una puntuación que, como se puede ver a continuación, no es proporcional a la relación de superficies existente:

- Hexágono amarillo: 13 puntos
- Trapecio rojo: 7 puntos
- Rombo azul: 5 puntos
- Triángulo verde: 3 puntos

El reto consiste en formar una figura con una superficie de 20 u^2 y un perímetro de 14 unidades de manera que se usen figuras que acumulen la mínima puntuación posible, como se puede ver en el ejemplo (**Imagen 6**).

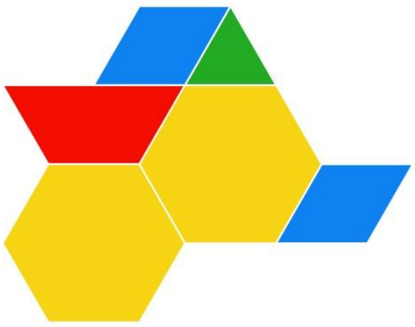


Imagen 6. Ejemplo de construcción

Para acabar el taller, se propondrán las preguntas que sugiere Malloy (1999), pero adaptadas al trabajo con *Pattern Blocks* y esta última tarea:

- ¿Dónde colocarías una figura para aumentar el perímetro en 1 unidad? ¿Y en 2 unidades? ¿Cuál es el perímetro máximo que puedes obtener?
- ¿Cómo podrías aumentar el área en 3 y no aumentar el perímetro?

Para estas preguntas se propondrá también que se trabaje con las aplicaciones digitales Polypad (*https://polypad.amplify.com/p/3SaqniKZRv31Q*) y Math Learning Center *(https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/*).

Referencias

Albarracín, L., Badillo, E., Giménez, J., Vanegas, Y. y Vilella, X. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Editorial Síntesis. España.

Crowley, Mary L. (1987) The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought*. Learning and Teaching Gemretry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Mary Montgomery Lindquist, 1-16.

Golomb, S.W. (1996). *Polyominoes, Puzzeles, Patterns, Problems, and Packings.*

Editorial Princeton University Press. Princeton.

Malloy, Carol E. (1999). Perimeter and Area through the van Hiele Model. *Mathematics Teaching in the Middle School 5* (Octubre 1999): 87-90

Normativa Educación Primaria Aragón (2022). ORDEN ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Vojkuvkova, I. (2012). *The van Hiele Model of Geometric Thinking*. WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 72–75,

Algoritmos flexibles para desarrollar el sentido numérico a través de la multiplicación y división: movimiento OAOA

Marcos Marrero Cárdenas
CEIP Isaac de Vega marcosmarrerocardenas@gmail.com

Núcleo temático: procesos, recursos para el aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

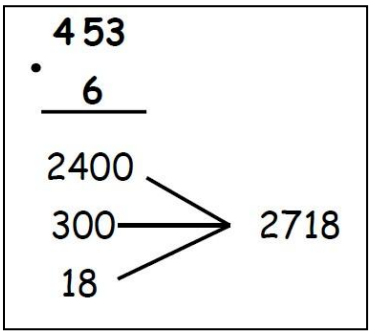
Tal y como recoge la normativa actual, el uso de los algoritmos para las operaciones básicas debe tener como objetivo el desarrollo del sentido numérico, el cálculo mental, las relaciones y propiedades numéricas y la comprensión profunda de nuestro sistema decimal. Mas allá de obtener un número exacto en el cálculo (también importante), la propuesta aritmética desarrollada en el aula debe perseguir estos aspectos fundamentales en la aritmética escolar.

Palabras clave: sentido numérico, algoritmos, cálculo mental.

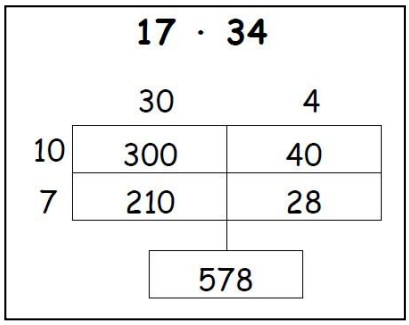
En este taller se mostrarán y se practicarán diferentes algoritmos para las operaciones básica de la suma y la resta, tanto con números naturales como con números decimales. El objetivo es practicar y analizar didáctica y matemáticamente los diferentes algoritmos para multiplicación y la división, tanto con números naturales como con números decimales, y poder enriquecer nuestra práctica docente y mejorar el sentido numérico de nuestro alumnado.

El tallerista realizará una puesta en común con los asistentes de cada uno de los algoritmos, una vez que estos hayan sido practicados por los asistentes (dificultades,

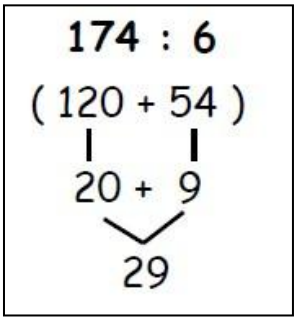
posibles materiales manipulativos previos a utilizar, propiedades aplicadas y aprendidas a través de estos, etc.)



Multiplicación en vertical



Multiplicación modelo rectangular



División por descomposición

Referencias

Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2015). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. Revista Internacional De Educación Para La Justicia Social, 3(1). https://doi.org/10.15366/riejs2014.3.1.002

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Editorial CCS.

Constance, Kamii (2003). *El Niño reinventa la aritmética : implicaciones de la teoría de Piaget.* Editorial Visor.

De la Fuente Alía, S. (2018). El movimiento OAOA. Un enfoque para la enseñanza de la Aritmética en la Educación Primaria. (Trabajo de Fin de Grado). https://dspace.uib.es/xmlui/bitstream/handle/11201/147737/Fuente_Alia_Sandra.pdf?sequenc

Murcia, J.A. (2019). *OAOA.* https://www.tocamates.com/oaoa/

Martín, A. (2019). El movimiento “Matemáticas OAOA”. Números. Revista de

Didáctica de las Matemáticas, 101, 41-44. http://funes.uniandes.edu.co/14806/1/Martin2019El.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston.

Desarrollando el Pensamiento Computacional en Educación Infantil y 1º ciclo de Primaria

Nieves R. González Arrocha
nievesglezarrocha@gmail.com
Escuelas Pías Tenerife

María Nila Pérez Francisco
mperfrah@canariaseducación.es
Consejería Educación Gobierno de Canarias

Ángel Antonio García Marrero
aagm38@gmail.com
Escuelas Pías Tenerife

Núcleo temático: Procesos y recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil y Primer Ciclo de Educación Primaria

RESUMEN

El taller de pensamiento computacional (PC) tiene como objetivo principal proporcionar al docente estrategias y actividades prácticas para integrar el PC en su aula, fomentando habilidades como la resolución de problemas, el pensamiento lógico y crítico y la creatividad en su alumnado.

Se empleará un enfoque participativo y práctico, utilizando herramientas y recursos accesibles. Se explorarán actividades desconectadas basadas principalmente en el juego y que están cognitivamente conectadas con las habilidades de computación, estimulando así la capacidad de utilizar el pensamiento abstracto, de simplificar los elementos de un problema, de llevar a cabo una secuencia de procesos, que ofrezcan

una solución. Todo ello promoviendo también un espíritu crítico y cooperativo en los niños y niñas.

La investigación demuestra que la introducción temprana del PC beneficia el desarrollo cognitivo de los niños y niñas, promoviendo habilidades de abstracción, lógica y creatividad. El PC es una habilidad cognitiva que permite a los niños desarrollar su capacidad para formular, representar y resolver problemas.

Palabras clave: Pensamiento computacional, Actividades desenchufadas, Computational thinking unplugged, aprendizaje.

Taller: Desarrollando el Pensamiento Computacional en Educación Infantil y 1º Ciclo de Educación Primaria

Introducción

En un mundo cada vez más digitalizado se hace necesario preparar a nuestro alumnado con habilidades que les permitan enfrentar los desafíos del siglo XXI, y es por ello por lo que la práctica educativa se ha tenido que ir adaptando a nuevas necesidadaes. El pensamiento computacional emerge como una competencia fundamental en este contexto, brindando a los niños y niñas herramientas para resolver problemas de manera efectiva y creativa. Este taller tiene como objetivo explorar estrategias metodológicas y didácticas para integrar el pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas desde edades más tempranas.

1. Líneas metodológicas y didácticas

El enfoque metodológico de este taller se basa en las siguientes líneas:

Experimentar: se fomentará la experimentación activa como medio para descubrir conceptos matemáticos y desarrollar habilidades computacionales. Los estudiantes

tendrán la oportunidad de manipular materiales concretos y participar en actividades prácticas que les permitan explorar diferentes conceptos matemáticos de manera tangible.

Descubrir: se promoverá el descubrimiento guiado, permitiendo que los estudiantes exploren y construyan su propio conocimiento. Los educadores actuarán como facilitadores, planteando preguntas orientadoras y proporcionando oportunidades para la exploración independiente.

Comprender: se priorizará la comprensión profunda sobre la memorización superficial, utilizando ejemplos concretos y situaciones reales para conectar los conceptos matemáticos con la vida cotidiana. Los estudiantes serán desafiados a explicar sus procesos de pensamiento y a buscar conexiones entre diferentes áreas del currículo matemático.

Verbalizar: se alentará a los estudiantes a verbalizar sus procesos de pensamiento, explicando sus razonamientos y estrategias utilizadas para resolver problemas. Se promoverá el lenguaje matemático preciso y se proporcionarán oportunidades para la comunicación oral y escrita.

Aplicar: se incentivará la aplicación práctica de los conceptos aprendidos en diferentes contextos, promoviendo la transferencia de conocimiento y habilidades. Los estudiantes serán desafiados a aplicar lo que han aprendido para resolver problemas del mundo real y para participar en proyectos interdisciplinarios.

Además, se fomentará el trabajo colaborativo y la interacción entre los niños y niñas como medio para enriquecer el aprendizaje y promover el intercambio de ideas. La discusión será un elemento central en el aula, permitiendo la reflexión sobre sus propias ideas y comprender mejor los conceptos matemáticos. Se utilizará el error como una oportunidad de aprendizaje, alentando a los estudiantes a analizar y comprender sus errores para mejorar su comprensión.

2. Pensamiento computacional

El pensamiento computacional se basa en los pilares de descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, algoritmos, lógica y evaluación. Estos conceptos se aplican en la resolución de problemas matemáticos de la siguiente manera:

Descomposición: dividir un problema complejo en problemas más pequeños y manejables. Esto permite al alumnado abordar grandes problemas de manera sistemática y resolverlos paso a paso.

Reconocimiento de Patrones: identificar regularidades o secuencias repetitivas en los datos o situaciones problemáticas. Los niños y niñas aprenderán a buscar patrones en los datos y a utilizar esta información para predecir resultados futuros.

Abstracción: simplificar la información, ignorando detalles irrelevantes para centrarse en lo esencial. Esto permite la concentración en los aspectos más importantes de un problema y desarrollar una comprensión más profunda.

Algoritmos: desarrollar una secuencia ordenada de pasos para resolver un problema de manera eficiente. El alumnado aprenderá a diseñar algoritmos para resolver problemas matemáticos y a evaluar la eficacia de sus soluciones.

Lógica: aplicar el razonamiento lógico para analizar y evaluar posibles soluciones. Aprenderán a pensar de manera crítica y a utilizar la lógica para tomar decisiones informadas en situaciones matemáticas.

Evaluación: reflexionar sobre el proceso y los resultados obtenidos, identificando posibles mejoras o alternativas. Evaluarán sus propias soluciones y aprenderán a buscar oportunidades de mejora continua.

2.1. Actividades desconectadas o desenchufadas

No siempre es necesario tener una pantalla delante para poder trabajar el pensamiento computacional. La tendencia “computing unplugged” hace referencia a las actividades que trabajan este procedimiento, pero sin utilizar un ordenador. Las actividades desconectadas o desenchufadas son una herramienta poderosa para trabajar el pensamiento computacional sin necesidad de dispositivos digitales.

Estas actividades son lúdicas, kinestésicas, intuitivas y fomentan el aprendizaje constructivista. Algunos ejemplos de actividades desconectadas incluyen juegos de mesa, rompecabezas, actividades de modelado con materiales manipulativos y desafíos matemáticos basados en situaciones reales.

2.2. Beneficios del pensamiento computacional

Integrar el pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas ofrece numerosos beneficios, entre ellos:

Organización y análisis de información de manera lógica.

Desarrollo de habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico.

Fomento de la creatividad y la innovación.

Desarrollo del lenguaje informático y matemático.

Seguridad en el manejo de situaciones complejas.

Desarrollo de habilidades de comunicación y cooperación

Integración del error como parte importante del proceso para alcanzar una solución.

Preparación para enfrentar los desafíos del mundo digital.

Comprensión más profunda y significativa de los conceptos matemáticos.

3. Actividades a desarrollar en el taller

A partir de aquí se relacionan las diferentes actividades que se llevarán a cabo dentro del taller:

Presentación "Desarrollando el pensamiento computacional (infantil y 1ºciclo de primaria)

4. Conclusión

En resumen, el pensamiento computacional es una competencia fundamental que debe ser desarrollada en los niños y niñas desde una edad temprana. Al integrar el pensamiento computacional en la enseñanza de las matemáticas desde educación infantil y primeros cursos de educación primaria, podemos preparar a los niños y niñas para enfrentar los desafíos del siglo XXI y equiparlos con habilidades que les serán útiles en todas las áreas de sus vidas. Con un enfoque metodológico y didáctico centrado en la experimentación, el descubrimiento, la comprensión, la verbalización y la aplicación, podemos proporcionar a los estudiantes las herramientas necesarias para convertirse en pensadores críticos y competentes en el uso de la tecnología.

3. Referencias

3.1. Bibliografía

- Bell, T.; Witten, I.H. y Fellows, M. (2008). *Computer Science Unplugged. Un programa de extensión para niños de escuela de Primaria.* Traducido por Rodríguez A.; Mendoza, L. y Garza, C.E.
- Bordignon,F. e Iglesias, A. (2020). *Introducción al pensamiento computacional*. DG Tamara Pereyra. UNIPE. Argentina.
- Bordignon,F. e Iglesias, A. (2020). *Resolución de problemas con apoyo del pensamiento computacional.* UNIPE. Argentina.

- García Rodríguez, E. y Ramírez Aceves, LP (2022). *Guía de estudio. Actividades desenchufadas.* Alfa Digital. México.
- Posada Prieto, Fernando (2002). *Pensamiento computacional y currículum. Algo más que aprender a programar.*

3.2. Webgrafía

www.programamos.es
www.codeweek.edu
www.bebras.org
https://scratch.mit.edu/projects/editor/
https://www.scratchjr.org/
https://www.google.com/doodles/celebrating-50-years-of-kids-coding
https://ide.mblock.cc/
https://pencilcode.net/edit/first
https://beebot.terrapinlogo.com/
https://pilasbloques.program.ar/
https://aprendoaprogramar.com/
https://www.kodugamelab.com/
https://code.org/
https://www.tynker.com/
https://www.tynker.com/dashboard/student/#/hour-of-code/
https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/1
www.unipe.edu.ar
https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/pedagotic/files/2022/11/cd-12-0000001-pensamiento-computacional.pdf
https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/educarobot/participa22-23/
https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/educarobot/

Redes de aprendizaje: MAQUETEM MATARÓ

Roser Garcia Ferrer
rgarc253@xtec.cat
INS Damià Campeny - Grup Vilatzara / Institut de Ciències de l'Educació - Universitat Autònoma de Barcelona (ICE-UAB)

Xavier Vilella Mir
xvilella@xtec.cat
Grup Vilatzara - Institut de Ciències de l'Educació - Universitat de Barcelona (ICE-UAB)

Núcleo temático: conexiones, recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

"Maquetem Mataró" es un proyecto que lleva cuatro años realizándose en la ciudad de Mataró. En él, se desarrollan distintas competencias matemáticas de las que destacamos la resolución de problemas y el razonamiento en un contexto cercano y ligado emocionalmente con el alumnado, la comunicación y representación de conceptos y formas y sus relaciones espaciales, las conexiones con otras asignaturas, y el trabajo en equipo interno y con otros centros educativos. Permite trabajar conceptos de geometría como las proporciones, las escalas, las medidas y los errores, y características geométricas de distintos objetos, relaciones de paralelismo y perpendicularidad, etc. El valor del proyecto crece al establecer un trabajo en red entre distintos centros educativos que colaboran para construir el producto final: una maqueta 9 x 9 metros de la ciudad que les impresiona y enorgullece.

Palabras clave: conexiones, geometría, desarrollo profesional docente.

Contexto teórico

"*Maquetem*" es una propuesta de trabajo para el aula de matemáticas desarrollada desde hace 4 años, conducida y coordinada por Roser Garcia, miembro del Grup Vilatzara (ICE-Universitat Autònoma de Barcelona), experimentada y contrastada en la ciudad de Mataró.

Imagen 1. Maqueta de la segunda edición del proyecto "Maquetem Mataró"

Miguel de Guzmán (2001) afirmaba sobre la forma de entrar en el estudio de la Geometría: "es necesario que la inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge".

Arcavi (2003) y Battista (2007) sostienen que la educación visual es fundamental para una buena adaptación a esta nueva sociedad tecnológica y debe estar recogida desde propuestas curriculares.

Por ello, la línea de trabajo del Grupo Vilatzara en la que proponemos basar la secuencia de aprendizaje de la ESO cuenta con las siguientes fases (Vilella, Giménez, Rodriguez, 2019; Rodriguez, García, Mas, Goitia, 2022):

Imagen 2. Propuesta de aprendizaje de la geometría basada en procesos. Fuente: Grup Vilatzara

El resultado del proyecto “Maquetem Mataró” es un artefacto real, que se puede ver y tocar, que permite un análisis crítico (se pueden detectar posibles errores, de encaje, por ejemplo). Durante su ejecución, son manipulados muchos materiales diversos. Pero esta manipulación es activa: el alumnado se va fijando en el trabajo de los demás, para detectar los problemas de encaje que pueden aparecer, dado que tiene en su cabeza un modelo de lo que tiene que ser la maqueta.

Esta propuesta da sentido al uso de números y operaciones, de la proporcionalidad y la escala, de la utilización de distintos métodos de medida y sus unidades. Muestra al alumnado que las Matemáticas son una herramienta muy poderosa para resolver problemas prácticos, para encontrar soluciones que afronten retos nada habituales en las clases de Matemáticas. La proporcionalidad, las escalas, los cálculos de medidas inaccesibles, la precisión en la medida, el error y el redondeo son algunos de los conceptos con los que se va a encontrar el alumnado durante los distintos

procesos: por ejemplo, si en cada centro, al realizar los cálculos, se redondea a un número distinto de decimales, pueden darse cuenta de que las calles representadas en las placas “frontera” entre las zonas asignadas a cada centro, no van a coincidir perfectamente.

A su vez, resulta del todo evidente que las Matemáticas son absolutamente necesarias para conseguir la creación de una maqueta de la ciudad, y ofrecen un contexto para que se establezcan conexiones con otras áreas de conocimiento, y coordinen su acción educativa, convirtiéndose así en un verdadero centro de interés para Ciencias Sociales, Tecnología, Visual y Plástica, Lengua… Mención especial merece el hecho de que “Maquetem” induce a estudiar el desarrollo urbanístico de la ciudad, su crecimiento, la ubicación de los servicios (de salud, educativos, sociales, etc.). De nuevo, en un campo más propio de las Ciencias Sociales, las matemáticas pueden -y deben- tener un papel importante en el análisis del crecimiento urbanístico y de la localización de los servicios de todo tipo.

Situación actual del proyecto “Maquetem Mataró”

Describimos el proyecto “Maquetem Mataró” como un proyecto a dos niveles:

- un nivel interno de centro en el que colaboran distintas asignaturas trabajando sobre el mismo contexto identitario de la propia ciudad
- un nivel externo en el que distintos centros educativos de la ciudad cooperamos durante la construcción de la maqueta de la ciudad, compartiendo actividades y analizando los problemas que nos encontramos durante el proceso para contribuir a la mejora del proyecto que este curso ha llegado a su cuarta edición.

Siendo pues un proyecto en fase de consolidación en nuestros centros educativos, hemos establecido una secuencia de las actividades que llevamos al aula con nuestro alumnado, que mejora cada curso, como por ejemplo la necesidad de realizar unas actividades previas para que se enriquezca la comprensión de los conceptos y relaciones que trabajamos en el proyecto. En este proceso de mejora, recogemos también las aportaciones de la expansión a otras ciudades o barrios del proyecto “Maquetem”.

Creemos que plantear un nuevo proyecto en un centro educativo de estas características, es un reto en el que es necesario tener claros los pasos a seguir y los objetivos académicos a los que se quiere llegar. Iniciar un “Maquetem” en nuestra ciudad, pueblo o barrio, requiere confiar en que el alumnado aprende de una forma duradera y muy activa los conceptos y procesos matemáticos gracias al proyecto. Es por eso que proponemos un taller para trabajar en las actividades de la secuencia, para que el profesorado pueda vivenciar lo que se va consiguiendo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS		
ACTIVIDAD	**DESCRIPCIÓN**	**DURACIÓN**
A M 1	MEDIDA - Magnitud Actividad de semejanza de figuras y cálculo de escalas en distintos sentidos para trabajar la comprensión de ambos conceptos y su aplicación en diferentes contextos. Acabamos la sesión explicando que vamos a crear una maqueta de la ciudad junto con otros centros educativos de la ciudad.	1h
A M 2	NUMÉRICO - Razonamiento proporcional Empezamos la sesión explicando que ya nos han confirmado desde el Ayuntamiento el espacio en el que podremos hacer la exposición de la maqueta de la ciudad. Ésta, será una actividad individual con ordenadores en la que el alumnado deberá proponer una escala en la que trabajaremos la parte plana del proyecto. Usarán Google Maps para medir el ancho y largo de la ciudad para compararlo con el espacio que tenemos de 9 metros x 9 metros y así poder realizar los cálculos necesarios para proponer la escala.	1h

A M 3	MEDIDA - Medición En grupos de 2 o 3 alumnos se les pide que hagan un dibujo a escala del patio del instituto. Para realizarlo, se les guiará en el cálculo de la escala a utilizar y notarán que pueden tener en cuenta las simetrías para ahorrarse trabajo de cálculo. También verán que necesitan tener claros los puntos del borde del dibujo al que van a parar los diferentes arcos o líneas. Aplicarán las características de los elementos a dibujar para encontrar la forma idónea de dibujarlos.	1h
A M 4	MEDIDA - Estimación y relaciones En grupos de 2 o 3 alumnos se les asigna una placa en hoja DIN-A3 que representa una de las parcelas en las que hemos dividido la ciudad. El alumnado deberá encontrar la zona que representa su placa y colorear las zonas de ésta, siguiendo un código de colores establecido en el grupo de trabajo de los profesores de cada centro educativo, diferenciando las zonas residenciales, zonas verdes, zonas deportivas, zonas escolares, museos o zonas arqueológicas, etc. Posteriormente, deberán medir las diferentes partes del contorno de su placa, aplicar la escalera encontrada en la actividad anterior y escribir los tamaños en una hoja de cálculo compartida para que las placas colindantes encajen.	3h
A M 5	ESPACIAL - Formas geométricas de dos y tres dimensiones Con papel Kraft dibujarán sus placas y una vez cuadrados los dibujos con las placas colindantes se pasará a recortar y pegar en placas de cartón pluma las cartulinas de los colores correspondientes, aprovechando los trozos de papel Kraft como plantilla.	5h

A M 6	MEDIDA - Estimación y relaciones En grupos de 2 o 3 alumnos se les asigna un edificio a construir por lo que tendrán que realizar un informe que incluya las caras del mismo con las medidas correspondientes. Para el cálculo de la altura, será necesario realizar una pequeña investigación aplicando proporcionalidad a partir de una fotografía que permita comparar la altura de alguno de los alumnos con la pared del edificio (por ejemplo). Se pueden utilizar programas gráficos como Geogebra para investigar las medidas de ángulos que no sean rectas.	2h
A M 7	ESPACIAL - Formas geométricas de dos y tres dimensiones Con cartón dibujarán las caras de los edificios y los pegarán con pegamento. Forrarán con cartulinas de colores sus construcciones y dibujarán con punta fina los detalles de las fachadas que corresponda.	3h
A M 8	SOCIOEMOCIONAL - Trabajo en equipo y toma de decisión Redactarán un informe en grupo que incluya las diferentes actividades realizadas a lo largo del proyecto, concretando cálculos, gráficos y fotografías del proceso de elaboración.	1h

Taba 1. Decripción de las actividades de la secuencia de matemáticas del proyecto

Lo que se plantea a continuación es una sugerencia de saberes y competencias a los que consideramos que este proyecto da sentido:

COMPETENCIAS	
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS MATEMÁTICAS	**ACTIVIDADES**
C1. Interpretar, modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana, propias de las matemáticas y de otros ámbitos del conocimiento aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar procedimientos y obtener soluciones.	A M 3
C3. Formular conjeturas sencillas o problemas, utilizando el razonamiento y argumentación, creatividad y herramientas tecnológicas, para integrar y generar nuevo conocimiento matemático.	A M 2
C5. Conectar distintos elementos matemáticos relacionando conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	A M 4
C7. Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.	A M 1 - A M 8
C9. Desarrollar destrezas sociales, como la cooperación, participando activamente en equipos de trabajo inclusivos reconociendo la diversidad y el valor de las aportaciones de los demás, para compartir y construir conocimiento matemático de forma colectiva.	A M 5 - A M 7

COMPETENCIAS TRANSVERSALES		ACTIVIDADES
CIUDADANA	CC1. Analiza y comprende las ideas relativas a la dimensión social y ciudadana de su propia identidad, así como a los hechos sociales, históricos y normativos que la determinan, demostrando respeto por las normas, empatía, equidad y espíritu constructivo en la interacción	A M 4
	Con los demás en diferentes contextos socio-institucionales.	
PERSONAL, SOCIAL Y APRENDER A APRENDER	CPSAA3. Comprende proactivamente las perspectivas y experiencias de los demás y las incorpora a su aprendizaje, para participar en el trabajo en grupo, distribuyendo y aceptando tareas y responsabilidades de manera equitativa y empleando estrategias cooperativas.	A M 3 - A M 4 - A M 5 - A M 6 - A M 7
DIGITAL	CD2. Gestiona y utiliza su propio entorno personal digital de aprendizaje permanente para construir nuevo conocimiento y crear contenidos digitales, mediante estrategias de tratamiento de la información y el uso de diferentes herramientas digitales, seleccionando y configurando la más adecuada en función de la tarea y sus necesidades en cada ocasión. CD5. Desarrollar aplicaciones informáticas sencillas y soluciones tecnológicas creativas y sostenibles para resolver problemas concretos o responder a retos propuestos, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético.	A M 2 - A M 6

Tabla 2. Listado de competencias asociadas a la parte de matemáticas del proyecto

SABERES DE MATEMÁTICAS		
	SENTIDO	**SABER**
1	NUMÉRICO - Razonamiento proporcional	Desarrollo y análisis de métodos para resolver problemas en situaciones de proporcionalidad directa en distintos contextos (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, cambios de divisas, cálculos geométricos, escalas, etc.). (A M 2)
2	MEDIDA - Magnitud	Elección de las unidades y operaciones adecuadas en situaciones que impliquen medida. (A M 1, A M 2)
3	MEDIDA - Medición	Selección y uso de instrumentos (analógico o digital) y unidades adecuadas para medir de forma directa diferentes magnitudes del entorno. (A M 2, A M 3 y A M 5) Generación de representaciones planas, manual o digitalmente, de objetos geométricos planos o tridimensionales, con características dadas, como las longitudes de los lados, las medidas de los ángulos, las longitudes de las aristas. (A M 5)
4	MEDIDA - Estimación y relaciones	Toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida. (A M 4 y A M 6)
5	ESPACIAL - Formas geométricas de dos y tres dimensiones	Construcción de formas geométricas con distintas herramientas: materiales manipulables, instrumentos de dibujo, programas de geometría dinámica, realidad aumentada, etc. (A M 3, A M 5 y A M 7)
6	SOCIOEMOCIONAL - Trabajo en equipo y toma de decisión	Asunción de responsabilidades y participación activa para optimizar el trabajo en equipo. (A M 4, A M 5, A M 6, A M 7 y A M 8)

Tabla 3. Listado de saberes de matemáticas asociados al proyecto

La temporización del proyecto es una cuestión de suma importancia para evitar prisas de última hora. Hace falta una buena previsión y organización de centro. Según el centro educativo la organización de este proyecto es distinta: hay centros que tienen franja de proyectos y lo trabajan allí, hay centros que tienen una asignatura STEAM de dos horas a la semana en la que pueden hacer las tareas más de cálculo y además disponen de horas en las paradas trimestrales para proyectos que utilizan para el montaje. Otros centros lo trabajan desde cada asignatura porque siguen disponiendo de cuatro horas semanales de clase de Matemáticas y desde Plástica les ayudan con la parte del montaje. Así que hay distintas formas de llevarlo a cabo, es adaptable a cada situación.

La riqueza del trabajo en red

El proyecto “Maquetem Mataró” ha conseguido llamar la atención del Ayuntamiento, a raíz del éxito conseguido en el desarrollo competencial del alumnado, en la coordinación de centros educativos de la ciudad, y del resultado material final: una maqueta de la ciudad o barrio que sorprende por su tamaño, por ser fiel a la realidad, y por ofrecer una visión poco habitual de la ciudad maquetada.

Imagen 3. Montaje de la maqueta de la 3a edición del proyecto “Maquetem Mataró”. Mayo 2023.

Además, desde la tercera edición se trabaja en una extensión del proyecto a primaria, con la que pretendemos incluir a centros de esta etapa en el proyecto propio de secundaria. Actualmente ya se ofrece un dosier de actividades para el profesorado y para el alumnado en el que se les propone trabajar conceptos matemáticos a partir de la visita a la exposición y la observación de la maqueta: la localización por coordenadas, el cálculo de distancias, las características de las formas geométricas, o las altitudes (cotas) no visibles, por el momento en la maqueta, entre otros.

Imágenes 4 y 5. Alumnos de un colegio de Mataró con los dosieres de actividades propuestos

Imagen 6. Alumnos de un colegio de Mataró observando distintos elementos de la maqueta

VISITA AL MAQUETEM MATARÓ

1. Si la distància entre les plaques (E,1) i (M,1) és la mateixa que la distància entre les plaques (M,1) i (M,7), creieu que trigarem el mateix en recórrer-les caminant? Justifica la teva resposta.

2. Quin és el camí més curt per anar de la rotonda del tramvia a l'hospital? Pinta el camí i indica les coordenades de sortida i d'arribada.

3. Observa el plànol de Mataró i pinta els llocs on es troben les figures que heu de buscar per tot el recinte i que us indiquem en la graella següent:

1. Elipse	2. Circumferència
3. Triangles	4. Hexàgon
5. Rectangle	6. Quadrat
7. Trapezi	8. Semicircumferència

- Com ho pots argumentar?

- Ens pots dir les coordenades de les figures?
  Per exemple, el camp de futbol del Mataró és un rectangle ubicat en les coordenades (M,6).

4. Sabent que una placa fa 50 x 70 cm, quina distància hi ha del centre de natació (L,1) al port (F,0)? Traça la trajectòria.

- Sabent que la dimensió d'una placa en la realitat és de 20.000 x 28.000 cm, quina distància hi ha a la realitat.

5. Indica les coordenades de la placa (o les plaques) on s'ubica la teva escola.

6. Busca 3 carrers consecutius que siguin perpendiculars i 3 carrers paral·lels.

Tabla 4. Dosier de actividades para alumnos de primaria

Las visitas de las escuelas de primaria enriquecen el proyecto y al profesorado que participamos en él a través de los formularios de los alumnos y charlas con los maestros que los acompañan. Descubrimos las dificultades que se encuentran para comprender las preguntas planteadas, o para localizar puntos de referencia en la maqueta.

En los dos últimos años el proyecto “Maquetem”, ha empezado a extenderse a otras ciudades o barrios, como la ciudad de Vic o el barrio del Carmel, de Barcelona.

Imagen 7. Inauguración de la maqueta de Vic en su 1a edición. Marzo 2023. Fuente @sagratcorvic

Imagen 8. Maqueta del barrio del Carmel en Barcelona en su 1a edición. Febrero 2024. Fuente @willezumleben

En cada sitio se ha llevado a cabo con distintos niveles de la ESO y materiales (madera pintada, cartón pluma).

Hemos visto hasta ahora cooperación entre docentes. Veamos la cooperación entre el alumnado.

Como se ha estado explicando anteriormente, el trabajo cooperativo durante el proyecto es, evidentemente, necesario. Es trabajando en grupo cuando surgen en el alumnado las "buenas preguntas" como por ejemplo: "*Pero…si esto es simétrico aquí (señalando el mapa) ¿lo será también en la placa, no?"*

Al alumnado le explicamos que, durante todo el proceso de construcción, las reuniones de trabajo con el profesorado de los otros centros participantes tienen un tono *solemne* dada la importancia del trabajo coordinado, y que nuestra aportación debe de tener la máxima calidad: les decimos que tenemos que consensuar la escala que ellos han encontrado con la que ha encontrado el resto de institutos; que tienen que medir bien sus placas para que cuando hagamos nuestra reunión de grupo para cuadrar las placas colindantes con las de otros centros, no tengamos problemas. En definitiva, tienen muy claro que somos muchos trabajando en el proyecto. Hasta que llega el día en que nos piden hacer una actividad para encontrarse (de hecho, ya la hemos programado antes de que la pidan) y allí les planteamos la "Fiesta Maquetem".

La "Fiesta Maquetem" supone una mañana de diversión, en la que el alumnado participa en una gincana con algunas actividades de lógica y otras, en las que tendrán que aplicar procedimientos usados durante el proyecto, identificar propiedades, encontrar relaciones, etc. Los grupos los forman alumnos de distintos centros escolares y en una de las paradas de la gincana pasarán por el lugar donde se instalará la maqueta para ayudar a preparar la exposición.

Imágenes 9 y 10. Fotos enviadas por los alumnos durante la gincana para argumentar sus respuestas

Imágenes 11 y 12. Alumnado colaborando en el montaje de la exposición

Imágenes 13, 14 y 15. Acto final de la “Fiesta Maquetem”

Se convocan dos concursos entre el alumnado de los centros educativos participantes: uno de ellos, de carteles, para promocionar las visitas a la exposición, el otro, para diseñar el obsequio que se entrega a cada centro.

En esta última edición del “Maquetem Mataró”, hemos tenido la colaboración de algunas librerías de la ciudad que nos han proporcionado los regalos para los ganadores del concurso de carteles y la gincana.

Referencias

Arcavi, A. (2003): “The role of visual representations in the learning of mathematics”.

Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Battista, M. T. (2007). “The development of geometric and spatial thinking”. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Guzmán, M. (2001): “Tendencias actuales de la educación matemática”. Cátedra

Miguelde Guzmán. Universidad Complutensede Madrid. http://www.mat.ucm.es/~guzman/

Rodríguez, M.; García, R.; Mas, B.; Goitia, M. - Grup Vilatzara (2022): “Desarrollo del pensamiento geométrico a partir de la visualización del espacio y las formas que nos rodean“. Actas de las XX JAEM, València.

Vilella, X., Giménez, J.; Rodríguez, M. - Grup Vilatzara (2019): “Geometría para la ESO: experiencias para conocer el espacio y para el desarrollo del pensamiento geométrico“. Actas de las XIX JAEM, A Coruña.

Creación de un aula de pensamiento en matemáticas.

Álvaro Vielba Iglesias

alvaro.vieigl@educa.jcyl.es alvaro.vielba@uva.es

IES Jorge Manrique (Palencia) y Facultad de Educación de Palencia (Universidad de Valladolid)

María Astrid Cuida Gómez

mariaastrid.cuida.gomez@uva.es

Facultad de Educación de Palencia (Universidad de Valladolid)

María Paloma Vadillo Rebollo
mpaloma.vadreb@educa.jcyl.es
IES Jorge Manrique (Palencia)

Núcleo temático: Procesos y Formación de profesorado

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

El objetivo de este taller es dar forma a un “aula de pensamiento” en el sentido de Liljedahl (2020), autor del libro Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning, analizando las 14 prácticas de enseñanza que propone Liljedahl para conseguir que en un aula de matemáticas el mayor número posible de alumnos piense y lo haga durante el mayor tiempo posible. Estas prácticas, que se han llevado a cabo con los ajustes adecuados para su contexto con dos grupos de 1ESO del IES Jorge Manrique de Palencia, se implementarán con los asistentes al taller a través de la resolución de varios problemas para posteriormente reflexionar sobre ellas y, en general, sobre el marco metodológico que ofrecen las aulas de pensamiento en matemáticas.

Aulas de pensamiento en matemáticas; Resolución de problemas; Razonamiento matemático

1. Aulas de pensamiento (Thinking classrooms)

1.1 ¿Qué son?

En 2020 Peter Liljedahl, profesor e investigador en Educación Matemática de la Universidad Simon Fraser, en Vancouver (Canadá) publicaba el libro *Building Thinking Classrooms in Matematics,* un texto a modo de compendio-guía divulgativa para la comunidad de la Educación Matemática sobre los resultados de una investigación de 15 años de duración y que ha implicado a 40 aulas diferentes de 40 centros (públicos y privados) diferentes de todos los niveles desde Infantil (Kindergarden) hasta Bachillerato (Grade 12) y de distintos niveles socioeconómicos.

La meta de la que parte la investigación de Liljedahl y que define el concepto de aula de pensamiento es la de lograr promover habilidades de pensamiento de calidad en los estudiantes, puesto que "el pensamiento es un precursor necesario del aprendizaje, por lo tanto, si los estudiantes no están pensando, no están aprendiendo" (Liljedahl, 2020). No se trata de un requisito específico de la asignatura de matemáticas, otros autores, como Ruiz (2020), llegan a conclusiones similares cuando hacen alusión al aprendizaje de forma general: "Decimos que para aprender hay que hacer, pero no es verdad. Para aprender hay que pensar".

Es frecuente que esto no suceda en clase de matemáticas, a pesar de que pueda parecer que es así. El hecho de que el alumno esté ocupado, por ejemplo, realizando ejercicios o tomando notas, no significa que esté pensando. Muchas veces las propias normas institucionales o, lo que podríamos llamar, contrato didáctico en el sentido de Brusseau, dificultan que se produzca esta reflexión activa y necesaria para el aprendizaje. La ambiciosa investigación de Liljedahl consistía, en consecuencia, en buscar qué variables pedagógicas podrían tener impacto en el grado de pensamiento de los alumnos y cómo podrían modificarse para conseguir el objetivo motor de la investigación: que los estudiantes piensen en clase de matemáticas. Quizá, dicho así, podría considerarse un destino utópico, pero sí podríamos decir que el objetivo de la

investigación es que el mayor número de alumnos piensen y lo hagan durante el mayor tiempo posible.

De esta manera, podríamos definir “aula de pensamiento” como un entorno educativo en el que el principal objetivo es estimular y potenciar el razonamiento matemático de los estudiantes. Este tipo de aulas persiguen el desarrollo de habilidades de pensamiento de calidad y, para ello, utilizan métodos de aprendizaje que promueven la participación de los propios estudiantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

1.2 Las 14 prácticas. Los factores que influyen en el pensamiento de los alumnos.

La tarea de lograr un aula de pensamiento puede ser muy estimulante, pero no es sencilla. Es habitual que los docentes se esfuercen infructuosamente en plantear tareas ricas, que requieran del uso de razonamientos matemáticos, y que acaben frustrados ante la respuesta negativa del alumnado, llegando a la conclusión de que muchos estudiantes no pueden o no quieren pensar; replanificando las siguientes sesiones en consecuencia.

La investigación de Liljedahl detecta una serie variables pedagógicas que pueden influir en el grado en que un estudiante piensa, y, en el tiempo que él dedica a pensar, a hacer matemáticas. De forma divulgativa, Liljedahl las resume en catorce prácticas que se podrían llevar a cabo en el aula, de manera paulatina para mejorar la experiencia didáctica hacia el pensamiento. Se resumen las catorce a continuación, agrupando en el duodécimo punto las tres últimas: evaluación, evaluación formativa y calificación.

1.2.1. Tipo de tareas

Podríamos hablar de tres tipos de tareas según Liljedahl: tareas para pensar (no curriculares), tareas curriculares programadas y tareas curriculares.

Un aula de pensamiento debería incluir tareas del primer tipo para estimular el razonamiento matemático no sujeto a algún contenido concreto y enfatizar las segundas, que llevan implícito el uso de algún concepto o procedimiento curricular, pero que se plantean antes de mostrarlo, buscando que el alumno lo descubra.

Las terceras, que son las que predominan en la enseñanza tradicional de las matemáticas, son útiles para consolidar un contenido una vez se ha construido de manera orgánica por el alumno, pero no deberían ni mucho menos monopolizar la instrucción en el aula.

1.2.2. Agrupamientos

Las aulas de pensamiento se basan en la teoría del aprendizaje colaborativo, la cual sostiene que el aprendizaje es más efectivo cuando los estudiantes trabajan juntos y comparten sus conocimientos.

La forma práctica de llevar a cabo esta teoría es formar grupos aleatorios para cada sesión, compuestos por tres personas.

El objetivo es progresar como grupo, como individuo dentro del grupo e incluso como clase. Esto se consigue debatiendo las respuestas no solo entre los tres componentes del grupo sino con los demás grupos, y tomando ideas los unos de los otros.

1.2.3. Pizarras soporte

El uso de superficies verticales y que se puedan borrar ayuda a que los alumnos tarden menos tiempo en comenzar la tarea, dediquen mayor tiempo a la misma y puedan movilizar mejor el pensamiento.

Este es quizá el elemento más vistoso cuando uno observa por primera vez un aula de pensamiento: las pizarras. Es el soporte óptimo de acuerdo con las variables que se mencionan en el párrafo anterior.

1.2.4. Distribución de la clase

La habitual disposición de pupitres formando filas paralelas y en dirección a la pizarra reafirma la preconcepción que puede tener un alumno de una clase de matemáticas (y en general, de una clase) en la que un profesor va a exponer, oralmente o por escrito en la pizarra, unos conocimientos y en la que su rol consiste en asimilarlos y reproducirlos pasivamente.

Una disposición menos uniforme, juntando los pupitres en grupos de tres para la posterior consolidación del conocimiento que ha circulado durante la fase de trabajo en grupo sería mucho más conveniente para el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje, reflexionando a partir de las ideas que han surgido.

1.2.5. Cómo responder a las preguntas de los estudiantes

Es frecuente que los alumnos pregunten por el mero hecho de que el profesor está cerca y quieren reafirmar que están atentos a la tarea, en otras ocasiones lo hacen por miedo a estar siguiendo un camino erróneo.

Las únicas preguntas que debería responder el profesor son las que hace el alumno que verdaderamente está reflexionando sobre la tarea y que formula para clarificar algún punto o alguna estrategia que se está siguiendo.

1.2.6. Cuándo, dónde y cómo dar las tareas

En primer lugar, las aulas de pensamiento, al igual que, por ejemplo, la metodología Singapur, parten de la idea de construir a través de un problema o una tarea; y, por lo tanto, esta debería de plantearse al inicio.

Además, el hecho de que las instrucciones de la tarea se formulen de manera verbal y en distintos espacios del aula cada vez fomentan la atención del alumnado por captar los detalles y la información de la misma.

1.2.7. Los deberes. Tareas para ver si lo has entendido

Los deberes no deberían ser, al igual que sucede con algunas preguntas de los alumnos, un acto de validación del profesor al trabajo del alumno, sino que deberían de concebirse como una oportunidad para que este aprenda. Así, quizá sería positivo que se reformulasen como una actividad de pensamiento sin nota, trasladando la autonomía al alumno.

1.2.8. Cómo potenciar la autonomía

Existen dos tipos de movilizaciones que pueden ser efectivas para que el docente pase de ser fuente de toda información, a ser movilizador del conocimiento entre grupos. La primera de ellas es poner en contacto a dos grupos sin identificar quién tiene o no tiene las respuestas correctas a pesar de tener respuestas diferentes. La segunda, movilización, consiste en poner en contacto grupos con las mismas respuestas y pedir a cada uno que trate de deducir lo que el otro ha pensado y hecho.

1.2.9. Mantener el Flow

El balance entre las dimensiones de habilidad o potencial del estudiante y de reto que le supone la tarea ha de tenerse muy en cuenta para que esta no genere frustración, por estar muy por encima del potencial del estudiante, ni aburrimiento, por no generar la dosis de estímulo suficiente ante un desafío.

Imagen 1. Mantener *el flow*

El concepto de “tarea de suelo bajo y techo alto” está muy relacionado con este punto. Se trata de subdividir la tarea en subtareas con complejidad creciente que tengan una entrada accesible para todos y un rango suficientemente amplio como para atender las necesidades de reto que pueden demandar estudiantes con una capacidad de razonamiento avanzada.

1.2.10. Cómo consolidar los conocimientos adquiridos en una lección

Es importante que la consolidación utilice el trabajo desarrollado por los alumnos, sus huellas de pensamiento, incluso que los grupos expliquen su trabajo a otros grupos y así dar el paso de hablar a pensar.

1.2.11 El cuaderno. La toma de notas

Tradicionalmente la toma de notas en el cuaderno suele suponer una actividad pasiva, en la que el alumno transcribe las anotaciones que el profesor hace en la pizarra sin reflexionar sobre ellas. Copiar “notas muertas” no lleva al alumno a pensar.

Las notas, al igual que las tareas, deberían de ser para el alumno y no para el profesor. Para que sean significativas para el alumnado es conveniente que hayan sido útiles o se desprendan de la resolución de las tareas previas. Además, lo serán más todavía si un tiempo después una nueva tarea exige revisar anotaciones previas.

1.2.12 Evaluación y calificación. Evaluación basada en la evidencia

En las aulas de pensamiento de Liljedahl se propone una evaluación basada en la evidencia. Si los alumnos dedican gran parte del tiempo de las sesiones lectivas a la realización de tareas el docente tiene muchas oportunidades para registrar evidencias del aprendizaje de los alumnos. Mientras ellos trabajan puede escuchar sus diálogos, intervenir para dirigirlos y observar lo que registran en la pizarra. Puede incluso pedir alguna demostración de cómo han llegado a la solución o proponer una tarea específica a algún grupo o alumno.

De esta manera, el examen sería una oportunidad más para recoger evidencias. Una gran oportunidad, puesto que el docente tiene el registro escrito y puede revisar las resoluciones de los alumnos con detenimiento y de manera asíncrona, pero dejaría de ser ese evento único y estresante en el que el alumno tiene que demostrar todo lo que ha sido capaz de aprender en un espacio temporal de una hora.

La calificación es consecuente con el sistema de evidencias. Una posible propuesta es la creación de rúbricas para cada unidad de contenido en la que estos se estructuren en tres niveles de dificultad.

2. Los problemas. Hacer matemáticas

Aunque en muchas ocasiones a lo largo de este texto se ha hablado de tarea, con el fin de abarcar el abanico de posibilidades en su completitud, es evidente que el problema entendido como una tarea que nos plantea una situación cuya solución no es clara, en la que las estrategias a seguir tampoco son evidentes y que causa un primer momento de bloqueo, tiene un papel relevante en las aulas de pensamiento.

2.1. El papel de la resolución de problemas

Autores como Gaulin (2001) plantean la existencia de tres enfoques principales en la resolución de problemas: Enseñanza para la resolución de problemas; Enseñanza sobre la resolución de problemas y Enseñanza vía resolución de problemas *(teaching via problem solving)*.

En un aula de pensamiento se toma el tercero de los tres. Desde un enfoque constructivista se entiende el problema como un vehículo a través del cual llegar a sistematizar ideas y contenidos matemáticos que forman parte del currículo. No se trata de una oportunidad para poner en práctica los contenidos previamente introducidos (primer enfoque), sino al contrario.

De esta manera, y de acuerdo con las pautas que se dan en NCTM (2000) sobre lo que debe incluir un programa educativo de calidad, la resolución de problemas constituye el corazón del quehacer matemático. Los problemas y tareas que se plantean movilizan el pensamiento de los estudiantes para luego estructurarlo y dar forma a los contenidos curriculares.

Si hiciésemos una lectura de los cuatro tipos de tareas matemáticas que se plantean en Smith y Stein (1998) veríamos que hay muchas similitudes entre estas y los tipos de tarea que propone Liljedahl. Las tareas de hacer matemáticas se pueden comparar con las tareas para pensar de las aulas de pensamiento y las tareas de

procedimientos con conexiones, con las tareas curriculares programadas, pues en ambas, se trata de descubrir un procedimiento implícito sin una instrucción previa.

Así, el foco en las aulas de pensamiento está en los problemas en el sentido estricto que aporta el enfoque vía la resolución de problemas, o más ampliamente, en las tareas para pensar y las tareas curriculares programadas.

Este tipo de tareas con las que se va a trabajar en este taller, o, mejor dicho, con el que van a trabajar los asistentes del taller. Para la resolución de estas se van a implementar en la medida de lo posible (algunas prácticas solo se pueden considerar a largo plazo) las catorce prácticas que ayudan a que los alumnos piensen.

2.2. Las tareas a realizar en el taller

Se plantean las siguientes tareas para realizar durante el taller. Aunque son cinco es previsible que dada la duración del taller se realicen y se discutan dos o, como mucho tres, de las tareas:

2.2.1. La división de fracciones

Un alumno de 1ºESO tiene interés por entender por qué las fracciones se dividen como le han enseñado en clase (multiplicando “en cruz”). Le has explicado que dividir una fracción entre otra equivale a multiplicarla por la inversa de esta segunda, pero parece que no le convence mucho. Trata de explicarle cómo dividir dos fracciones otorgando a la división un significado cuotativo (*¿cuántas veces cabe el divisor en el dividendo?)*, para ello utiliza representaciones gráficas de las fracciones. Te dejo como sugerencia estas divisiones para que realices tu explicación, aunque también puedes servirte de tus propios ejemplos.

A) $3 : \frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$

D) $\frac{3}{4} : \frac{1}{3}$

2.2.2. 1001 peniques. Adaptación de Liljedahl (2020).

Imagen 2. Monedas de los Estados Unidos

Tengo 31 *pennies* (1/100 $) dispuestos en una fila. Hago lo siguiente: cada dos monedas cambio la que corresponda por un *nickel (*5/100 $), es decir, cambio la segunda moneda, la cuarta, etc por *nickels*. Hecho esto, y con mi nueva fila de monedas, voy cambiando cada tres monedas la que corresponda por un *dime* (10/100 $).

¿Cuánto dinero tengo al final?

(a) Si hago un último cambio que consiste en cambiar cada cuatro monedas por un *quarter* (25/100$) ¿cuánto dinero tengo ahora?

(b) ¿Y si hago exactamente lo mismo, pero con 1001 *pennies*?

2.2.3. El cubo pintado. Adaptación de Liljedahl (2020).

Tengo un cubo 4x4x4 compuesto por cubitos de lado unidad que se puede desmontar. Lo sumerjo en un cubo de pintura roja, lo saco y lo dejo secar. Tras hacer esto me pregunto…

¿Cuántos cubitos quedan pintados por tres de sus caras?

¿Cuántos cubitos quedan pintados por dos de sus caras?

¿Cuántos cubitos quedan pintados por una de sus caras?

¿Cuántos cubitos no tienen ninguna cara pintada?

(a) Para el cubo 4x4x4.

(b) Mismas preguntas para el cubo 5x5x5.

(c) Mismas preguntas para el cubo *n*x*n*x*n.*

2.2.4. Visualizando ángulos

Los dos triángulos isósceles dados tienen la misma área. ¿Cuál es el valor del ángulo α?

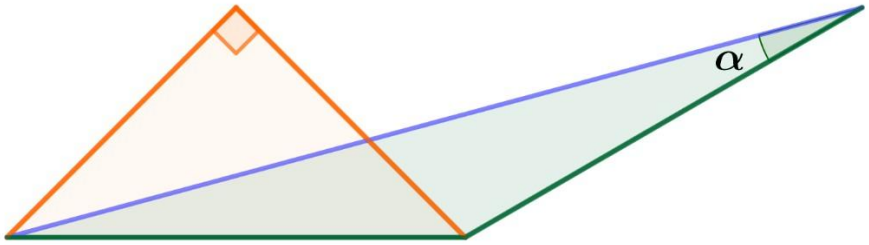


Imagen 3. Triángulos isósceles del problema 4

2.2.5. Probabilidad

Tengo tres fichas metidas en una bolsa. La primera tiene las dos caras de color verde, la segunda tiene las dos caras de color amarillo, y la tercera tiene una cara de cada color. Extraigo una ficha al azar mostrándote una de las caras (también al azar) ¿Cuál es el color de la otra cara?

En tu grupo de 3 una persona realizará las extracciones, las otras dos anotarán los resultados de 10 extracciones en la tabla. Antes de cada extracción tratarán de adivinar el color de la cara oculta.

Cara mostrada											
Cara elegida											
Cara oculta											
✅❌											

(a) ¿Has seguido alguna estrategia para elegir la cara oculta? Elige una estrategia y repite la experiencia con esa estrategia.

Cara mostrada											
Cara elegida											
Cara oculta											
✅❌											

(b) ¿Cuál es la estrategia ganadora para este juego? Juega 20 veces utilizando la estrategia ganadora y anota los resultados.

Cara mostrada											
Cara elegida											
Cara oculta											
✅❌											

(c) Poniendo los resultados de la clase en común ¿cuál dirías que es probabilidad de ganar con esa estrategia?

(d) Hemos obtenido la probabilidad de una forma frecuentista en el apartado anterior. Trata de obtener la misma probabilidad de forma teórica. Puedes utilizar alguna representación gráfica como el diagrama de árbol.

3. Experiencias en contextos educativos

3.1. Aulas de pensamiento en grupos de 1ESO del IES Jorge Manrique

En dos grupos de alumnos de 1ESO del IES Jorge Manrique de Palencia se está trabajado a lo largo del curso 23-24 en el entorno de un aula de pensamiento, implementando las catorce prácticas o gran parte de ellas.

Cada grupo está formado por 22 alumnos. Se trata de grupos heterogéneos en cuanto a su capacidad de razonamiento y nivel académico en matemáticas y en un entorno socio económico de nivel medio. La recepción de los alumnos ante este cambio metodológico ha sido, en general, positiva.

En 1ESOB se han recogido las opiniones de los estudiantes a través de un cuestionario al final del primer trimestre. Los estudiantes manifiestan aprender y divertirse más que en pasados cursos con una enseñanza que podríamos definir como tradicional. Sus comentarios suelen ir dirigidos hacia los agrupamientos aleatorios. No los rechazan, pero manifiestan en algunos casos no querer agruparse con alguno de sus compañeros.

Desde el punto de vista de los docentes, el objetivo primordial de Liljedahl de conseguir que los alumnos piensen más y mejor, se ha logrado al menos en cierta medida. Los alumnos no tardan en acceder a la tarea y dedican gran parte del tiempo lectivo a realizar de modo reflexivo las tareas planteadas.

Quizá aparecen más dudas a la hora de consolidar los conocimientos. Hay dos inconvenientes principales que dificultan este aspecto. El primero es que las aulas del instituto son aulas-grupo, que comparten todos los docentes que dan clase al mismo. Esto ha impedido disponer las mesas de la manera que se hubiese considerado idónea, en grupos de tres, para que las transiciones del trabajo en grupo a la toma de notas y el movimiento de alumnos y profesor por el aula fuese lo más eficiente posible. Una organización del centro en aulas-profesor o aulas-materia sería más conveniente para la práctica del aula de pensamiento. El segundo es que el tiempo de una sesión lectiva es de 50 minutos. Este tiempo es algo escaso para llevar a cabo la toma de

notas en cada sesión y para asegurarse en todas ellas de un tiempo de consolidación suficiente. La temporalización de la sesión planteada en la investigación de Liljedahl está planteada para tiempos lectivos de 70 minutos.

En cualquier caso, la valoración de la experiencia de las aulas de pensamiento ha sido positiva en los dos grupos. Se pretende seguir implementando las prácticas de las aulas de pensamiento con la idea de mejorar algunos aspectos y quizá llevarla a cabo grupos de 2ESO el próximo curso.

Imagen 4. Alumnos de 1ESO del IES Jorge Manrique

3.2. Aulas de pensamiento en el Máster de profesorado de la Universidad de Valladolid

Algunos de los problemas seleccionados para los asistentes al taller se han puesto en práctica bajo el marco metodológico de las aulas de pensamiento con los alumnos de la especialidad de Matemáticas del Máster en profesor de Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en concreto, en la asignatura de Innovación Docente en Matemáticas; con el mismo objeto de presentar esta metodología de una manera activa, desde el rol de alumno, para reflexionar sobre algunos de sus aspectos.

Los estudiantes de Máster han mostrado su entusiasmo ante una nueva forma de concebir una clase de matemáticas que no habían visto antes y han adquirido ideas de algunas de las prácticas, como así lo han reflejado en el trabajo final de máster (TFM) de la asignatura.

Referencias

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. Sigma, 19, 51-63.

Liljedahl, P. (2020). Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning. Corwin Mathematics Series.

NCTM (2000). Principles and standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Ruiz, H. (2020). ¿Cómo aprendemos? Una aproximación científica al aprendizaje y la enseñanza. Editorial Graó.

Smith, M. S. y Stein, M.K (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 344–350.

Conversaciones… irracionales

Enric Castellà Carlos(1)
ecaste56@xtec.cat(1)
CREAMAT, Departament d'Educació Generalitat de Catalunya(1)

Sílvia Margelí Voelp(2)
smargeli@xtec.cat(2)
CREAMAT, Departament d'Educació Generalitat de Catalunya (2)

Núcleo temático: Procesos. Recursos para el aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

En el taller se presentan los GeoPalos, que en esta actividad nos permitiran descubrir aspectos relacionados con los números irracionales. Seguiremos el ciclo que nos propone Anton Aubanell: "Experimentar, Descubrir, Conceptualizar y Formalizar, *si es necesario*". A través del material pondremos en valor la conversación: (1) La conversación de cada uno con el material. (2) La conversación entre iguales para descubrir propiedades. (3) La conversación del docente con los alumnos para acompañarlos poniendo palabras a sus ideas y razonamientos. Y, finalmente, (4) la de conducir la conversación con el alumnado planteando nuevos retos y haciendo buenas preguntas para animarlo a seguir descubriendo.

En el taller también utilizaremos GeoGebra y descubriremos curiosidades como determinadas aproximaciones racionales, la relación del material con el formato DIN, con el teorema de Pitágoras y con los productos notables.

Palabras clave: Números irracionales, materiales manipulativos, conversación matemática.

Introducción

El taller pretende ser una reproducción de cómo plantearíamos la actividad en clase, pero en un tiempo comprimido.

Presentamos el material y pedimos que las personas participantes que se organicen en grupos de 4. Repartimos roles para cada persona del grupo:

- **Portavoz**: Explicará a los demás lo que se ha debatido en el grupo
- **Apuntadora**: Resumirá les ideas que hayan surgido
- **Moderadora**: Procurará que todas las personas del grupo se expresen, y que cada una tenga tiempo para hacer descubrimientos por ella misma
- **Cuestionadora**: Procurará generar preguntas (para aclarar ideas o para ir más allá) respecto lo que se vaya haciendo en el grupo.

El material

Repartimos un paquete de Geopalos a cada grupo y pedimos que busquen algún tipo de relación entre los GeoPalos. De entrada nadie sabe nada acerca de las medidas, pero tienen unos puntos de conexión que permite enlazar diferentes GeoPalos.

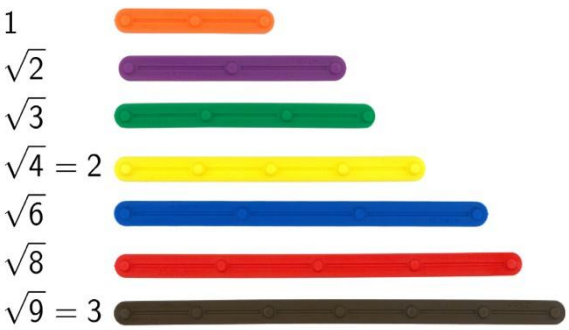


Figura 1. GeoPalos

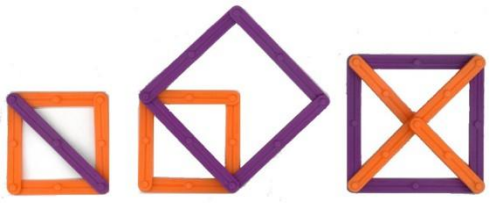
Pedimos a los participantes que escriban algunas preguntas que les sugiere el material, primero de forma individual (1min) para después compartirlo en el grupo (3min). Una vez han consensuado las preguntas a plantear, las compartimos con el gran grupo.

Aquí aparecen diferentes opciones en las qué poder trabajar y seguir investigando. Pero nosotros nos centraremos, de momento, en las medidas.

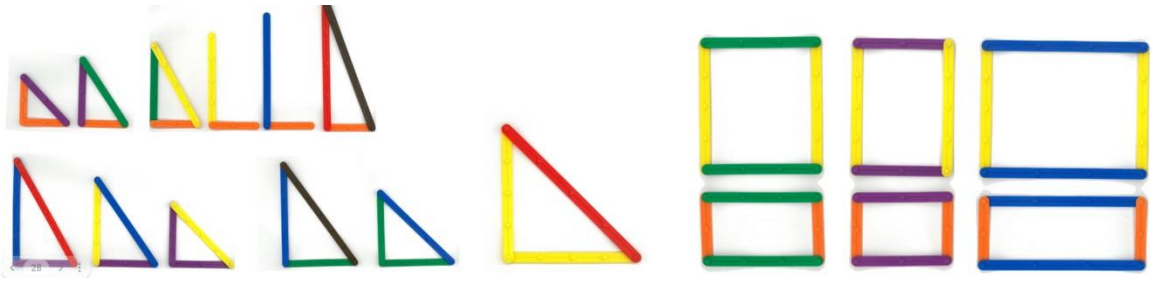
2.1 Las medidas.

Nos preguntamos que podemos saber sobre las medidas y por eso pedimos que investiguen y comparen el material para descubrir que medidas y relaciones encuentran. A simple vista se ve que entre algunos que son el doble o el triple de otros.

Después les pedimos que concretamente busquen la relación entre el geopalo naranja y el lila.



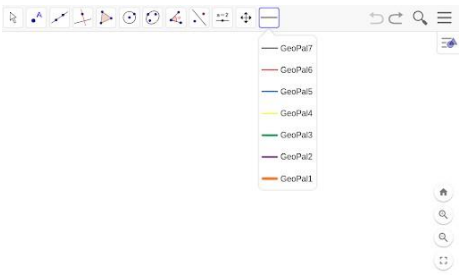
Y vemos que justamente uno es la diagonal del cuadrado que podemos formar usando como lado el otro. Por eso la relación entre el lila y el naranja es de raíz cuadrada de 2. Les proponemos buscar ahora qué otros casos hay en que un GeoPalo sera la diagonal de un rectángulo construido con otros GeoPalos

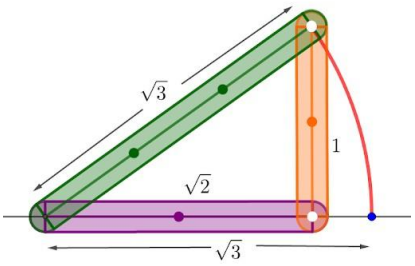


Buscamos entre todos una estrategia para comprobar que realmente sea un angulo recto, y experimentamos para buscar todas las posibilidades.

Applet de GeoGebra

Mostramos un applet de GeoGebra creado para presentar y usar los GeoPalos, para de esta forma poder trabajar con la pizarra digital, desde casa o si por no tenemos suficiente material para todos.





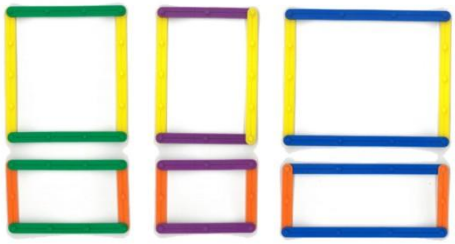
https://www.geogebra.org/classic/fxkks8km

GeoGebra nos permite crear las figuras que necesitamos con GeoPalos, y además podemos incluir álgebra. Por ejemplo podemos dibujar la función y=5 sqrt(x) y ver que los extremos de los GeoPalos pasan por puntos de esta función.

Doble área

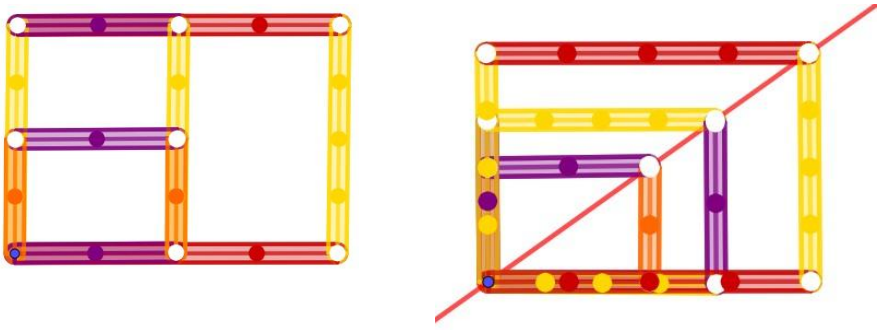
Nos planteamos una nueva cuestión: nos preguntamos si podemos construir parejas de rectángulos de manera que uno tenga el doble de superficie que el otro.

Dejaremos un tiempo para que hagan una búsqueda y comenten sus propuestas.



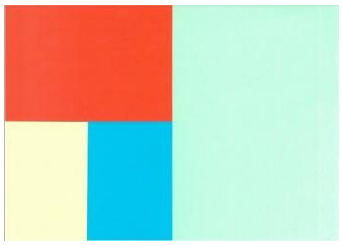
Aparecen diferentes opciones como dejar dos lados iguales y usar el doble de los otros. Para esto será necesaria una búsqueda exhaustiva de forma ordenada, utilizando algún patrón para no dejarnos ninguna solución por el camino.

Observamos que hay algún tipo de rectángulos que son semejantes, y proponemos el reto de buscar rectángulos semejantes en los que además uno doble el área del otro. Además, necesitamos saber cómo demostramos que realmente sean semejantes, y después de debatir proponemos las siguientes imágenes:



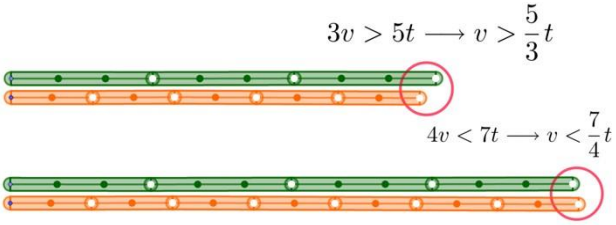
Ahora conectamos lo que acabamos de descubrir con los DINA-4, que justamente cumplen esta relación. Los lados crecen en razón $\sqrt{2}$ y el área lo hace en razón $(\sqrt{2})^2=2$

Para comprobarlo vamos doblando y cortando DINA-4 a mitades y da la casualidad que casi coincide con la medida de los GeoPalos.



Aproximación de irracionales

En este apartado lo que proponemos es buscar la proporción de unos GeoPalos respecto a otros, para de esta forma buscar una aproximación con números racionales de números irracionales de forma manipulativa. Por ejemplo si buscamos la relación entre el GeoPalo naranja y el verde, y siempre después de dejar unos minutos para los participantes en el taller experimenten, encontramos esta relación:



$$\frac{5}{3}t < v < \frac{7}{4}t$$

$$\frac{5}{3} < \textbf{GeoPal Verd} < \frac{7}{4}$$

$$1,\widehat{6} < \textbf{GeoPal Verd} < 1.75$$

$$\textbf{GeoPal Verd} = \sqrt{3} = 1.73205...$$

De esta forma podemos aproximar diferentes números irracionales por exceso y por defecto.

Otras investigaciones

Como ya se puede intuir, el material da para mucho. Nos permite plantear otras muchas investigaciones. A modo de ejemplo, en el taller comentaremos el Teorema de Pitágoras, la Cuadratura del rectángulo, Productos notables como $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ y el Tangram.

Referencias

CREAMAT (2022) Campanya Laboratori de Matemàtiques del CREAMAT,

Departament Educació de la Generalitat de Catalunya http://ja.cat/LabMat

Aubanell, A (2015) Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria a l'Educació Secundària Obligatòria, Quaderns d'avaluació nº 31, Dept. Educació. *Enlace*

Calvo, C. Deulofeu, J., Jareño, J., Morera, L. (2016) Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria. Editorial Síntesis

De garbanzos a tanques. Preguntas sobre la estimación del tamaño de poblaciones

Laura Morera Úbeda
lmorerau@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya, eXplorium

Marc Caelles Vidal
mcaelle1@xtec.cat
Escola Galí Bellesguard

Marcel Algueró Casas
malguero@ifae.es
Institut de Física d'Altes Energies

Cristina Vila Triadó
crvilatr7@alumnes.ub.edu
Universitat de Barcelona

Núcleo temático: Procesos, Conexiones

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

¿Qué elementos hacen que una actividad de matemáticas pueda considerarse rica? En este taller exploramos, a través de dos ejemplos prácticos de secundaria de inferencia estadística, la importancia de elegir bien la tarea y de saber gestionarla. Gracias a los ejemplos, desarrollaremos las claves del marco teórico sobre riqueza matemática: que la tarea ofrezca oportunidades de aprendizaje competencial y un contenido adecuado; y que la gestión fomente un ambiente de discusión. Primero afrontaremos las actividades como alumnos para, posteriormente, analizar su riqueza como profesores y generar aprendizajes didácticos que puedan servir en el aula.

Palabras clave: actividades ricas, procesos, estadística inferencial.

Marco teórico de referencia

Los procesos de la competencia matemática

Cada vez somos más los maestros y profesores que compartimos el valor de desarrollar la competencia matemática de nuestro alumnado. Hemos comprendido, gracias a la investigación, la reflexión y la experiencia, que los contenidos curriculares no bastan: es necesario transmitir también una manera de hacer, unos procesos que estructuren el pensamiento y la actividad matemática y que, en definitiva, den sentido a los contenidos.

Esta tendencia no es nueva ni experimental. Ya en los años cuarenta del siglo pasado, en su magnífico *How to solve it*, George Pólya (1945) advierte que sumergir a nuestro alumnado en operaciones y procedimientos rutinarios mata el interés y obstaculiza el desarrollo intelectual. Es por ello que invita a los maestros a fomentar la curiosidad, planteando problemas adecuados a los conocimientos del alumnado y ayudándoles a resolverlos mediante preguntas que estimulen el pensamiento independiente. Si bien Polya se centró en la resolución de problemas, en los años setenta ya encontramos ejemplos de autores que profundizan en esta concepción de las matemáticas como una actividad. Freudenthal (1973), por ejemplo, es considerado por muchos el pionero a la hora de concebir las matemáticas como una actividad con procesos que se pueden enseñar y aprender, más allá de ser una lista de contenidos. Actualmente, los currículos oficiales de muchos países y territorios emergen de esta concepción competencial. El *Common Core* de EE. UU., los currículos del Reino Unido, Dinamarca, Canadá o, sin ir más lejos, el anexo sobre matemáticas de la nueva LOMLOE (2020), son solo algunos ejemplos de ello. En el *Marco de evaluación y de análisis de PISA para el desarrollo: lectura, matemáticas y ciencias* de la OCDE (2017), también se justifica una concepción competencial del aprendizaje de las matemáticas:

> “Dominar las habilidades técnicas más básicas no es suficiente. Aunque es importante ser capaz de resolver operaciones aritméticas, esas matemáticas no son suficientes para salir adelante en la vida. Para poder aplicar esos conocimientos, es imprescindible tener unas capacidades básicas para elegir

> el modelo adecuado y seleccionar una estrategia o una explicación. Estas habilidades constituyen la esencia de lo que PISA entiende por competencia matemática.” (p. 62)
>
> “La definición de competencia matemática se refiere a la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas. Estas tres palabras, "formular", "emplear" e "interpretar", proporcionan una estructura útil y significativa para la organización de los procesos matemáticos que describen lo que los individuos hacen para conectar el contexto de un problema con las matemáticas y así resolver el problema.” (p. 66)

Niss y Højgaard (2019), los ideólogos del currículum de Dinamarca y de la vertiente matemática de PISA, describen la competencia matemática como “la disposición consciente de alguien para actuar adecuadamente en respuesta a un tipo específico de desafío matemático en situaciones determinadas” (p. 6, en inglés en el original). Más adelante, desarrollan esta idea y desgranan la competencia matemática global en ocho procesos o competencias específicas, divididas en dos grupos:

> Competencias relacionadas con plantear y responder preguntas sobre y mediante las matemáticas:
>
> - Pensamiento matemático: involucrarse en investigaciones matemáticas
> - Gestión de problemas matemáticos: plantear y resolver problemas matemáticos
> - Modelización matemática: analizar y construir modelos de contextos y situaciones *extramatemáticas*
> - Razonamiento matemático: evaluar y producir justificaciones de afirmaciones matemáticas
>
> Competencias relacionadas con manejar el lenguaje, los constructos y las herramientas matemáticas:
>
> - Representación matemática: manejo de diferentes representaciones de entidades matemáticas
> - Simbolismo y formalización matemática: manejo de símbolos y formalismos matemáticos

- Comunicación matemática: comunicar dentro de, con y sobre las matemáticas
- Ayudas e instrumentos matemáticos: manejo de ayudas e instrumentos materiales para la actividad matemática

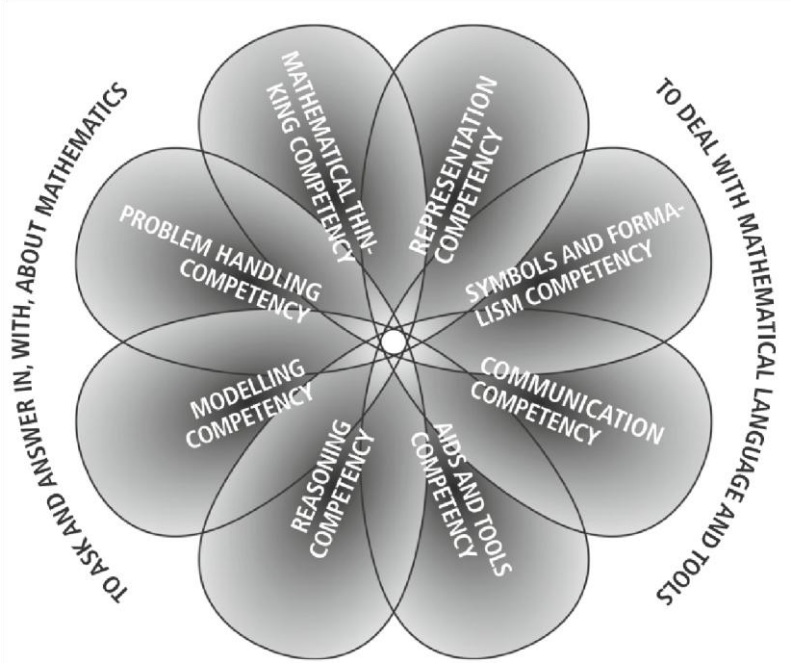


Imagen 1. Representación visual de las ocho competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2019).

Estas competencias pueden fragmentarse en *sub-competencias* que permitan una mayor concreción y profundidad, pero ello también implica un aumento de la complejidad en su análisis y traducción a lo que ocurre en el aula. Por contra, en una aproximación más práctica que teórica a todas estas ideas, proponemos agrupar las competencias en cuatro procesos que permitan desarrollar esta manera de hacer en el aula, sin que ello suponga un esfuerzo inasumible por parte de los docentes: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, y comunicación y representación.

Sin embargo, establecer los procesos que queremos trabajar no es suficiente para que se produzcan oportunidades de aprendizaje significativas en el aula. Debemos conocer y disponer de actividades ricas que nos permitan fomentar un ambiente verdaderamente competencial. En el siguiente apartado definimos lo que entendemos por “actividad rica de matemáticas” así como los cuatro procesos que proponemos. Más adelante exponemos los ejemplos concretos que vehiculan el taller que nos ocupa.

Actividades ricas de matemáticas

Son muchos los autores que han definido su concepción sobre lo que significa enriquecer la actividad matemática en el aula.

Piggott (2011), en el marco de la iniciativa NRICH de la Universidad de Cambridge, propone un marco que comprende dos factores: el contenido y la enseñanza. Según Piggott, las actividades ricas requieren, por un lado, un contenido basado en problemas atractivos que propicien el desarrollo y uso de estrategias y el pensamiento matemático; y, por otro lado, un enfoque de la enseñanza (esto es, una gestión de aula) que fomente un entorno abierto y flexible en el que se promueva el trabajo cooperativo, la exploración y la comunicación, y donde se aproveche la diferencia como herramienta de aprendizaje.

Los dos factores que describe Piggott guardan una clara relación con los elementos de una actividad matemática rica como la descrita en el pasado 14º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME14), en un taller sobre actividades ricas para el aula de primaria a cargo de Vilalta y otros (2021). En dicho taller, partiendo de las ideas de Deulofeu y Vila (2021), se concreta un esquema como el siguiente:

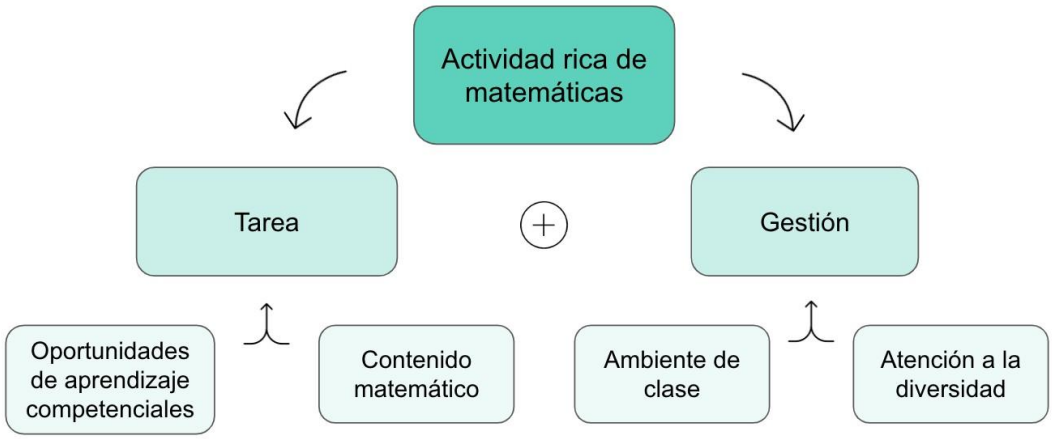


Imagen 2. Elementos de una actividad de matemáticas rica (Vilalta y otros, 2021)

Partiendo de esa premisa, parece claro que la riqueza de una actividad depende tanto de la tarea como de la gestión. Pero entonces, ¿cómo debe ser la tarea? Y ¿qué debemos tener en cuenta durante su gestión en el aula?

Como se desarrolla en el marco teórico descrito en Vilalta y otros (2021), en primer lugar, la tarea debe proporcionar oportunidades de aprendizaje dentro de uno o de varios de los **procesos** matemáticos:

- **Resolución de problemas**: Un problema es aquello que requiere una estrategia de resolución. Este proceso incluye las fases que debemos seguir para resolver problemas. También es el proceso más troncal y, como ya apuntó Pólya, el que nos proporciona un mejor ambiente en el que desarrollar la competencia matemática global. Veamos un ejemplo de las destrezas que intervienen en este proceso:

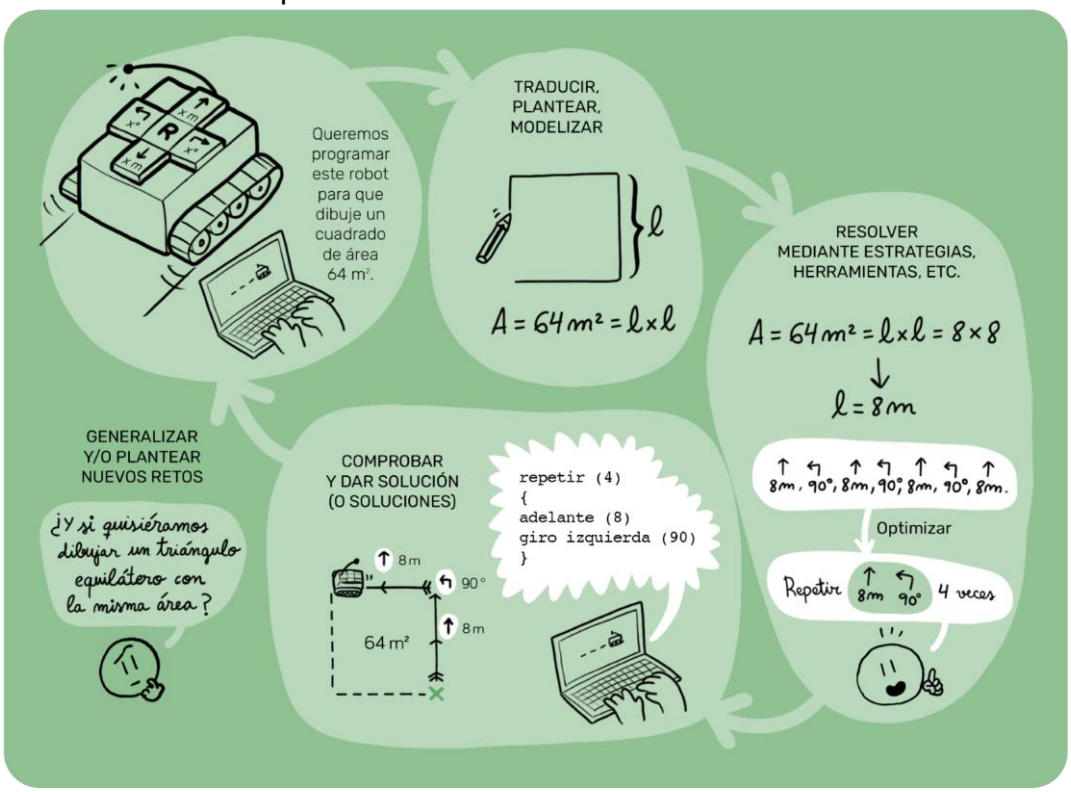


Imagen 3. Ejemplo de resolución de problemas. Elaboración propia.

- **Razonamiento y prueba:** Este proceso se centra en las destrezas que parten del análisis de la situación para formular y probar conjeturas, hacer deducciones razonadas y, sobre todo, argumentar cualquier afirmación que se hace en el aula de matemáticas. Veamos un ejemplo:

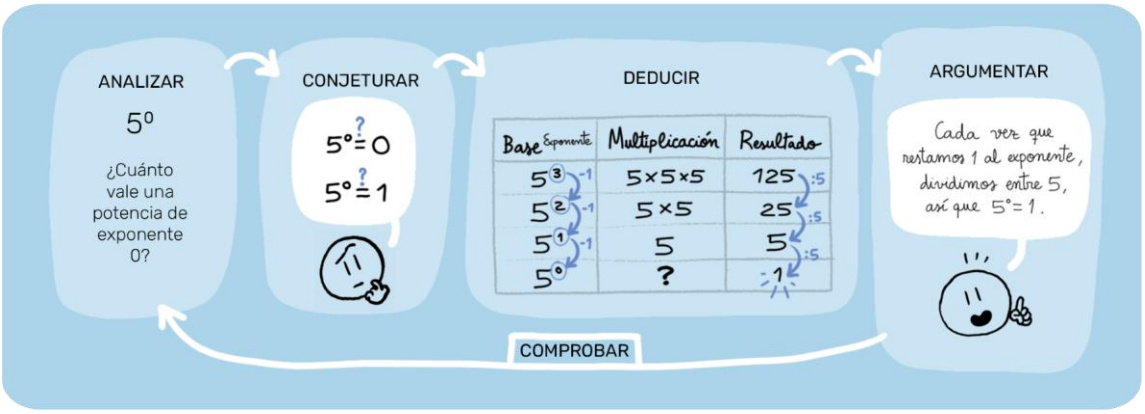


Imagen 4. Ejemplo de razonamiento y prueba. Elaboración propia.

- **Conexiones:** Este proceso incluye todas las relaciones que encontramos o establecemos entre ideas y conceptos. Distinguimos dos grandes tipos de conexiones: las que se producen dentro del ámbito de las matemáticas y las que se producen con la realidad cotidiana. Veámoslo mediante ejemplos:

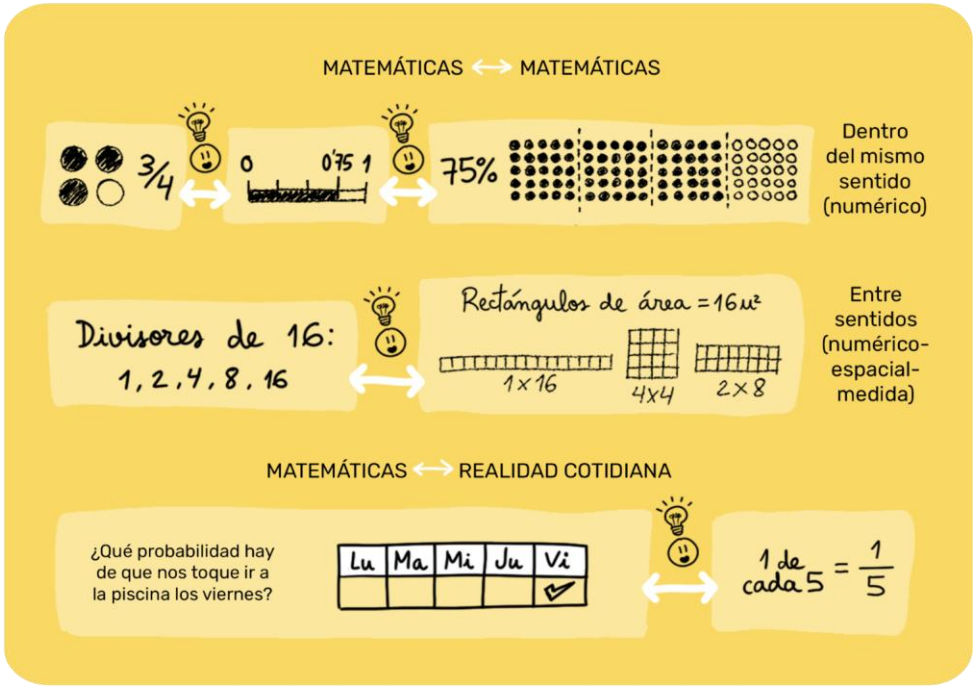


Imagen 5. Ejemplos de conexiones. Elaboración propia.

- **Comunicación y representación:** Este proceso nos habla de las destrezas relacionadas con la transmisión de información matemática y los cambios de representación, ya sea como emisores o como receptores, en solitario o colectivamente. Distinguimos hasta cinco formas de comunicar o representar un concepto, como se puede observar en la siguiente imagen:

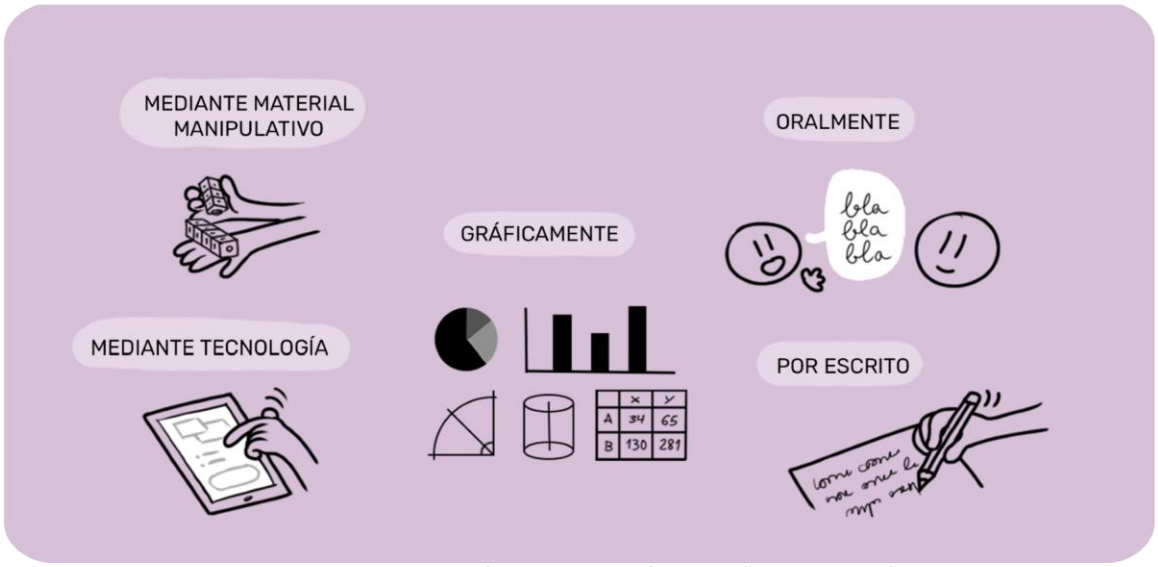


Imagen 6. Tipos de comunicación y representación matemática. Elaboración propia.

En segundo lugar, la tarea debe abordar un **contenido** matemático que sea:

- Contextualizado: significativo para el alumno
- Riguroso: con sentido matemático
- Extensible: conectado con los conocimientos previos y futuros

En cuanto a la gestión, debemos planificar y fomentar un **ambiente** de clase que promueva:

- Discusión productiva (basada en preguntas)
- Colaboración y conversación entre iguales
- Investigación

Por último, añadimos un aspecto que no todos los autores de referencia contemplan dentro de su definición de riqueza: la atención a la **diversidad** para conseguir equidad. Según Bartell y otros (2017), las prácticas de enseñanza sin atención explícita a la equidad inevitablemente están condenadas al fracaso. De hecho, entendemos que la gestión no es completamente rica si no tiene en cuenta las necesidades especiales del alumnado. Esto significa que, mediante nuestra gestión, debemos procurar que todos los alumnos participen de la misma actividad. Este cometido es posible, como se describe en NRICH (2013, 2017), si la actividad es de "suelo bajo" (permite la entrada a todos los alumnos) y de "techo alto" (permite hacer muchas conexiones y extender la actividad para ir más allá con nuevas preguntas).

Contenidos matemáticos del taller

Una vez definido el marco teórico del que emana nuestra concepción sobre actividades ricas en el aula de matemáticas, es importante establecer cómo trasladar la propuesta al contenido alrededor del cual vertebramos el presente taller: la estadística inferencial.

Más concretamente, nuestra propuesta tiene como objetivo realizar estimaciones del tamaño de poblaciones en dos situaciones distintas. Por un lado, planteamos un caso

en el que podemos identificar los elementos de la población, ya que están numerados (el problema de los tanques alemanes). Por otro lado, proponemos una situación en la que inicialmente no podemos distinguir los elementos de la población (captura y recaptura).

El taller propone como reto reflexionar sobre qué estrategias nos sirven para inferir el tamaño de las poblaciones en los dos casos, así como poner sobre la mesa algunas dudas que pueden surgir de forma natural al plantearnos cómo refinar dichas estrategias. De esa forma introducimos el concepto de variabilidad y analizamos qué tipo de información adicional nos ofrece y cómo podemos utilizarla para mejorar nuestra estimación.

En el apartado siguiente describimos detalladamente las dos actividades que proponemos, así como los aspectos concretos que nos permiten trabajar el contenido y los procesos mencionados.

Actividades propuestas para el taller

Las actividades elegidas pretenden ejemplificar las ideas desarrolladas en el marco teórico. Como se ha mencionado anteriormente, las actividades están enfocadas en la estimación del tamaño de poblaciones. El formato del taller es práctico, con una breve introducción al marco teórico y dos actividades ricas de la naturaleza ya descrita. Para cada actividad, se presenta la tarea y se propone a los participantes que la resuelvan como si fueran alumnos. Después, se analizan y se discuten conjuntamente sus elementos de riqueza didáctica, desde los procesos hasta la gestión llevada a cabo por los ponentes, así como aspectos a tener en cuenta en una aula con alumnos. El índice previsto es el siguiente:

I. Breve introducción a las actividades de matemáticas ricas (10’)

II. Actividad 1: El problema de los tanques alemanes (35’)

III. Actividad 2: Captura y recaptura (35’)

IV. Conclusiones (10’)

En los apartados siguientes se describe y se analiza cada actividad. En cada una de ellas se describe la actividad llevada a cabo, y aspectos a reflexionar en relación con los contenidos, procesos que se vayan a poner en práctica, así como diferentes niveles que podamos tener en una aula.

Actividad 1: El problema de los tanques alemanes

Tal como se expone en el artículo de Bardina y otros (2017), la estadística jugó un papel importante en el desarrollo de la Segunda Guerra Mundial. El "problema de los tanques alemanes" consistía en la dificultad para estimar la producción militar de Alemania. Los estadísticos del ejército aliado idearon una solución ingeniosa al relacionar la producción de tanques con la numeración de las cajas de cambio de los vehículos capturados. Después de la guerra, se confirmó la precisión de estas estimaciones estadísticas en comparación con los datos de inteligencia inicialmente erróneos de los aliados.

Fecha de producción	Estimación por números de serie	Estimación de inteligencia	Datos reales del Ministerio de Armamento
Junio de 1940	169	1.000	122
Junio de 1941	244	1.550	271
Agosto de 1942	327	1.550	342
Febrero de 1944	270	1.400	276

Tabla 1. Estimación de la producción de los carros de combate *Panzer*. Touza (2012)

En esta actividad, pretendemos que los asistentes descubran el método que utilizaron los estadísticos del ejército aliado para realizar las estimaciones.

Primero, mostramos una bolsa con papelitos y preguntamos ¿cuántos papelitos creéis que hay en esta bolsa?

Imagen 7. La bolsa contiene un número de papelitos desconocido que queremos determinar con una estimación.

Guiamos una conversación para establecer el valor mínimo y máximo de la estimación. Como la diferencia entre los dos valores será muy grande, hacemos surgir que necesitamos más información para poder hacer una estimación más acertada.

A continuación, explicamos que los papelitos están numerados empezando por el 1 y preguntamos ¿qué podríais decir sobre la cantidad de papelitos que hay si sacáis una muestra de 10?

Después de haber dejado un tiempo para que los asistentes planteen unos primeros estimadores para la cantidad total de papelitos (por ejemplo, obtener la media de la muestra y a partir de aquí, deducir la cantidad total) y haber hecho una puesta en común, introducimos el estimador que se utilizó para resolver el problema de los tanques alemanes. Si $1 \leq X_1 < X_2 < \ldots < X_{10}$ son los valores de los 10 papelitos que hemos sacado, una posible manera de estimar la distancia entre X_{10} y la cantidad total de papelitos N puede ser encontrar la media d de las distancias entre valores consecutivos de la muestra, y estimar:

$$N \approx X_{10} + d$$

Entonces, repartimos una bolsa de papelitos a cada grupo (todos con la misma cantidad) para que realicen el experimento, utilicen este estimador y encuentren una manera eficiente de calcularlo:

$$N \approx X_{10} + (X_{10} - 1) : 10$$

Cerramos la actividad comparando este estimador con la cantidad real de papelitos y los otros posibles estimadores que hayan planteado los asistentes.

Actividad 2: Captura y recaptura

Partimos del reto de "contar" los garbanzos que hay en un paquete de 1 kg. Dejaremos que los asistentes planteen diferentes estrategias de conteo y de estimación, hasta que proponemos el método de captura y recaptura, ampliamente utilizado en estudios ecológicos para estimar las tasas de evolución de poblaciones (un ejemplo reciente lo encontramos en Hérnandez-Brito y otros (2022)).

Aplicaremos el método de captura y recaptura a partir de los siguientes pasos:

1) Presentamos una bolsa que contiene 1 kg de garbanzos.
2) «Capturamos»: cogemos unos cuantos garbanzos de la bolsa y los pintamos de color rojo.
3) Devolvemos los garbanzos pintados a la bolsa y los mezclamos con el resto.
4) «Recapturamos»: cogemos un puñado de garbanzos al azar y contamos cuántos garbanzos pintados hay.
5) Hacemos la proporción de garbanzos pintados con respecto a la muestra que hemos considerado para inferir el total de garbanzos que hay en la bolsa:

$$\frac{\text{Recapturados}}{\text{Muestra recapturada}} \frac{\text{pintados}}{} = \frac{\text{Total}}{\text{Total garbanzos}} \frac{}{\text{pintados}}$$

Realizaremos los experimentos manipulativamente y analizaremos la información obtenida a través de la conversación conjunta. Durante la gestión de la actividad centraremos las preguntas en generar controversias sobre diferentes aspectos del diseño experimental del estudio para tratar de conseguir la estimación más precisa posible.

Imagen 8. Izda.: Sacamos 100 garbanzos de la bolsa y los pintamos de rojo.
Dcha.: volvemos a introducir los garbanzos pintados en la bolsa.

Algunas de las preguntas serán: ¿Cómo podríamos estar seguros de que la estimación que hemos hecho es suficientemente precisa? ¿Cómo estaríamos más seguros de que la muestra es representativa, cogiendo una sola muestra de 500 garbanzos, o cogiendo 10 muestras de 50 garbanzos?

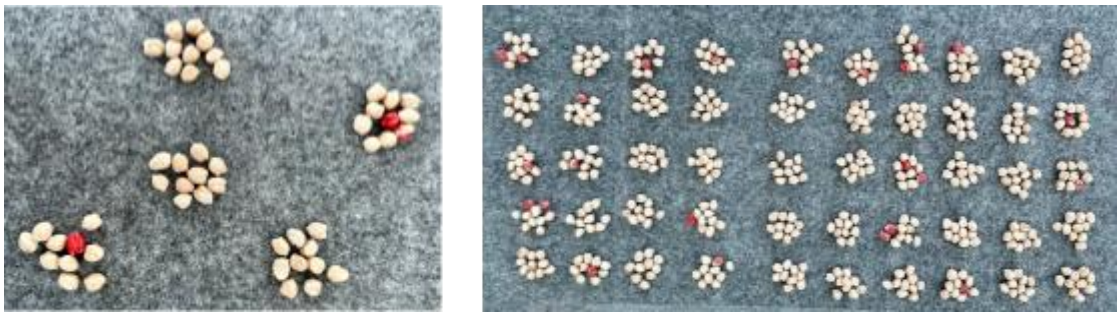


Imagen 9. Izda.: muestra de 50 garbanzos (3 pintados). Dcha.: muestra de 500 garbanzos (24 pintados).

Es importante darse cuenta de que sumando los garbanzos pintados de las 10 muestras y haciendo la proporción sobre 500 obtendríamos el mismo resultado que realizando la estimación a partir de la media de las 10 muestras, pero en este caso perderíamos la información sobre la dispersión de los datos.

Es por ello que construiremos dos histogramas, uno para cada caso, con el objetivo de visualizar la distribución de los datos que nos ofrece la estrategia de tomar 10 muestras independientes. De esa forma introducimos el concepto de variabilidad y estudiamos las ventajas que supone a la hora de obtener estimaciones más representativas de la realidad.

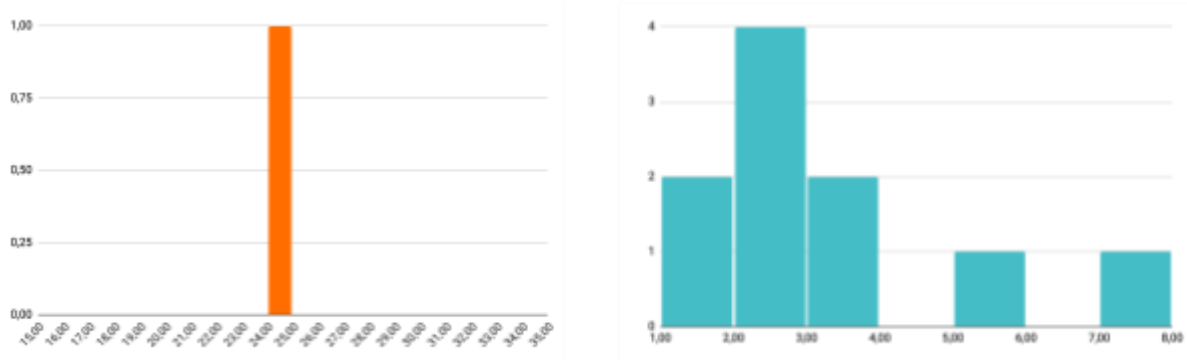


Imagen 10. Histograma del número de garbanzos pintados “recapturados” correspondiente a una sola muestra de 500 garbanzos (izquierda) y a 10 muestras de 50 garbanzos (derecha).

Como se expone en el libro GAISE II (Bargagliotti, A. y otros, 2020), es importante tener en cuenta el concepto de variabilidad cuando trabajamos estadística en las aulas, y a través de este ejemplo se genera la necesidad de plantearse su aplicabilidad.

Referencias

Bardina i Simorra, X., Prior Cayuela, S., Rodríguez, C., & Rosado, F. (2017). *El problema dels tancs alemanys*. Materials matemàtics. https://ddd.uab.cat

Bargagliotti, A. y otros (2020). Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II). Alexandria, Va, American Statistical Association.

Bartell, T., Wager, A., Edwards, A., Battey, D., Mary Foote, M. y Spencer, J. (2017). Toward a framework for research linking equitable teaching with the standards for mathematical practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(1), 7-21.

Deulofeu, J. y Vila, A. (2021). Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas*. GIDIMAT-UA (Ed.), Ideas para la Educación Matemática. Perspectivas desde el Trabajo de Maria Luz Callejo de la Veg*a. (pp.41-68). Compobell: Murcia.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hernández-Brito, D., Carrete, M., & Tella, J. L. (2022). Annual censuses and citizen science data show rapid population increases and range expansion of invasive rose-ringed and monk parakeets in Seville, Spain. Animals, 12(6), 677. https://doi.org/10.3390/ani12060677

Niss, M., y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

NRICH team (2013). Low Threshold High Ceiling - an Introduction. *NRICH Millennium Mathematics Project*. Cambridge University. https://nrich.maths.org/10345

NRICH team (2017). Creating a Low Threshold, High Ceiling Classroom. *NRICH -*

Millennium Mathematics Project. Cambridge University. https://nrich.maths.org/7701

Petersen, C. G. J. (1896). “The Yearly Immigration of Young Plaice Into the Limfjord From the German Sea”, Report of the Danish Biological Station (1895), 6, 5–84.

Piggott, J. (2011). Mathematics enrichment: What is it and who is it for? *NRICH -*

Millennium Mathematics Project. Cambridge University. https://nrich.maths.org/5737

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Touza, R. (2012). Los Panzer del Mariscal Rommel y el Iphone de Paris Hilton. Revista general de marina, Vol. 263, MES 4, 687-693.

Vilalta, A., Morera, L., Rojas, F., Solar, H. (2021). *Rich Math Activities for a Primary School Class*. Taller presentado en formato virtual en el 14º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME14), Shanghái, China.

Las Matemáticas de la pajarita

Estefania Hernández Salas
estefaniahsalas@gmail.com
Institut Vilamajor

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Objetivos, finalidad, metodología y conclusiones

Con el objetivo de hacer más atractiva la geometría se plantea trabajarla a partir del plegado de una figura tradicional de papiroflexia, la pajarita de papel.

Para hacer más visibles y comprensibles conceptos de geometría como perímetro y área así como de medida, la proporcionalidad, se construirán pajaritas de papel siguiendo las instrucciones de diferentes diagramas. Se formularan preguntas durante el proceso de plegado y se propondrán ejemplos de actividades para llevar al aula tanto en primaria como secundaria una vez obtenida la figura. Los asistentes elaborarán sus propias pajaritas.

Por último, se explicará la experiencia de participación en “Matemàtiques al carrer”. A modo de ejemplo, se mostrarán trabajos hechos por alumnos y se recogerán ideas para llevar estos materiales al aula.

La finalidad última es animar a los docentes a introducir la papiroflexia en sus actividades matemáticas. Puesto que es una herramienta versátil y muy económica que aporta muchos beneficios educativos y permite trabajar, concretamente, la geometría en el aula de manera muy visual y con materiales fabricados por los mismos alumnos.

Palabras clave: Geometría, Proporcionalidad, Papiroflexia.

Introducción

Son muchos los beneficios que aporta la papiroflexia tanto a nivel personal como académico. Entre ellos se destacarían: concentración, motivación, precisión y pulcritud, paciencia, perseverancia, memoria, motricidad fina, pensamiento computacional, comprensión lectora, creatividad y visión espacial. En el aula, además, el uso de la papiroflexia contribuye a mejorar la cohesión de grupo, el trabajo cooperativo, propicia un buen clima, puede ser usada de forma interdisciplinar y puede convertirse en un hobby instructivo.

Cuando se lleva una actividad de papiroflexia al aula hay algunos aspectos que deben tenerse en cuenta. Para empezar, como el grupo es grande, es conveniente agruparlos en grupos más pequeños para evitar la frustración y que todo el alumnado pueda estar conectado a la actividad. Respecto al material, tendría que estar preparado con antelación, tanto el formato de papel como las fotocopias con los diagramas de plegado que se facilitan al alumnado. En algún caso, puede ser de gran utilidad, llevar figuras plegadas o bien en diferentes puntos del plegado para cambiarlas a las del alumnado con más dificultades en el proceso. Durante la actividad, la docente, tiene que ir pasando por los distintos grupos para comprobar que cada uno de ellos sigue el desarrollo de la misma. También se tiene que tener en cuenta la temporización, es importante dar el tiempo necesario para construir la figura así como para realizar los cálculos o responder las preguntas que se plantean. En función, de la motivación del alumnado puede que esto signifique alguna sesión extra que no estaba planificada.

Plegado de la Pajarita

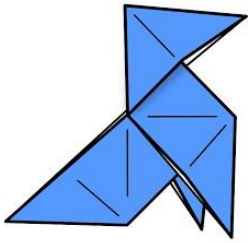


Imagen 1 : Pajarita, materialescolar.es

Para plegar la pajarita se seguirán las instrucciones de los diagramas de plegado que se concretan en cada nivel.

Diagramas de plegado y metodología

Ciclo medio de primaria

Para doblar la pajarita de papel, las instrucciones se explican de manera oral a través de un cuento propio. El diagrama a partir del que se crea el cuento está publicado en el libro *Papiroflexia* de Eduardo Clemente.

Se dará papel cuadrado al alumnado para hacer la figura.

Ciclo superior de primaria y secundaria

Para doblar la pajarita de papel, en este caso, se explican de manera oral las instrucciones de plegado utilizando vocabulario matemático apropiado al nivel. El diagrama que se utiliza está publicado en el libro *Orisangakus* de María Belén Garrido.

Para alumnos de secundaria también se facilitan diagramas de plegado impresos o bien en formato digital con la finalidad de que se familiaricen con su lectura y puedan interpretar correctamente la simbología que se utiliza para realizar actividades posteriores.

El papel que se facilita al alumnado no está en el formato que se necesita, por tanto, antes de empezar a plegar se requiere que hagan algún cambio en el papel para conseguir un papel cuadrado.

Propuestas durante el proceso de plegado

Ciclo medio de primaria

Durante el proceso de plegado se hacen algunas preguntas al alumnado para que se respondan de manera oral y con argumentación. Se facilita un ambiente de diálogo y participación para llegar a acuerdos de grupo. Estas preguntas hacen referencia al formato de papel que se utiliza y a los polígonos que aparecen, forma y proporción respecto al papel original. El número de preguntas puede ser reducido para no interferir en el argumento del cuento que explica el proceso de plegado.

Ciclo superior de primaria y secundaria

Durante el proceso de plegado se pretende consolidar conceptos geométricos que se derivan de las instrucciones y se incide en la importancia del lenguaje específico cuando se comunican. A través de preguntas que se responden oralmente y acompañadas de argumentación se quiere incentivar la participación y el trabajo en equipo. Estas preguntas hacen referencia al formato del papel, a los polígonos que aparecen durante el proceso, sus propiedades, así cómo a cuestiones de proporción, área y perímetro. Se expresan cantidades en forma de número decimal, de fracción o porcentaje.

Propuestas después del plegado

Una vez acabado el proceso de plegado, después de la satisfacción personal del alumnado al obtener su propia pajarita de papel, se plantean diferentes actividades donde se desarrollan tanto competencias específicas de la materia de matemáticas como otras de carácter más transversal. A modo de ejemplo, la competencia computacional, la comunicación, formular conjeturas y las conexiones dentro de la propia matemática.

Ciclo medio de primaria

Se plantea al alumnado diferentes tipos de retos. Fundamentalmente se exploran conceptos de geometría, el objetivo principal es analizar la proporción de la pajarita en relación con el formato original del papel aunque esta pregunta se debe desglosar en otras más sencillas y de nivel progresivo hasta llegar al resultado final.

Se diseñan actividades para fomentar la creatividad a partir de las cicatrices del papel se pide que construyan otros personajes distintos a la pajarita y que expliquen de manera oral como lo han hecho. Se analizan perímetros y áreas de estos diferentes personajes con propuestas y terminología adecuadas a la edad.

Ciclo superior de primaria y secundaria

Inicialmente se plantea al alumnado diferentes tipos de retos. Fundamentalmente se exploran conceptos de geometría, se analiza la proporción de la pajarita en relación con el formato del papel original antes de doblarla, se plantean preguntas relacionadas con la medida para que se cumplan ciertas condiciones. A partir del CP, diagrama de cicatrices, se pueden trabajar patrones, sucesiones, el teorema de Pitágoras en el caso de secundaria; elementos geométricos, áreas y perímetros, identificación de polígonos, ángulos, rectas, segmentos … en el caso de primaria.

Se pide al alumnado que realice un texto instructivo del proceso de plegado de la pajarita. Deben utilizar un lenguaje matemático apropiado y incluir fotografías que ilustren los diferentes pasos de este proceso.

Se plantean, también, actividades para fomentar la creatividad y el trabajo en equipo, dejando un espacio para que sea el propio alumnado el que formule sus propias preguntas y se plantee como responderlas.

Se facilita al alumnado otros diagramas de plegado de la pajarita diferentes al utilizado en la actividad. Se les propone que los interpreten y que construyan nuevas pajaritas con estos diagramas. Finalmente se les pide que los analicen y que observen las similitudes y diferencias.

Conclusiones

En este taller se pretende animar a otros docentes a utilizar la papiroflexia en su aula aunque no tengan grandes habilidades como plegadores ni experiencia. El papel es un material muy económico, incluso puede utilizarse material reciclado, de gran riqueza así como versatilidad para diseñar actividades en todos los niveles educativos, no sólo primaria y secundaria.

Se mostraran fotografías de algunos de los trabajos realizados por los alumnos en aulas tanto de secundaria como primaria.

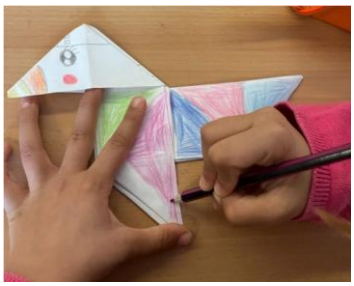


Imagen 2: Aula de Primaria

Experiencia “Matemàtiques al Carrer”

En este apartado se explicará la experiencia de participar en dos ediciones consecutivas en la actividad “Matemàtiques al Carrer” (Mataró 2022 i Granollers 2023) con una parada de papiroflexia dedicada a las matemáticas de la Pajarita.

¿Cómo diseñar una actividad de papiroflexia y matemáticas cuando no conoces el público a que va dirigida?

Imagen 3: Porxada de Granollers

Referencias

Clemente, Eduardo (1996). *Papiroflexia*. Editorial Plaza & Janés. Barcelona. Páginas 32-34.

Garrido Garrido, Maria Belén (2015). *Orisangakus. Desafíos matemáticos con papiroflexia*. Biblioteca estímulos matemáticos. Editorial SM. Páginas 31-32.

Rodríguez Martin, Julian (). *Papiroflexia.* Perea ediciones. Colección biblioteca popular, número 12. Madrid. Páginas 20-24.

Entre números, signos y letras:
Enteros y Álgebra al comienzo de la ESO

Eva Cid
ecid@unizar.es
Universidad de Zaragoza

Pablo Beltrán-Pellicer
pbeltran@unizar.es
Universidad de Zaragoza

José M. Muñoz-Escolano
jmescola@unizar.es
Universidad de Zaragoza

Núcleo temático: Procesos, formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En este taller se presenta una propuesta didáctica de iniciación al álgebra y a los números enteros que tiene en cuenta la ruptura que supone el paso de la aritmética al álgebra y que la razón de ser de los números enteros se encuentra en el álgebra con literales, así como los obstáculos que presentan los modelos concretos para construir los enteros. En dicha propuesta se inicia el cálculo algebraico sin haber introducido previamente los números enteros que se van construyendo a medida que el cálculo algebraico los necesita. Además, las letras se utilizan como variables, antes que como incógnitas, y los problemas aritméticos tienen datos desconocidos o variables que obligan a que sus soluciones ya no sean números sino fórmulas, lo que ayuda a que los alumnos tomen conciencia desde el primer momento de la distancia que existe entre el quehacer algebraico y el aritmético.

Palabras clave: números enteros, iniciación al álgebra, educación secundaria, experiencias de aula, didáctica de las matemáticas.

1. El número entero en la educación secundaria obligatoria

1.1 La enseñanza a través de modelos concretos

En los textos escolares de los años 80 y 90 del pasado siglo, el número entero se presentaba en un ámbito aritmético, previo a la iniciación del álgebra, y su significado y operaciones se ligaba a modelos concretos de deudas y haberes, pérdidas y ganancias, puntuaciones positivas y negativas en un juego, fichas de dos colores, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, años antes y después de Cristo, movimientos de personas u objetos en uno u otro sentido, desplazamientos sobre la recta real, etc. Se suponía que estos modelos justificaban la necesidad del uso de los números enteros, daban cuenta de sus operaciones y propiedades y permitían reconstruirlas en caso de olvido.

1.2 Las críticas a los modelos concretos

Sin embargo, ya en aquella época y también posteriormente, aparecieron trabajos (Bell, 1986; Brousseau, 1983; Carraher, 1990; Cid, 2002, 2016; Freudenthal, 1973; Glaeser, 1981; González Marí, 1995; Whitacre et al., 2012) que ponían en duda las supuestas virtudes del uso de modelos concretos alegando que, incluso, podían suponer un obstáculo para una correcta comprensión del número entero y sus técnicas de uso.

Algunas de las críticas a la utilización de modelos concretos para introducir los números enteros se referían a la supuesta necesidad de dichos números para resolver problemas aritméticos en contextos de modelos concretos. La realidad es que el trabajo aritmético dentro de esos modelos concretos no necesita de los números enteros. Si nos dicen, por ejemplo, que a partir de un origen común un punto se desplaza 20 cm a la derecha sobre una recta y otro 30 cm a la izquierda, no necesitamos hacer la operación (+20) – (-30) = (+20) + (+30) = 50 cm para saber que la distancia entre los dos puntos es de 50 cm, basta con hacer 20 + 30 = 50 cm. Del mismo modo, si en un juego perdemos 7 puntos y después ganamos 2, no necesitamos escribir (-7) + (+2) = -5 para saber que hemos perdido cinco puntos en

total. Basta con escribir 7 – 2 = 5 y saber que el resultado son pérdidas porque estas son mayores que las ganancias.

La aritmética es un ámbito permanentemente contextualizado en el que las operaciones se efectúan una a una y vienen determinadas por el contexto. En estas condiciones, los números absolutos, los números sin signo, bastan y sobran para resolver cualquier problema, sin necesidad de introducir la complejidad simbólica que supone el trabajo con números positivos y negativos.

Otras críticas se referían a que los modelos concretos tampoco ayudaban a justificar las operaciones y propiedades de los números enteros ni a recordarlas en caso de olvido. Los modelos concretos parece que funcionan bien porque el docente sabe a dónde quiere ir, pero para los escolares pueden suponer un obstáculo. Un docente puede decir que -5 < -2 porque -5 grados es una temperatura más baja que -2 grados, pero un escolar puede pensar que a -5 grados hace más frio que a -2 grados y, por tanto, -5 > -2. Del mismo modo, un docente puede justificar, por ejemplo, que (+50) + (-20) = +30 porque si una persona tiene 50 € y debe 20 € su situación económica es de 30 € a su favor, pero un escolar puede pensar que ese razonamiento no tiene sentido porque, de hecho, en ese momento esa persona sigue teniendo 50 € para gastarlos en lo que quiera. Lo de pagar la deuda no deja de ser un futurible.

Además, donde los modelos concretos hacen aguas definitivamente es en el intento de justificar el producto de números enteros. La razón última de esta dificultad (Cid, 2002) es que los modelos concretos *no se parecen* a una estructura con dos operaciones internas como es el caso de los números enteros, sino a una estructura con una operación interna y otra externa, como sucede en los espacios vectoriales, o a una estructura con dos operaciones externas, como sucede en el espacio afín. Una deuda o un desplazamiento, por ejemplo, se pueden duplicar o triplicar, es decir, se pueden multiplicar por un escalar, pero no se pueden multiplicar dos deudas o dos desplazamientos. Por eso, resulta tan complicado el intentar establecer una analogía entre el comportamiento de los modelos concretos y el del producto interno de números enteros.

1.3 El número entero en los textos escolares actuales

La mayor crítica, aunque no explícita, al uso de los modelos concretos la hicieron los libros de texto, probablemente influidos por los propios docentes, como lo muestra el hecho de que al florecimiento del uso de los modelos concretos para introducir los números enteros y sus operaciones propio de finales del siglo XX y comienzos del XXI, ha seguido una supresión casi total de los mismos. Actualmente, la mayor parte de los libros de texto usan los modelos concretos para introducir el número entero como resultado de una medida de magnitudes con dos sentidos o magnitudes relativas, pero con muy pocos intentos de utilizarlos para justificar las operaciones y propiedades de dichos números. Como mucho, se introduce la suma de enteros a partir de desplazamientos sobre la recta real o pérdidas y ganancias. En general, la enseñanza por medio de modelos concretos ha sido sustituida por una enseñanza memorística basada en la definición de valor absoluto para, a continuación, presentar las operaciones entre números enteros como operaciones entre valores absolutos, es decir, entre números naturales, con el añadido de reglas referidas a los signos '–' o '+' que preceden a los números.

Por consiguiente, ante el fracaso de los modelos concretos para justificar el número entero y sus operaciones, los textos escolares, con contadas excepciones, han renunciado a buscar una razón de ser de los números enteros que permita justificar su necesidad y dar sentido a sus operaciones y han optado por una enseñanza memorística. Pero las reglas son muchas y la memoria flaquea y, al cabo de un tiempo, nos encontramos con escolares que mezclan las reglas y hacen razonamientos como: *(-3) + (-6) = +9 porque 3 más 6 es 9 y – por – es más*.

2. La razón de ser histórica de los números negativos

La historia de los números negativos ha pasado bastante desapercibida. Han sido los trabajos de algunos investigadores en didáctica de las matemáticas o cercanos a ella (Brousseau, 1983; Cid, 2000, 2016; Gallardo, 2002; Glaeser, 1981; Lizcano, 1993; Schubring, 1986;) los que han puesto de manifiesto la conflictiva emergencia de los números negativos desde su primera aparición en el siglo III en forma de sustraendos hasta su aceptación como números a mediados del siglo XVIII.

Los números positivos y negativos no surgen en la historia de las matemáticas para resolver problemas aritméticos en un contexto de magnitudes con dos sentidos o magnitudes relativas. La primera vez que en el mundo occidental aparece una referencia a lo que hoy en día llamamos 'número negativos' es en la *Arithmetica* de Diofanto (siglo III d.C.). El libro es una colección de problemas aritméticos en los que el número desconocido que se busca, el *arithmos*, interviene en los razonamientos y las operaciones al mismo nivel que los datos conocidos. Se considera el texto fundacional del álgebra porque inicia las técnicas de cálculo algebraico y de resolución de ecuaciones.

Por supuesto, estamos ante un álgebra retórica, el simbolismo algebraico tardó muchos siglos en desarrollarse. Por ejemplo, Diofanto dice: *Si a 100 unidades le restamos 300 unidades menos 6 arithmos, resultan 6 arithmos menos 200 unidades*, donde nosotros escribimos: 100 – (300 – 6x) = 6x – 200. Es en este contexto donde aparece por primera vez el enunciado del producto de números positivos y negativos: *Falta multiplicada por falta hace presencia, falta multiplicada por presencia hace falta.* ¿Y por qué necesita Diofanto establecer esta regla y qué significa?

Pues porque la aparición de la incógnita y su consideración como un objeto más que opera al mismo nivel que los números cambia completamente el sentido del cálculo. Si queremos simplificar la expresión x – 7 + 5 ya no nos sirve pensar que los signos '–' y '+' son signos que simbolizan operaciones binarias entre números naturales porque la imposibilidad de realizar la operación x – 7 nos impide proseguir. Va a ser necesario interpretar que, si a x le tenemos que restar 7 y después sumar 5, eso equivale a restarle 2 y, por tanto, x – 7 + 5 = x – 2. Es decir, nos vemos obligados a interpretar las operaciones binarias entre números naturales como composiciones entre sumandos y sustraendos, lo que más tarde desembocó en la suma de números positivos y negativos.

Del mismo modo, la existencia de sumas y restas que no pueden ser efectuadas obliga a desarrollar técnicas de cálculo entre términos que a su vez son operaciones indicadas. De ahí, la regla enunciada por Diofanto: si nos vemos en la necesidad de multiplicar dos diferencias, *falta multiplicada por falta hace presencia*, es decir, el

producto de los sustraendos de las diferencias, *lo que falta*, da lugar a un sumando, *una presencia*. Y esta regla, que se terminó convirtiendo en la regla multiplicativa de los signos, es fundamental porque garantiza que la propiedad distributiva se sigue cumpliendo, lo que permite las técnicas de desarrollo y factorización, absolutamente imprescindibles para la simplificación de las expresiones algebraicas.

Son, por tanto, las necesidades del cálculo algebraico las que fuerzan la sustitución de los números absolutos y sus operaciones por composiciones y productos de sumandos y sustraendos que, muchos siglos más tarde y después de muchas discusiones y dificultades se convirtieron en los números positivos y negativos.

Los modelos concretos son un dispositivo didáctico que sería perfectamente válido si pudiera sustituir a la razón de ser histórica de una forma creíble, ya que no es necesario que la génesis de los objetos matemáticos en el aula reproduzca la génesis histórica, y muchas veces ni siquiera es conveniente. Pero no son creíbles y además hay razones fundadas para suponer que pueden obstaculizar su comprensión. El número entero es el primer objeto de la enseñanza obligatoria de las matemáticas que surgió por razones internas de las matemáticas (Chevallard, 1990) y esto no se puede obviar con una pretendida modelización física de ese objeto y sus propiedades.

3. La iniciación al álgebra en la educación secundaria obligatoria

3.1 El álgebra en los textos de 1º de ESO

Una vez presentados los números enteros y los racionales positivos y negativos, los textos escolares de 1º de ESO suelen iniciar el álgebra haciendo una breve referencia a la necesidad de usar letras en vez de números para expresar propiedades aritméticas, fórmulas, relaciones entre magnitudes, términos generales, números desconocidos, etc. Introducen después el valor numérico de las letras o de las expresiones algebraicas y pasan a definir monomios y polinomios y algunas de sus operaciones. Siguen con la definición de igualdad, distinguiendo entre identidad y ecuación, y abordan después las técnicas de resolución de las ecuaciones de primer grado y la resolución de problemas aritméticos mediante ecuaciones. Últimamente,

los currículos oficiales de la educación secundaria obligatoria fomentan una visión funcional del álgebra, priorizando inicialmente la *variable* antes que la *incógnita*, lo que empieza a reflejarse en los libros de texto.

Ahora bien, en todo este proceso apenas hay referencias a que hemos entrado en un mundo nuevo, un mundo en el que los números, los signos de operaciones y relaciones y las letras ya no tienen los mismos significados o propiedades que tenían en aritmética. Y cuando se hace algún comentario que pone en relación la aritmética con el álgebra suele ser un comentario tranquilizador, un comentario donde se informa a los escolares de que la utilización de letras en los cálculos no supone cambios respecto a sus concepciones aritméticas sobre los números y sus operaciones.

3.2 Las críticas a la iniciación al álgebra dominante en los textos escolares

Esta iniciación escolar del álgebra, dominante en el sistema educativo y caracterizada por considerarla como una simple prolongación de la aritmética, ha sido cuestionada por diversos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Bosch, 2015; Chevallard, 1989, 1990; Gascón, 1993, 1994-95;) que ponen el énfasis en que las tareas escolares algebraicas habituales se reducen básicamente a la manipulación formal de expresiones y relaciones algebraicas, sin tener en cuenta que el álgebra es ante todo un instrumento de modelización de todas las matemáticas, ya que todas las ramas de las matemáticas se expresan en términos algebraicos, y no se puede separar el cálculo algebraico de las situaciones que modeliza.

Otros autores ponen de manifiesto las diferencias de significado y operacionales que sufren los objetos aritméticos al convertirse en objetos algebraicos (Cid, 2012; Kieran, 1980, 2004; Kieran y Filloy, 1989), lo que no casa bien con una enseñanza que no tiene en cuenta estas diferencias y transmite una concepción continuista del álgebra respecto a la aritmética.

4. Las diferencias entre aritmética y álgebra

El paso de la aritmética al álgebra cambia el sentido de los objetos aritméticos, en particular, el de los números y sus operaciones. En aritmética, un número natural es

el resultado de una medida, discreta o continua, y sus operaciones están ligadas a acciones físicas ejercidas sobre las cantidades de magnitud. Y así, sumar y multiplicar significan *aumentar* porque son operaciones ligadas a las acciones de añadir, reunir, añadir reiteradamente, etc., mientras que restar y dividir significan *disminuir* porque están ligadas a las acciones de quitar, separar, repartir, quitar reiteradamente, etc.

Esta concepción de las operaciones, que ha permitido a los escolares tener éxito en la resolución de problemas aritméticos durante muchos años, solo se ve modificada en algunos aspectos por la aparición de los números racionales positivos. Son números que también pueden justificarse como resultados de medidas de cantidades de magnitud, pero el sentido de la multiplicación y división de racionales positivos ya no es estrictamente el mismo que el de esas mismas operaciones entre números naturales. Sin embargo, el paso casi inmediato a la representación decimal refuerza de nuevo dicha concepción y únicamente la multiplicación o división por un número menor que uno la contradice. Y todos sabemos la dificultad que esto supone para los escolares.

En cambio, el trabajo algebraico obliga al uso de los números positivos y negativos y esto supone la modificación de las concepciones aritméticas sobre el número y sus operaciones. Ahora sumar y multiplicar ya no siempre es sinónimo de *aumentar* y restar y dividir no siempre significa *disminuir*; cero ya no significa *ausencia de cantidad de magnitud* y, por tanto, tiene sentido la existencia de números menores que cero; la resta, donde el minuendo tiene que ser mayor o igual que el sustraendo porque *de donde no hay no se puede sacar*, es sustituida por la diferencia, que será positiva o negativa según que el minuendo sea mayor o menor que el sustraendo.

Y a estos cambios en la manera de concebir los números y sus operaciones, hay que añadir otras muchas diferencias, algunas de las cuales señalamos a continuación:

- En aritmética, las letras son prioritariamente abreviaturas de unidades de medida o de objetos pertenecientes al contexto del problema. Por ejemplo, 5m suele significar 5 metros.

En el álgebra escolar, las letras de una expresión algebraica indican números descontextualizados que pueden ser variables, incógnitas, parámetros o constantes. Por ejemplo, 5m significa el producto de 5 por el número m, de momento sin determinar.

- En aritmética, el signo '=' indica prioritariamente que la operación situada a su izquierda debe ser efectuada y el resultado colocado a la derecha del signo.

  En álgebra, el signo '=' establece una relación de equivalencia entre las expresiones situadas a izquierda y derecha del mismo.

- En aritmética, los signos '+' y '–' indican operaciones binarias entre números sin signo.

  En las expresiones algebraicas, los signos '+' y '–' pueden indicar que un número es positivo o negativo (*sentido predicativo*) o una operación binaria entre números con signo o sin signo (*sentido operativo binario*). Además, el signo '–' también puede significar el opuesto de un elemento (*sentido operativo unario*).

- En aritmética, existen cuatro operaciones: suma, resta, multiplicación y división, que se simbolizan, respectivamente, mediante los signos: '+', '–', 'x', y ':'.

  En cambio, las operaciones algebraicas se reducen a dos: suma y producto. La resta se interpreta como suma con el opuesto y el cociente como producto por el inverso. En cuanto a los signos que indican las operaciones binarias de suma y producto, normalmente se suprimen. Por ejemplo, –3–4 indica la suma de –3 y –4, mientras que (–3)(–4) indica el producto.

- En aritmética, la igualdad y la desigualdad solo pueden tener dos valores de verdad: verdadera o falsa. Y es incorrecto escribir una igualdad o desigualdad falsa.

  En álgebra, la igualdad y la desigualdad pueden ser verdaderas o falsas dependiendo de los valores que tomen las letras. Una igualdad o desigualdad se puede escribir independientemente de sus valores de verdad. Incluso es admisible escribir una igualdad o desigualdad que no se cumple para ningún valor de las letras. Basta con decir que es una ecuación o inecuación que no tiene solución.

- En la resolución aritmética de un problema, las operaciones se presentan de una en una y se suelen escribir por separado y el control de su validez es

semántico, está garantizado por el contexto del problema. Como consecuencia, las reglas de escritura que afectan a las operaciones son pocas y sencillas.

En cambio, en la resolución algebraica de un problema, las operaciones se ligan unas con otras, constituyendo una o varias expresiones o relaciones algebraicas que contienen operaciones combinadas que indican un programa de cálculo a seguir. La escritura algebraica de los programas de cálculo exige una sintaxis mucho más compleja, y un control también sintáctico, puesto que la fase de manipulación de expresiones o relaciones algebraicas es una fase descontextualizada y, por tanto, no se puede recurrir al contexto para garantizar su validez.

- En aritmética, las técnicas de cálculo son algorítmicas. Las operaciones entre números naturales, decimales o fracciones se llevan a cabo siguiendo unas pautas muy precisas que no exigen toma de decisiones.

  En álgebra, las técnicas de cálculo no son algorítmicas, exigen reflexión y toma de decisiones y dependen en gran medida de la finalidad del cálculo. Se rigen, además, por principios de economía y funcionalidad.

5. La ruptura epistemológica entre aritmética y álgebra

El análisis de los modos de hacer aritmético y algebraico nos muestra que existen grandes diferencias entre uno y otro, hasta el punto de que se puede pensar que el inicio del álgebra escolar supone una ruptura con una tradición aritmética anterior que incluso se puede convertir en un obstáculo para la adquisición de los nuevos conocimientos algebraicos. Pero, esta ruptura, ¿es una ruptura epistemológica, es decir, se puede rastrear también en la historia de las matemáticas?

En efecto, la historia de las matemáticas nos muestra que la aritmética ha jugado un papel contradictorio en el desarrollo del álgebra (Cid, 2016). Desde luego, la estructura algebraica de sumandos y sustraendos, base de todo el cálculo algebraico, pudo ser establecida gracias al conocimiento de la estructura algebraica de los números absolutos y sus operaciones. Sin embargo, por otro lado, la dependencia de la aritmética obstaculizó durante siglos el paso a un álgebra abstracta y a la consideración de los sustraendos como números en igualdad de condiciones con los números positivos.

En un principio, el álgebra no es más que una técnica de resolución al servicio de la aritmética que permite afrontar problemas aritméticos desde un punto de vista numérico, en contraposición con la resolución geométrica propia de la matemática griega clásica. Posteriormente, el álgebra se convierte en un objeto de estudio (Al-Khwarizmi, *Hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, siglo IX) y las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones se describen de manera sistemática y se intentan justificar mediante razonamientos deductivos.

A medida que el álgebra evoluciona, los problemas que afronta ya no están totalmente condicionados por la aritmética, ya que se está desarrollando también la modelización algebraica de la geometría, pero sigue interpretándose como una prolongación de la aritmética, como una *aritmética generalizada* y las soluciones de las ecuaciones tienen que tener sentido en el ámbito aritmético. Tienen que ser números y los sustraendos y sus raíces difícilmente pueden ser entendidos como números. Ahora bien, esto impide el establecimiento de una teoría general de ecuaciones y con el paso de los siglos se va haciendo cada vez más evidente la necesidad de admitir las soluciones negativas e imaginarias.

Fueron necesarias las rupturas epistemológicas que se produjeron en las matemáticas de finales del siglo XVIII y principios del XIX (De Lorenzo, 1977) para poder llegar a un álgebra totalmente independiente de la aritmética en la que las letras se refieren a objetos abstractos que no tienen por qué ser números y en la que se definen estructuras algebraicas que no tienen por qué responder a las estructuras algebraicas propias de la aritmética, lo que condujo al desarrollo del álgebra abstracta y a la proliferación de diversas estructuras algebraicas.

Esta nueva manera de entender las matemáticas permitió también una definición axiomática de los números (Hankel, *Vorlesungen uber die complexen Zahlen und ihre Functionen,* 1867), independiente de los procesos de medida y de la geometría euclídea, y sin referencias al mundo sensible, lo que supuso la aceptación definitiva de los números negativos e imaginarios y la fundamentación aritmética y algebraica del análisis y la geometría, abandonando el recurso a la *intuición geométrica*.

6. La secuencia didáctica de introducción al álgebra y al número entero en 1º de ESO

La secuencia didáctica que se presenta en este taller es el resultado de investigaciones realizadas a lo largo de varios años y descritas en diversos artículos (Cid, 2022; Cid y Ruiz-Munzón, 2011; Cid, Muñoz-Escolano y Ruiz-Munzón, 2020) y responde a los requerimientos planteados en los apartados anteriores. Ha sido experimentada en distintas ocasiones y situaciones por docentes e investigadores de diversos países. Actualmente, existe un grupo en Telegram llamado *De la aritmética al álgebra*[45], cuyo objetivo es crear una comunidad en torno a esta secuencia, dando pie a interacciones ricas de los docentes que la han llevado a la práctica o están interesados en ella. Además, hay referencias a dicha secuencia en el currículo aragonés de la educación secundaria obligatoria y se ha incorporado a propuestas editoriales recientes, como Math Bits.

6.1 Objetivos de la secuencia didáctica

- Poner de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra.
- Iniciar el algebra sin el número entero, que se irá construyendo a medida que el cálculo algebraico lo necesite.
- Afrontar el cambio de significado de algunos objetos aritméticos al convertirse en objetos algebraicos.
- Familiarizar a los alumnos con los distintos objetos algebraicos antes de ser institucionalizados y de desarrollar sus técnicas de manejo.
- Introducir lentamente la escritura algebraica, sin darla por conocida.
- Introducir los principios de economía y funcionalidad en el cálculo algebraico.

6.2 Descripción de la secuencia didáctica

En una primera etapa se plantean problemas aritméticos que se resuelven mediante sumas y restas y en los que algunos datos son desconocidos y deben indicarse

[45] El enlace de invitación es: https://t.me/joinchat/cvKQXoyDrfAwZjdk

mediante letras. La necesidad de resolver los problemas aritméticos nos obliga a responder con una expresión algebraica y su simplificación nos exige pasar de las sumas y restas entre números absolutos a la composición de sumandos y sustraendos.

En la segunda etapa, se trabaja la diferencia como resultado de la acción de comparar frente a la resta como resultado de la acción de sustraer. Esto introduce las diferencias con signo según la relación de orden entre el primer y segundo término de la diferencia. Seguimos planteando problemas con datos desconocidos, lo que obliga a gestionar expresiones en las que el segundo término de la diferencia es, a su vez, una suma o diferencia. Se introduce el paréntesis como indicador de la longitud de un sustraendo y se reinterpreta el signo '–' como signo *operativo unario* (signo que transforma un sumando en sustraendo y viceversa). Esto conduce a las reglas de supresión de paréntesis y permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis.

En la tercera etapa se incluyen problemas aritméticos en los que las expresiones algebraicas que los solucionan contienen productos en los que uno de los factores es a su vez una suma o diferencia. Se introduce el paréntesis como indicador de la longitud de un factor y se pone de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva porque reduce el producto entre un número y una suma o diferencia a un producto entre sumandos y sustraendos, estableciéndose las reglas multiplicativas de los signos.

Finalmente, en la cuarta etapa aparecen los modelos concretos que se utilizan habitualmente en la introducción escolar del número entero, pero ahora con un tratamiento algebraico. La utilización de esos modelos en un contexto algebraico, en el que las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya están establecidas, permite mostrar la gran ventaja que supone representar determinadas cantidades por medio de sumandos y sustraendos: la unificación de las fórmulas. Y esto conduce a la reinterpretación de los sumandos y los sustraendos como cantidades positivas y negativas y, a continuación, como nuevos números: los números enteros, y a la consolidación de un nuevo significado de los signos '+' y '–': su sentido *predicativo*.

A lo largo de estas etapas el escolar se va familiarizando con otros objetos algebraicos: expresión algebraica, valor numérico, fórmula, variable, función, incógnita, igualdad, desigualdad, ecuación, inecuación, etc., que se van introduciendo sin necesidad de hacer un tratamiento exhaustivo de sus técnicas de cálculo para favorecer, ante todo, la comprensión de su significado.

7. Desarrollo del taller

En el taller empezaremos presentando un cuestionario que contiene respuestas de los escolares a tareas algebraicas. El análisis de los errores de los escolares realizado por los asistentes al taller nos conducirá a la caracterización de la enseñanza del álgebra y los números enteros en los textos escolares y los efectos adversos que produce. Después presentaremos algunos hechos históricos que muestran las dificultades de los matemáticos a lo largo de la historia para llegar a la actual concepción sobre el álgebra y los números negativos. Finalizaremos presentando la secuencia didáctica y el diario de alguna de las sesiones en las que se puso en práctica para generar una discusión con los participantes al taller acerca de la pertinencia e interés de dicha secuencia y de sus posibles modificaciones.

8. Referencias

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bosch, M. (2015). Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 51-69). Springer.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Carraher, T.N. (1990). Negative numbers without the minus sign. *Proceedings of the 14th International Conference of PME* (pp. 223-230). México.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, *23*, 5-38.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín SI-IDM*, *10*, 1-15.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, vol. 2 (pp. 529-542). ICE de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2012). *Diferencias entre el quehacer algebraico y el quehacer aritmético*. Apuntes de clase. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. https://zaguan.unizar.es/record/112529?ln=es

Cid, E. (2022). La introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico: razones y principios que la sustentan. En R. Martínez y M.E. Ruiz (eds.), *Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros* (pp. 105-167). Educo. https://bit.ly/3W8o0VB

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En: M. Bosch y otros (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview ATD* (pp. 579-604). Universidad Autónoma de Barcelona.

Cid, E., Muñoz-Escolano, J.M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). Research on negative numbers in school algebra. En M. Bosch y otros (eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook* (pp. 61-76). Routledge.

De Lorenzo, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia*. Editorial Tecnos.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 171-192.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13(*3), 295-332.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x, 37*, 43-63.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

González Marí, J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs an operator symbol. *Proceedings of the fourth conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 163-169). Berkeley (California).

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Editorial Gedisa.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, *12*, 5-32.

Whitacre, I. et al. (2012). What sense do children make of negative dollars? *Proceedings of the 34th Annual Meeting of PME-NA* (pp. 958-964). Kalamazoo (Michigan).

El flow en la clase de Matemáticas: procesos y evaluación

Inés Mª González Aguilar
igonagu@gobiernodecanarias.org
Agencia Canaria de Calidad Universitaria y Evaluación Educativa (ACCUEE)

María Muñoz Pérez
mmunperh@gobiernodecanarias.org
IES La Laboral de La Laguna

Israel García *Alonso*
igarcial@ull.edu.es
Universidad de La Laguna

Núcleo temático: Procesos, Evaluación

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

El estudio de PISA 2022 revela la importancia de integrar la dimensión socioafectiva en el currículo de matemáticas. Se encontró una relación negativa entre la ansiedad matemática y el rendimiento, lo que evidencia la necesidad de abordarla. La autoeficacia y la mentalidad de crecimiento también impactan significativamente en el rendimiento académico. Sin embargo, las evaluaciones de diagnóstico en Canarias 2023 no revelaron una correlación entre el autoconcepto y el rendimiento. Estos hallazgos evidencian la importancia de considerar la dimensión socioafectiva para mejorar el bienestar emocional y el rendimiento académico de los estudiantes. Se enfatiza en la inclusión de esta dimensión en el currículo de matemáticas para crear un ambiente de aprendizaje seguro y motivador. El taller propuesto ofrece estrategias metodológicas y herramientas de evaluación para integrar efectivamente la dimensión

socioafectiva en el aula, promoviendo un enfoque holístico que beneficie tanto el bienestar emocional como el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: Procesos, Reflexión, Evaluación, Socioafectivo, Evaluaciones externas.

1. Introducción

En el aula de matemáticas, se ha evidenciado la relevancia de integrar la dimensión socioafectiva en el currículo. En las evaluaciones de diagnóstico de Canarias 2023 realizadas de manera censal en 4ºESO y en relación con esta dimensión se formularon algunas preguntas sobre el autoconcepto y actitud del alumnado hacia las Matemáticas.

Una de las preguntas de la prueba de diagnóstico en Canarias, en su edición 2023, invita al estudiante a reflexionar sobre su actitud cuando se enfrenta a una tarea matemática (Imagen 1). Los resultados a esta pregunta (Imagen 2) evidencian que no se puede establecer una relación entre los mejores resultados en el autoconcepto y la actitud hacia las Matemáticas con un mayor rendimiento. Así, de los cinco rangos de puntuaciones, el alumnado, en general, no muestra diferencias en su valoración. Esto pone de manifiesto que los estudiantes no identifican sus fortalezas y debilidades, es decir, su autoconcepto y actitud hacia las matemáticas, por lo que podemos decir que este no se ha desarrollado correctamente. Este hecho viene a justificar que es necesario incluir el desarrollo socioafectivo en el aula, tal y como se recoge en el nuevo currículo a través de sus competencias específicas y criterios de evaluación para el citado sentido.

EVALUACIÓN DE DIAGNÓSTICO 2023 4.ºESO

PREGUNTA:

Indica tu opinión sobre las siguientes afirmaciones:

(Puntúa de 1 a 4, siendo el 1 "Nunca" y el 4 "Siempre")

A. Soy buena o buen estudiante en Matemáticas.
B. Me gusta estudiar Matemáticas.
C. Las Matemáticas son más difíciles para mí que para mis compañeras y compañeros.
D. Las matemáticas son más difíciles que otras asignaturas

Imagen 1. ED2023 CANARIAS. Fuente: ACCUEE

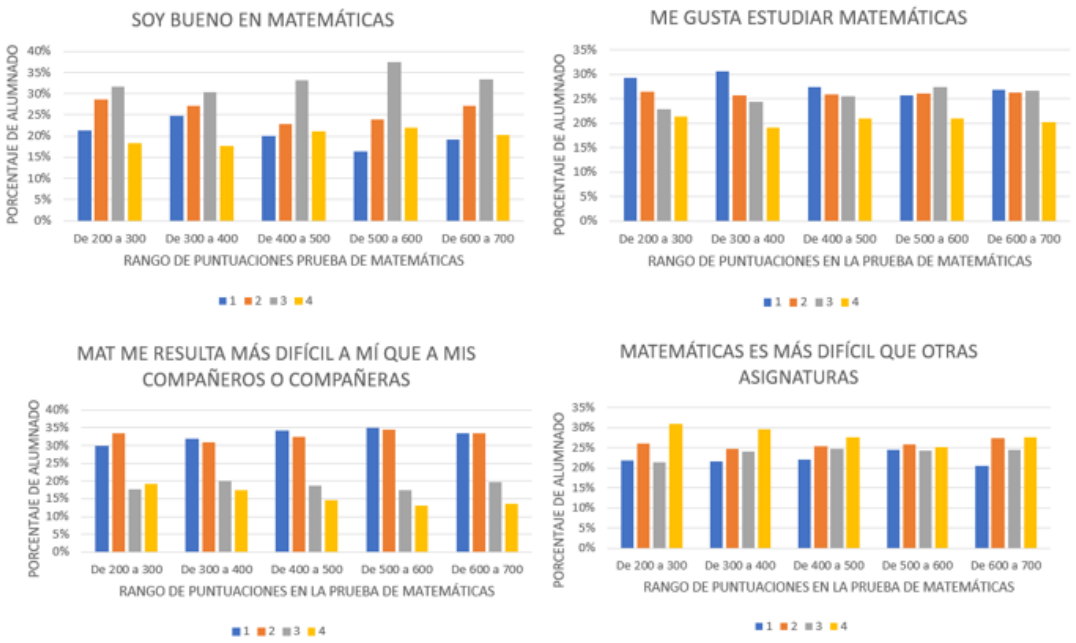


Imagen 2. ED2023 CANARIAS. Fuente: ACCUEE

El estudio realizado en el marco de PISA 2022 (INEE, 2023) abordó la ansiedad, la autoeficacia y la mentalidad de crecimiento en relación con las matemáticas (Imagen 3).

ANSIEDAD	AUTOEFICACIA	MENTALIDAD DE CRECIMIENTO
Para medir la ansiedad del alumnado ante las matemáticas, PISA 2022 preguntó en el cuestionario de contexto del estudiante si estaban de acuerdo ("totalmente de acuerdo", "de acuerdo", "en desacuerdo" o "totalmente en desacuerdo") con las siguientes seis afirmaciones: • A menudo me preocupa tener dificultades en las clases de Matemáticas. • Me estreso mucho cuando tengo que hacer deberes de Matemáticas. • Me pongo muy nervioso cuando hago problemas de Matemáticas. • Me siento incapaz de resolver un problema de Matemáticas. • Me preocupa sacar malas notas en Matemáticas. • Me da miedo suspender Matemáticas.	Con el fin de medir la autoeficacia en matemáticas asociada al razonamiento matemático y las habilidades necesarias para el siglo XXI1, PISA 2022 preguntó en el cuestionario de contexto del alumnado si estaba seguro ("muy inseguro", "inseguro", "seguro" o "muy inseguro") con las siguientes diez afirmaciones: • Extraer información matemática a partir de diagramas, gráficos o simulaciones. • Interpretar soluciones matemáticas en problemas de la vida real. • Utilizar el concepto de variación estadística para tomar una decisión. • Identificar los aspectos matemáticos de un problema real. • Identificar las limitaciones y los supuestos en los que se basan los modelos matemáticos. • Representar una situación matemáticamente usando variables, símbolos o diagramas. • Evaluar la importancia de los patrones observados en los datos. • Codificar o programar ordenadores. • Trabajar con sistemas informáticos matemáticos (p. ej., hojas de cálculo, software de programación, calculadoras gráficas). • Calcular las propiedades de un objeto de forma irregular.	PISA 2022 preguntó a los estudiantes si estaban de acuerdo ("totalmente de acuerdo", "de acuerdo", "en desacuerdo" o "totalmente en desacuerdo") con la siguiente afirmación: • Tu inteligencia es algo tuyo que no puedes cambiar demasiado.

Imagen 3. PISA 2022. Informe Español.Fuente: *https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/pisa-2022-programa-para-la-evaluacion-internacional-de-los-estudiantes-informe-espanol_183950/*

Según los hallazgos de PISA 2022, se observó una asociación negativa entre el rendimiento en matemáticas y la ansiedad matemática en todos los sistemas educativos participantes. Es decir, aquellos estudiantes con mayor ansiedad matemática tendían a obtener peores resultados en esta competencia. Esto subraya la importancia de abordar la ansiedad en el contexto de la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, se encontró que la autoeficacia en matemáticas, relacionada con el razonamiento matemático y las habilidades para el siglo XXI, tiene un impacto significativo en el rendimiento. Por cada punto de incremento en este índice, en España se ganan 18 puntos de rendimiento en promedio en la competencia matemática. Del mismo modo, por cada punto en el índice de mentalidad de crecimiento, se ganan 7 puntos de rendimiento en matemáticas en el contexto español.

Considerando estos resultados, es crucial reconocer que el abordaje de la dimensión socioafectiva en el aula de matemáticas no solo contribuye al bienestar emocional de los estudiantes, sino que también puede tener un impacto significativo en su rendimiento académico.

2. Dimensión socioafectiva en clase de matemáticas

En el aula de matemáticas, a menudo nos encontramos con la sensación de que esta disciplina puede complicar la comunicación y generar cierto distanciamiento emocional ya que existe un rechazo generalizado en la sociedad cuando en nuestra conversación o discurso puede intuirse cualquier alusión a las Matemáticas. Es común que los estudiantes enfrenten dificultades al tratar de comprender conceptos matemáticos. En ocasiones, incluso se evita el uso de los términos o conceptos matemáticos en la comunicación para hacernos entender. La inclusión de la dimensión Socioafectiva en el currículo de Matemáticas, entendida como sentido de los saberes y como competencia específica, no solo trata de hacer que los estudiantes comprendan mejor los conceptos, sino también de fomentar un ambiente de aprendizaje en el que se sientan seguros y motivados para explorar las matemáticas.

Analizando la estructura del currículo de Matemáticas, es crucial reflexionar sobre la importancia de integrar la dimensión Socioafectiva como una competencia específica. La inclusión de aspectos emocionales y sociales en el aprendizaje de las matemáticas es relevante pues, por todo lo indicado, puede mejorar la motivación de los estudiantes, promover un sentido de pertenencia en el aula y desarrollar habilidades importantes para la vida, como la resiliencia y la empatía (Gómez Chacón, 2000).

Los docentes debemos ser conscientes de que nuestra formación en esta disciplina ha moldeado nuestra personalidad, nuestra forma de enfrentarnos a los problemas y nuestra gestión del fracaso y el éxito. En definitiva, los aspectos socioemocionales han estado presentes a lo largo de todo nuestro estudio de las matemáticas y, no va a ser menos en el caso de nuestros estudiantes. Reflexionar sobre nuestros procesos socioemocionales con las matemáticas nos van a ayudar a comprender y acompañar en estos mismos procesos a nuestros estudiantes.

En definitiva, debemos desarrollar en nuestros estudiantes la “paciencia intelectual”, es decir, la capacidad para gestionar la ansiedad y disfrutar del proceso de resolución de problemas es fundamental para el éxito académico y personal de los estudiantes. Lo que se conoce bajo la denominación de "flow" que, según Mihaly Csikszentmihalyi (1990), es el “momento en el que no eres consciente del paso del tiempo porque estás tan inmerso en una tarea y la disfrutas tanto que no eres capaz de pensar en nada más”, ofrece pautas para mejorar la experiencia de aprendizaje en el aula de matemáticas, buscando el equilibrio entre el reto propuesto y la habilidad con la que cuentan los estudiantes. El desarrollo de estrategias didácticas que fomenten este estado de flujo puede aumentar la motivación y el compromiso de los estudiantes con la materia (Imagen 4).

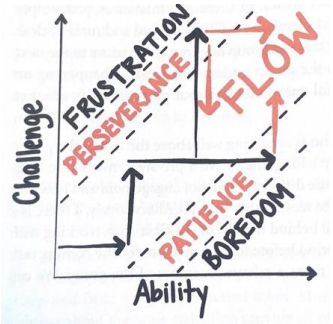


Imagen 4. Flow en matemáticas. Fuente: Liljedahl (2020)

En este sentido, la relación entre cognición y afecto en la resolución de problemas matemáticos juegan un papel de especial relevancia. Los docentes tenemos el reto de que nuestros estudiantes tomen consciencia y control emocional de cara a mejorar su capacidad para resolver problemas de manera efectiva. Esto nos lleva a que debemos enseñarles a manejar la frustración y la alegría de manera constructiva durante este proceso de resolución de problemas.

En resumen, la inclusión de la dimensión Socioafectiva en el currículo de Matemáticas es fundamental para promover un aprendizaje significativo y duradero. Al considerar las emociones y las relaciones sociales en el aula de matemáticas, podemos crear un ambiente de aprendizaje enriquecedor que inspire a los estudiantes a explorar y disfrutar de esta disciplina tan importante.

3. El taller: Desarrollo de la competencia socioemocional en matemáticas

Este taller se enfoca en una reflexión y análisis sobre la inclusión de la dimensión socioafectiva en el currículo de matemáticas. Se exploran estrategias metodológicas acompañadas de instrumentos de evaluación con los que trabajaremos con nuestros estudiantes la gestión de su emoción ante tareas matemáticas.

Entre otros, se abordarán:

- **Estrategias Metodológicas e Instrumentos de Evaluación:** El taller aborda estrategias para evaluar la dimensión socioafectiva en el aula de matemáticas.

Actividad ejemplo 1:

¿Cómo evaluar el criterio de evaluación 9.1 de currículo de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria?

Criterio 9.1

Identificar las emociones, seleccionando las fortalezas y debilidades propias, y desarrollar el autoconcepto matemático con estrategias de autoconocimiento y autoeficacia para fortalecer la resiliencia, proteger la

salud mental y mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos. (Decreto 30/2023, p. 16045)

Desglosamos los indicadores que aparecen en dicho criterio y los ordenamos de forma que cada uno de ellos se consigue con los anteriores.

Por ejemplo:

- Identificar emociones
- Identificar fortalezas y debilidades
- Mantener una actitud proactiva ante nuevos retos.
- Proteger la salud mental
- Desarrollar el autoconcepto con estrategias de autoconocimiento y autoeficacia

Un ejemplo de cómo trabajarlo y evaluarlo sería:

Durante un reto, problema o actividad matemática en el aula incluimos una autoevaluación como esta:

4: Muy de acuerdo					X	
3: Bastante de acuerdo			X			
2: Poco de acuerdo		X		X		X
1: Nada de acuerdo	X					
	Me siento bien cuando afronto un problema	Me siento seguro al expresar mis ideas al grupo	Soy capaz de influir positiva-mente en el trabajo con los compañeros y compañeras	Siento que he aportado para llegar a la solución del problema	Me siento bien cuando llego a la solución correcta del problema	Tener mal la solución lo veo como una oportunidad para aprender

- **Estructura Cooperativa:** El taller se desarrolla con una estructura cooperativa, fomentando la participación activa del profesorado asistente. Se promueve el trabajo en equipo y la colaboración entre los docentes para compartir experiencias y mejores prácticas en la enseñanza de las matemáticas.

- **Reflexiones Diarias y Propuestas de Cambio:** Se invita a los participantes a reflexionar sobre su trabajo cotidiano en el aula y a proponer cambios en la metodología docente para motivar el aprendizaje. Se discuten estrategias para crear un ambiente de aprendizaje positivo y alentador que promueva el desarrollo socioafectivo de los estudiantes.

- **Medición de la Dimensión Socioafectiva:** Se busca responder a la pregunta: ¿cómo medir lo que los estudiantes han aprendido en relación con la dimensión socioafectiva?

- **Superar Obstáculos Detectados:** Se exploran herramientas para superar los obstáculos identificados en la evaluación socioafectiva de los estudiantes. Se discuten estrategias para abordar la resistencia al cambio y para fomentar la participación activa de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje.

- **Papel de las Evaluaciones Externas:** Se destaca la relevancia de las evaluaciones externas en el proceso educativo, especialmente en la dimensión socioafectiva en el aula de matemáticas. Se discute cómo los resultados de estas evaluaciones pueden informar la práctica docente y contribuir al desarrollo de estrategias efectivas para mejorar el aprendizaje socioafectivo de los estudiantes.

En resumen, este taller ofrece una oportunidad para reflexionar sobre la importancia de la dimensión socioafectiva en el currículo de matemáticas y para explorar estrategias prácticas para integrarla de manera efectiva en el aula. Al promover un enfoque holístico, la integración de la dimensión socioafectiva en el currículo de

matemáticas puede potenciar tanto el bienestar emocional como el rendimiento académico de los estudiantes.

Agradecimiento

Proyecto de innovación educativa ProyectaMates, financiado por el Ilustrísimo Cabildo Insular de Tenerife.

Referencias

Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes (2023). Decreto 30/2023, de 16 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educaicón Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias, núm. 58*, de 23 de marzo de 2023, pp. 15322-17274.

Csíkszentmihályi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. Harper and Row.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes. Informe Español*. Secretaría General Técnica. MEFPD.

Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning.* Corwin Mathematics.

Los dados de James Grime

Couchoud Pérez, Juan Manuel
juan.manuel.couchoud@gmail.com
IES Vall de la Safor de Villalonga (Valencia)

Ferrer Fayos, María José
majofefa02@gmail.com
IES Gregori Maians de Oliva (Valencia)

García Pedro, Josefa
pepa.garcia.pedro@gmail.com
IES María Ibars de Dénia (Alicante)

Mezquida Chesa, Julia
julia.mezquida.chesa@gmail.com
sección del IES Enric Valor de Orba (Alicante)

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación secundaria obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

En este taller practicarás una experiencia de aula con los dados de James Grime. Apreciarás cómo cambian las decisiones cuando se toman por intuición, por experimentación y por cálculo de probabilidades, comparando nuestros resultados con los obtenidos en un grupo-clase. Buscamos concienciar al alumnado en la idea de que las apuestas en los juegos pueden ser peligrosas. Esta situación de aprendizaje está situada en la unidad didáctica de probabilidad y estadística. Es experimental, colaborativa e inclusiva, permitiendo que sea el grupo-clase quien consiga los resultados globales. Destinado para cualquier curso de ESO, aunque fácilmente se podría adaptar a otros niveles tanto de Educación Primaria como de Bachillerato.

Palabras clave: Experiencia de aula, James Grime, dados no transitivos, frecuencia y probabilidad.

DESARROLLO DEL TRABAJO

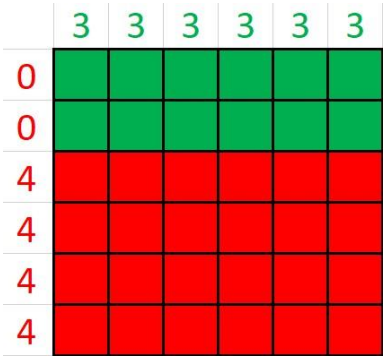
1. Introducción

Entre los juegos de azar conocemos el juego “piedra, papel, tijeras” que es claramente no transitivo, pero es muy difícil observar esta propiedad en otros juegos resultando fácil engañar a los humanos con ellos (Parker, 2020) porque nos cuesta muchísimo evaluar probabilidades (Grima, 2023). Existen juegos con monedas (Parker, 2020), ruletas, cartas y muchos otros de dados (Fernández, Hans, Muñoz, 2016) que permiten experimentar con esta propiedad. Nos centraremos en un juego con dados hexaédricos equiprobables que resultan fáciles de construir. En nuestro caso hemos comprado dados de colores de un centímetro y medio de arista y hemos pintado los números de las caras con rotulador permanente.

Asociaremos a los dados números naturales con el valor de las caras ordenadas, los dados del parchís se representan por el número 123456, un dado con las caras 0, 5, 5, 5, 5 y 5 lo representaremos como 055555 con el cero delante para indicar que tiene seis caras. Existen juegos con tres dados (Nrich, s.f.) 116688, 224499 y 335577 donde el primero gana al segundo con una probabilidad de 5/9, el segundo al tercero con una probabilidad de 5/9 y curiosamente es el tercero el que gana al primero con la misma probabilidad. Tenemos los cuatro dados de Efron, posible precursor de estas ideas (Morales, 2009) 004444, 333333, 222266 y 111555 en que cada dado gana al siguiente y el último al primero con probabilidades de 2/3, podéis experimentar con estos dados en forma de ruleta en internet (Losada, 2023). No necesariamente las probabilidades de ganar unos dados a otros son iguales, en los dados de Grime (Grime, s.f.; Parker, 2020) 444449, 333388, 222777, 115555 y 055555 las probabilidades de ganar al siguiente dado y el último al primero son iguales o superiores a 2/3.

Para calcular las probabilidades se pueden realizar tablas de doble entrada con colores (Grima, 2023; El hombre de los dados, 2006; Morales, 2009) o letras (Fernández, Hans, Muñoz, 2016). También utilizamos tablas de probabilidad de doble

entrada que presentan todas las probabilidades de ganar de unos dados a otros (Fernández, Hans, Muñoz, 2016) permitiendo la construcción de los grafos dirigidos donde observar la no transitividad del juego (Grime, s.f.; Parker, 2020).

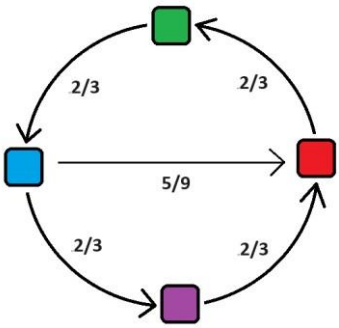


La probabilidad de que el dado 004444 gane a 333333 es de 24/36.

La probabilidad de que el dado 333333 gane a 004444 es de 12/36.

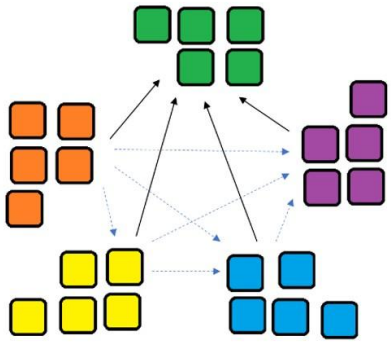
Dados ganadores \ Dados perdedores	004444	333333	222266	111555
004444	0	**2/3**	4/9	1/3
333333	1/3	0	**2/3**	1/2
222266	5/9	1/3	0	**2/3**
111555	**2/3**	1/2	1/3	0

Observamos todas las probabilidades.



Grafo dirigido y ponderado con las probabilidades de ganar a otro dado.

La experiencia de aula la realizamos con los dados de Grime, un dado de cada color, pero es posible repetir la experiencia con parejas, tríos y más dados, obteniendo grafos diferentes. Es curioso que con 5 o más dados, exceptuando el caso de 9, el juego se vuelve transitivo. ¿Será que nuestra intuición conecta con una visión más general y no con los primeros casos particulares?



Se observa claramente que los dados naranjas ganan a todos y los verdes pierden.

2. Objetivos, competencias específicas y criterios de evaluación

Los juegos de azar tienen una doble cara, por una parte, son una herramienta fantástica para aprender y relacionarse, pero por otra pueden provocar ludopatía e individualismo. En una sociedad tan permisiva con las apuestas en los juegos de azar, las matemáticas pueden ayudar con todo su potencial a comprender los peligros que estos juegos conllevan.

A continuación, enumeramos las competencias específicas (C. específica) y los criterios de evaluación (C. evaluación) relacionados con esta situación de aprendizaje (Currículo de ESO de la Comunidad Valenciana, 2022).

C. específica 1. **Resolución de problemas.**

Resolver problemas relacionados con situaciones diversas del ámbito social y en la iniciación a los ámbitos profesional y científico utilizando estrategias formales, representaciones y conceptos que permitan la generalización y abstracción de las soluciones.

C. evaluación 1.2. Resolver problemas sencillos del ámbito social o de iniciación a los ámbitos profesional y científico movilizando de manera adecuada y justificada los conceptos y procedimientos necesarios.

C. específica 2. **Razonamiento y conexiones.**

Explorar, formular y generalizar conjeturas y propiedades matemáticas, haciendo demostraciones sencillas y reconociendo y conectando los procedimientos, patrones y estructuras abstractas implicados en el razonamiento.

C. evaluación 2.2. Validar informalmente algunas conjeturas sobre propiedades o relaciones matemáticas adecuadas al nivel madurativo, cognitivo y evolutivo del alumnado, a partir de casos particulares.

C. específica 3. **Modelización.**

Construir modelos matemáticos generales utilizando conceptos y procedimientos matemáticos funcionales con el fin de interpretar, analizar, comparar, valorar y hacer aportaciones al abordaje de situaciones, fenómenos y problemas relevantes en el ámbito social y en la iniciación a los ámbitos profesional y científico.

C. evaluación 3.2. Seleccionar información relevante, identificar conceptos matemáticos, patrones y regularidades en situaciones o fenómenos reales y, a partir de ellos, construir modelos matemáticos concretos y algunos generales, empleando herramientas algebraicas y funcionales básicas.

C. evaluación 3.3. Analizar, interpretar y hacer predicciones sobre situaciones o fenómenos reales a partir del desarrollo y tratamiento de un modelo matemático.

C. específica 4. **Pensamiento computacional**.

Implementar algoritmos computacionales organizando datos, descomponiendo un problema en partes, reconociendo patrones y empleando lenguajes de programación y otras herramientas TIC como soporte para resolver problemas y afrontar desafíos del ámbito social y de iniciación a los ámbitos profesional y científico.

C. evaluación 4.4. Analizar situaciones de cierto nivel de complejidad en juegos de lógica o de tablero abstractos, estudiando las alternativas para tomar la decisión más adecuada, o determinar la estrategia ganadora, en caso de existir.

C. específica 5. **Representaciones**.

Manejar con precisión el simbolismo matemático haciendo transformaciones y conversiones entre representaciones icónico-manipulativas, numéricas, simbólicoalgebraicas, tabulares, funcionales, geométricas y gráficas que permitan pensar matemáticamente sobre situaciones del ámbito social y de iniciación a los ámbitos profesional y científico.

C. evaluación 5.1. Manejar las representaciones icónico-manipulativas, numéricas, simbólico-algebraicas, tabulares, funcionales, geométricas y gráficas de objetos matemáticos respetando las reglas que las rigen.

C. evaluación 5.2. Realizar conversiones, en al menos una dirección, entre las representaciones icónico-manipulativas, numéricas, simbólico-algebraicas, tabulares, funcionales, geométricas y gráficas de objetos matemáticos.

C. específica 6. **Comunicación**.

Producir, comunicar e interpretar mensajes orales y escritos complejos de manera formal, empleando el lenguaje matemático, para comunicar e intercambiar ideas generales y argumentos sobre características, conceptos, procedimientos y resultados relacionados con situaciones del ámbito social y de iniciación a los ámbitos profesional y científico.

C. evaluación 6.1. Interpretar correctamente mensajes orales y escritos relativos al ámbito social que incluyan informaciones con contenido matemático.

C. evaluación 6.2. Comunicar ideas matemáticas introduciendo aspectos básicos del lenguaje formal.

C. evaluación 6.3. Explicar y dar significado matemático a resultados provenientes de situaciones problemáticas del ámbito social.

C. específica 7. **Relevancia social, cultural y científica**.

Conocer el valor cultural e histórico de las matemáticas e identificar sus aportaciones en los avances significativos del conocimiento científico y del desarrollo tecnológico especialmente relevantes para abordar los desafíos con los que se enfrenta actualmente la humanidad.

C. evaluación 7.4. Apreciar el carácter universal de las matemáticas, por su versatilidad, su lenguaje propio y su funcionalidad.

C. específica 8. **Gestión de las emociones y de las actitudes**.

Gestionar y regular las emociones, creencias y actitudes implicadas en los procesos matemáticos, asumiendo con confianza la incertidumbre, las dificultades y los errores que dichos procesos conllevan, y regulando la atención para lograr comprender sus propios procesos de aprendizaje y adaptarlos con éxito a situaciones variadas.

C. evaluación 8.1. Gestionar las emociones, las actitudes y los procesos cognitivos implicados al enfrentarse a situaciones de aprendizaje complejas relacionadas con las matemáticas.

C. evaluación 8.2. Desarrollar creencias favorables hacia las matemáticas y hacia las propias capacidades en el quehacer matemático, tanto de carácter individual como en el trabajo colaborativo.

C. evaluación 8.3. Transformar los errores en oportunidades de aprendizaje y encontrar vías para evitar el bloqueo en situaciones problemáticas y del trabajo matemático, así como en la gestión del trabajo en equipo.

3. Taller, desarrollo de la experiencia de aula

Presentación del taller (5 min)

Explicación del desarrollo del taller, reparto del material a los asistentes (dossier con las actividades y un juego de dados de Grime). Los asistentes se distribuirán en parejas o tríos para realizar las tareas encomendadas. En el aula la comunicación de los resultados al resto de la clase es de forma directa, pero en el taller la asistencia es impredecible y hemos optado por la comunicación informática de los resultados, usando los móviles de los asistentes. Cada tarea tiene una pequeña batería de preguntas para ayudar al alumnado. Se trata de una situación de aprendizaje muy experimental y colaborativa, se necesita de la participación de todo el alumnado para poder llegar a conclusiones importantes en poco tiempo, lo que la hace muy integradora dado que todos los resultados tienen la misma importancia.

La intuición (Tarea 1, 10 min)

El juego se desarrolla con dos jugadores, cada uno selecciona uno de los 5 dados de Grime, los lanzan y gana el que obtenga mayor resultado. Los participantes utilizando su intuición, analizan las características de los dados y las posibilidades que tienen de ganar poniendo en común sus análisis en una tabla donde observar las diferentes intuiciones de los asistentes. Esta tarea tiene trampa, pero pediremos a los asistentes que piensen como si fueran sus alumnos.

La frecuencia relativa como aproximación a la probabilidad (Tarea 2, 15 min)

Con 5 dados tenemos 10 posibles combinaciones de parejas que serán distribuidas entre los grupos de asistentes para poder realizar en poco tiempo un estudio completo que será puesto en común para razonar el comportamiento del juego.

La probabilidad (Tarea 3, 15 min)

El alumnado conoce que con pocos experimentos es difícil llegar a conclusiones fiables, es ahora cuando la teoría de probabilidades nos ayudará a mejorar las decisiones, se observará el comportamiento de los dados desde una visión más teórica y fiable.

Representación de grafos (Tarea 4 y 5, 15 min)

Las tablas numéricas no proporcionan una visión completa de juego, pero existen otras representaciones como los grafos dirigidos que permiten visualizar en un instante el comportamiento de los dados. Los asistentes construirán estos grafos.

Cambios sutiles en las normas de juego (Tarea 6, 15 min)

¿El estudio de un juego se puede generalizar a otros similares? ¿Si jugamos con parejas de dados ganando la suma mayor, podemos utilizar las mismas conclusiones? Utilizando tablas de probabilidad los asistentes construirán grafos dirigidos y estudiarán los nuevos comportamientos al utilizar parejas de dados del mismo color.

¿Quién es James Grime? (Tarea 7, 5 min)

Una actividad que dejamos para casa al alumnado, buscar información para que conozcan a James Grime.

Preguntas (10 min)

Conclusión: Esperamos contribuir a que nuestro alumnado tenga un poco más claro que estudiar los juegos de azar mejora la competencia matemática, pero apostar mejora la ludopatía. Somos muy fáciles de engañar.

REFERENCIAS

Currículo de ESO de la Comunidad Valenciana (5 de agosto de 2022). «Anexo III currículo de las materias comunes y de opción de ESO. Matemáticas», *Decreto 107/2022, de 5 de agosto, del Consell, por el que se establece la ordenación y el currículo de Educación Secundaria Obligatoria*. DOGV Num 9403 de 11 de agosto de 2022, 42646-42675 https://dogv.gva.es/datos/2022/08/11/pdf/2022_7573.pdf

Fernández, A., Hans, J. y Muñoz, J. (15 de julio de 2016). *Juegos de azar no transitivos*, DivulgaMAT, *https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id*

=17315:julio-2016-juegos-de-azar-no-transitivos&catid=77:juegos-matemcos&Itemid=48

Giarrizo, A. (2021). «Dados no transitivos. Juegos y regularidades numéricas», *Épsilon – Revista de Educación Matemática*, n.º 109, 65-74, http://funes.uniandes.edu.co/31251/1/Mirta2021Dados.pdf

Grima, C. (18 de mayo de 2023). *Tengo unos dados (no transitivos) y no dudaré en ganarte*, RTVE Play, https://www.rtve.es/television/20230518/calculo-probabilidades-juegos-azarclara-grima-matematica-viene-a-verte/2447327.shtml

Grime, J. (s.f.). *Non-transitive Dice*. Singinbanana, *http://singingbanana.com/dice/article.htm*

El hombre de los dados (15 de diciembre de 2006). *Dados no transitivos*, https://dados.wordpress.com/2006/12/15/dados-no-transitivos/

Losada R. (4 de diciembre de 2023). *Los dados no transitivos de Efron y de Quimby*, GeoGebra, https://www.geogebra.org/m/u8gFwdZP#material/k5mc9syb

Morales, M. (3 de noviembre de 2009). *Esos curiosos dados*, Gaussianos, https://www.gaussianos.com/dados-no-transitivos/

Nrich, (s.f.). *Non-transitive Dice*, The NRICH Project, University of Cambridge, *https://nrich.maths.org/7541*

Parker, M. (2020). «Capítulo 7 Probabilidad y error. Monedas y dados al aire», *π-fias matemáticas*, Crítica, Barcelona, 192-199

El comic como recurso en el aula de matemáticas

Fraile Rey, Arantzazu (1)

arantzazu.fraile@uah.es

Universidad de Alcalá. Departamento de Física y Matemáticas

Martínez-Ortiz, Pedro A. (2)

pa.martinezortiz@edu.gva.es

IES María Blasco (San Vicente del Raspeig), Universidad de Alicante. Facultad de Educación

Herrera Becerra, María (3)

maria.herrerab@edu.uah.es

Universidad de Alcalá. Facultad de Filosofía y Letras

Sáez de Adana, Francisco Manuel (4)

kiko.saez@uah.es

Universidad de Alcalá. Departamento de Ciencias de la Computación

Núcleo temático: Recursos para el aula. Formación del profesorado

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Universidad

RESUMEN

El cómic no sólo se lee, se explora y en este taller vamos más allá: el cómic se crea, se lee y se explora. Reflexionamos sobre la utilidad del cómic como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y tomamos conciencia de que todos somos capaces de crear un cómic para explotar la alegría del dibujo y el rigor de los argumentos. Exploramos las herramientas disponibles para la creación de cómic y las posibilidades de la IA.

Palabras clave: cómic, recurso didáctico, formación de maestros, formación continua, inteligencia artificial.

1. Propósitos del taller.

Con el desarrollo de este taller se pretende:

- Reflexionar sobre la utilidad del cómic como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Involucrar a los participantes en la construcción de una viñeta, tira o breve cómic donde evidenciaremos que todos somos capaces de transmitir contenidos matemáticos a partir de un cómic
- Analizar las producciones de alumnos de secundaria, bachillerato y universidad en formación como profesorado de educación primaria y secundaria para observar las posibilidades que ofrece el cómic como herramienta de aprendizaje de contenidos matemáticos y desarrollo de las habilidades de lecto-escritura y capacidad analítica.

2. Descripción de las actividades y desarrollo del taller:

- **Un día en las JAEM en imágenes.**

Objetivo: narrar gráficamente el día de una persona o grupo de personas en la rejilla que se les proporcionará (ver anexo).

Reglas que seguir durante la actividad:

- Representar gráficamente un día o parte de un día de uno mismo o de otras personas en 12 imágenes, seleccionando los momentos que deben ir en cada una de las imágenes.
- No se puede usar texto. Cualquier elemento textual debe ser reemplazado por algún tipo de representación gráfica.
- Se debe mantener la estructura de 12 imágenes.

El objetivo didáctico de esta actividad es hacernos comprender a todos que tenemos capacidad para expresarnos gráficamente: hechos, ideas, conceptos, sentimientos, etc. Se trata de mostrar que no es necesario saber dibujar bien. Con esta actividad también tomamos conciencia de la secuencia temporal que acompaña no solo al relato de una historia, y que en el caso del comic termina ordenada en una misma página, sino al diseño y organización de una secuencia de enseñanza-aprendizaje.

Sobre las producciones de los asistentes y haciendo uso de la cámara de documentos comentaremos en grupo el potencial comunicativo del comic.

- **Mi primer comic matemático**

Objetivo: tomar un concepto matemático, elección libre por parte del grupo para que en función del nivel académico en el que imparten docencia o su experiencia decidan bloque de contenidos y epígrafe del currículo a trabajar, y dibujar una viñeta o tira corta para explicarlo.

Reglas que seguir durante la actividad: No hay límite de viñetas, considerar que tus personajes son lo que hacen, no lo que dicen (es decir, intentar utilizar únicamente el texto imprescindible). Adaptar los personajes y el lenguaje gráfico a la etapa educativa seleccionada.

Sobre las producciones de los asistentes y haciendo uso de la cámara de documentos comentaremos en grupo el potencial comunicativo, las dificultades encontradas, etc.

- **Herramientas digitales para la creación de comics.**

Proporcionamos una selección y evaluación de herramientas digitales, incluidas aquellas que incorporan IA, que puede ser utilizadas en el aula. Se analiza en esta selección los aspectos de seguridad y privacidad de datos personales a tener en cuenta siempre que trabajamos con menores.

- Análisis de las producciones de alumnos de diferentes niveles educativos: secundaria-bachillerato y del grado de Magisterio Educación Primaria.

Referencias

Martínez, P.A. y Muller S. (2023). *Mathland: El enigma del Talismán Aritmético*. Ecc Ediciones.

El Sentido Socioafectivo en Educación Matemática. Identificación y acompañando Emociones, Actitudes y Creencias en el aula.

Rocío Garrido Martos
rocio.garrido@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Javier Rodríguez Miravalles
rodriguezmiravalles@gmail.com
Universidad Autónoma de Madrid

Andrea de la Fuente Silva
andrea.delafuente@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Ariadna Gómez-Escobar
ariadna.gomezescobar@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Grado en Maestro/a de Educación Primaria).

RESUMEN

Este taller sobre el sentido socioafectivo se centra en la importancia de entender y abordar las emociones, actitudes y creencias del alumnado en el entorno educativo, utilizando el triángulo para representar estos tres vértices de la dimensión afectiva. A través de actividades en grupo, los participantes identifican y distinguen entre

creencias, actitudes y emociones, explorando formas diferenciadas de acompañar estas expresiones afectivas en el aula. Se promueve la reflexión sobre la eficacia de las estrategias presentadas y se alienta a los docentes a integrar este enfoque de manera continua y significativa en su práctica educativa. Se espera que el taller inspire a los participantes a incorporar estos conceptos en la planificación de su currículo para el próximo año escolar.

Palabras clave: Sentido Socioafectivo, Creencias, Actitudes, Emociones

Introducción

Es ya un hecho que lo afectivo influye en el rendimiento en matemáticas. Numerosas investigaciones y evaluaciones internacionales, como el último PISA 2022 (OCDE, 2023), lo corroboran. Y, aunque en España, se venía abordando como bloque inicial y/o transversal, en la nueva reforma educativa en España, la LOMLOE, se ha integrado el sentido socioafectivo tanto como competencia como saber. Esto, que marca un cambio significativo, dándole un papel principal en el currículo, se hace sin una formación específica en cómo abordar este sentido en las aulas. El resultado es una recurrente crítica a lo que se debe trabajar.

Curricularmente, en la LOMLOE (2022):

> El sentido socioafectivo integra conocimientos, destrezas y actitudes para entender y manejar las emociones, establecer y alcanzar metas, y aumentar la capacidad de tomar decisiones responsables e informadas, lo que se dirige a la mejora del rendimiento del alumnado en matemáticas, a la disminución de actitudes negativas hacia ellas, a la promoción de un aprendizaje activo y a la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato indispensable. Para lograr estos fines, se pueden desarrollar estrategias como dar a conocer al alumnado el papel de las mujeres en las matemáticas a lo largo de la historia y en la actualidad, normalizar el error como parte del aprendizaje, fomentar el diálogo equitativo y las actividades no competitivas en el aula. Los saberes básicos correspondientes a este sentido deberían desarrollarse a lo largo de todo el currículo de forma explícita. (pp 142)

Dichos saberes básicos del sentido socioafectivo se dividen en tres bloques: i) Creencias, actitudes y emociones; ii) Trabajo en equipo y toma de decisiones; iii) Inclusión, respeto y diversidad. En este taller solo nos centraremos en el primero de ellos, ya que consideramos esencial para trabajar seriamente este sentido socioafectivo analizar la dimensión afectiva, contando con el conocimiento adecuado sobre las partes de las que consta dicha dimensión: creencias, actitudes y emociones y, por supuesto, estrategias de acompañamiento para abordarlas.

El **objetivo** de este taller es identificar adecuadamente las creencias, actitudes y emociones que caracterizan al alumnado y, proporcionar recursos para su acompañamiento. La estructura del taller será la siguiente:

Desarrollo y contenidos del taller

- Presentación del enfoque clásico de la dimensión afectiva: ¿Por qué es necesario conocer la dimensión afectiva? ¿Se trabaja igual con emociones, con actitudes y con creencias? ¿Trabajar la dimensión afectiva es que el alumnado esté "feliz"?

Nos adecuaremos a la definición clásica de McLeod (1989) y definiremos con ejemplos los tres vértices de nuestro triángulo de la dimensión afectiva (Ingram et al., 2020).

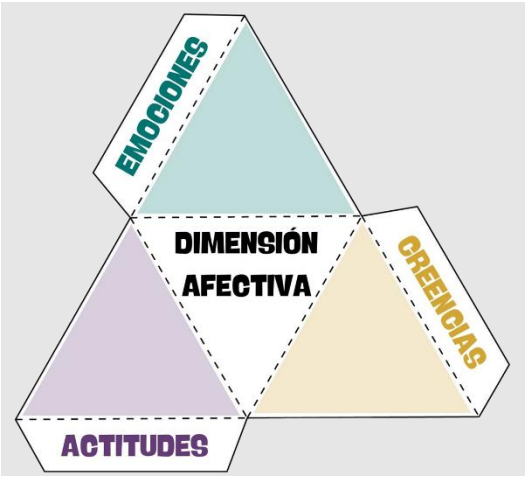


Imagen 1. Triángulo Dimensión Afectiva

Esta breve introducción teórica nos ayudará a clarificar el conocimiento del saber que se nos exige trabajar. Además, abordaremos también nuestras propias creencias sobre dicha dimensión abordándolo desde el conocimiento didáctico. Así, podremos canalizar la influencia de nuestras creencias a la hora de trabajar en el aula.

- Identificación de creencia, actitud y emoción: ¿Sabemos diferenciar? ¿Tienen alguna relación? ¿Qué viene antes la emoción, la actitud o la creencia?

En esta fase del taller repartiremos por grupos diferentes tarjetas con conceptos, situaciones de aula, frases, etc., para que los participantes identifiquen cada parte de nuestro triángulo.

- Acompañamiento diferenciado ¿Todas las emociones, actitudes y creencias están "permitidas", es decir, evaluamos lo que determinamos como "positivo"? ¿Qué es más complejo de acompañar? ¿Existen algunos recursos?

En esta fase, se propondrán ejemplos concretos de acompañamientos realizados y, se volverá a trabajar con los participantes para que creen tipos de acompañamiento a las tarjetas anteriormente identificadas.

- Reflexión y evaluación del taller: Se proporcionará un espacio para que el grupo de docentes reflexionen sobre la efectividad de estas propuestas presentadas. Animaremos a compartir sus experiencias y a colaborar en la identificación de otros casos en los que hayan tenido que trabajar con esta dimensión afectiva.

Al final del taller, queremos que los y las participantes se sientan motivados para incorporar este enfoque en su práctica docente de manera continua y significativa. Esperamos que las propuestas puedan servir para una posible incorporación a su programación el próximo año escolar.

Referencias

Ingram, N., Hatisaru, V., Grootenboer, P., Beswick, K. (2020). Researching the Affective Domain in Mathematics Education. En: J. Way, C. Attard, J. Anderson, J. Bobis, H. McMaster y K. Cartwright, K. (eds), Research in Mathematics Education in Australasia 2016–2019 (pp 147–175). Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4269-5_7

McLeod, D.B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. In: McLeod, D.B., Adams, V.M. (eds) Affect and Mathematical Problem Solving. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17

LOMLOE (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Educación Secundaria (BOE núm. 76).

OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/53f23881-en.

El Sentido Estocástico a través del juego. Claves y situaciones de aprendizaje concretas para introducirlas desde YA al principio de tu programación.

Andrea de la Fuente Silva
andrea.delafuente@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Rocío Garrido Martos
rocio.garrido@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Leyre Gilardi Olarrea
leyre.giraldi@estudiante.uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Javier Rodríguez Miravalles
rodriguezmiravalles@gmail.com
Universidad Autónoma de Madrid

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Grado en Maestro/a de Educación Primaria).

RESUMEN

El taller se centra en la enseñanza del Sentido Estocástico, resaltando su importancia y necesidad de una mayor inclusión en nuestras programaciones. Desde una

perspectiva de Aprendizaje Basado en el Juego, se explora cómo el juego proporciona experiencias “reales” y retroalimentación útil para el estudiantado. Se discute el potencial del juego para introducir conceptos matemáticos y se presentan estrategias para su implementación en el aula. Se muestra el diseño de un juego de mesa creado para enseñar probabilidad, junto con otros juegos comerciales y adaptaciones. A través de la participación activa, análisis y discusión, se busca motivar a los y las participantes a integrar el enfoque del juego de manera continua en su enseñanza. El taller también incluye una fase de reflexión y evaluación para compartir experiencias e identificar estrategias efectivas.

Sentido Estocástico, Probabilidad, Estadística, Juegos, Aprendizaje Basado en Juegos

1. Introducción

El curriculum actual establece seis grandes sentidos sobre los que se estructura la enseñanza de las matemáticas. En la práctica docente, el bloque de números tiene un mayor peso, relegando los sentidos estocástico y sociofectivo a posiciones menos destacadas. Aunque en el propio currículo se explicita que la disposición en la que aparece la descripción de estos sentidos no indica necesariamente ninguna prioridad en el orden de su enseñanza (LOMLOE, 2022), es importante seguir enfatizando en este hecho para garantizar una distribución equilibrada de los contenidos.

La literatura nos muestra como el Sentido Estocástico, antes conocido como bloque de Estadística y Probabilidad, al situarse el último lugar a tratar, por la densidad de currículo, en ocasiones no llega a impartirse por falta de tiempo. Además, la formación de los propios docentes es, en muchas ocasiones, escasa o nula (Arce et al., 2019). Esta realidad choca con la importancia de las habilidades y herramientas que se deben adquirir propias de este sentido. Comprender y enfrentarse a la incertidumbre en diversos contextos, capacidad de analizar datos, hacer predicciones basadas en probabilidades y tomar decisiones, tanto en la vida cotidiana como en disciplinas

académicas y profesionales, es fundamental para la era de la información en la que nos encontramos.

Para este taller hemos elegido EL JUEGO, desde una metodología de Aprendizaje Basado en el Juego (ABJ), que nos permite abordar el contenido matemático de forma experiencial. El alumnado busca estrategias para ganar el juego de las que reciben una retroalimentación. Cuando cometen errores, se reformulan y aprenden de ellos, convirtiendo el desafío en una oportunidad de aprendizaje (de la Fuente y Garrido-Martos, 2023)

Este taller pretende dar una vuelta al pensar habitual que se tiene acerca del sentido estocástico cuando lo conectamos con el juego. Si relacionamos estos dos temas se podría pensar que encajan bien los últimos días de clase, pero nuestro objetivo es ver la potencialidad del juego y de este bloque para introducir YA en lugares relevantes de nuestra programación. El juego se puede utilizar para introducir estos contenidos, experimentar y ayudar a conjeturar ideas, que después, se irán desarrollando y formalizando con el desarrollo de la secuencia posterior que se trabaje. Además, muchas de las habilidades propias que se delegan a este punto, pueden utilizarse como contexto para trabajar otros bloques de la matemática.

El **objetivo** de este taller es proporcionar recursos para reflexionar sobre la potencialidad de trabajar el sentido estocástico a través del juego. La estructura del taller será la siguiente:

2. Desarrollo y contenidos del taller

Presentación del enfoque a través del juego: ¿Por qué elegimos el juego? ¿Qué nos aporta jugar en matemáticas? ¿Se trabajan habilidades, competencias y/o contenidos? ¿Gamificamos o jugamos?

Se explicarán algunas de las claves para utilizar el Aprendizaje Basado en el Juego en clase de matemáticas: amplia variedad de juegos, equilibrio didáctico, cambio de roles, atención a la diversidad, reto vs frustración, no es un “simple juego” (de la Fuente y Garrido-Martos, 2023).

Esta breve introducción teórica nos ayudará a seleccionar los juegos en función de nuestros objetivos y realidad de aula (se pondrán ejemplos de juegos para concretar las explicaciones). Además, será muy útil para saber qué observar durante la fase de experimentación del juego.

Ejemplo de la creación de un juego para introducir probabilidad: ¿Qué elementos debe tener un juego? ¿Qué va a diferenciar un juego a una actividad (o a una actividad gamificada)? ¿Tiene alguna particularidad el juego cuando trabajamos el Sentido Estocástico?

En esta fase del taller explicaremos los aprendizajes derivados de la construcción de un juego de mesa para introducir la probabilidad. Para ello hemos utilizado los materiales más frecuentes en la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad: dados, urnas, ruleta y cartas. A estos elementos de azar le hemos incluido dinámicas, mecánicas y estéticas propias de los juegos para ofrecer una nueva situación de aprendizaje. El juego que se propone se llama Alerta Zorro y es cooperativo.

Brevemente, se explica en qué consiste el juego y cómo se trabaja la probabilidad: El objetivo es recolectar moras, rojas y negras. Se tienen que llenar las cuatro cajas con diez moras de ambos colores y taparlas para ganar. El zorro no lo pondrá nada fácil.

En cada turno, cada jugador lanzará el **dado** que indica una cantidad y el color de las moras que debe colocar en alguna de las cestas. Al finalizar su turno, el jugador coge una **carta** de acción del mazo. En este diálogo aparece la probabilidad informal, que nos ayudan a saber el nivel de razonamiento probabilístico intuitivo que presentan nuestros estudiantes. Estas decisiones se toman sabiendo que al zorro le gustan las moras negras.

La imagen 1 muestra uno de los momentos más divertidos y de mayor aprendizaje del juego: sale la carta de zorro. La **ruleta** indica al azar dos **cestas** en las que va a olfatear el zorro. La clave está en que el zorro es ciego. El grupo tiene que compararlas y darle al zorro la que más posibilidades de coger una mora negra se tenga. Las decisiones previas dónde colocar las moras y cómo utilizar las cartas de acción (quitar una mora, cambiar de cantidad, de color…) serán importantes para reducir las probabilidades de que el zorro coja una mora roja (¡se acabaría automáticamente el juego!). Aunque se siente una tensión en el ambiente cada vez que sale un zorro, es necesario que salgan para poder conseguir las tapas de las cestas. En este punto es dónde aparece la probabilidad clásica. Para ello, será necesario un buen manejo de la comparación de fracciones, conectando el razonamiento proporcional y probabilidad.

Imagen 1. Experiencias de juego en las que sale la carta de zorro.

Para poder responder a la pregunta habitual "¿Cómo jugar con toda una clase al mismo tiempo?", vamos a poner como ejemplo la experimentación de este juego, analizaremos los contenidos que se trabajan, el acompañamiento que hay que realizar y el potencial del propio juego dada su dinámica.

- Más ejemplos de juegos para el aprendizaje-enseñanza del Sentido

Estocástico: ¿Qué tipo de significados de la probabilidad se trabajan? ¿Hay juegos para trabajar estadística? ¿Cómo conectamos estadística y probabilidad? ¿Para qué niveles se pueden encontrar juegos? ¿Qué conocimientos previos se necesita? ¿Hay

posibilidad de encontrar juegos que no sean comerciales o que no tengamos que crearlos desde cero?

Se dará respuesta a estas preguntas y otras que vayan surgiendo a lo largo del taller. Además, para poder dar ejemplos concretos, se mostrará y jugará a tres juegos. Dos juegos son comerciales: Armadillo (Imagen 2) y Pass the Pigs (Imagen 3); y el otro es una adaptación de la conocida “Carrera de Caballos” (juego de papel, lápiz y dados) para cursos superiores. Esta fase del taller busca animar a los docentes a utilizar juegos como una oportunidad para que los estudiantes experimenten en diferentes situaciones reales. Se planteará que piensen en el posible diseño de secuencias de aprendizaje que incorporen estos juegos y destacará las conexiones de estos juegos como contexto para enseñar otros aspectos del currículo de matemáticas.

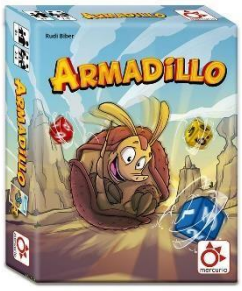


Imagen 2. Armadillo

Imagen 3. Pass the pigs

- Reflexión y evaluación del taller: Se proporcionará un espacio para que el grupo de docentes reflexionen sobre la efectividad de estas propuestas presentadas. Animaremos a compartir sus experiencias y a colaborar en la identificación de estrategias efectivas para incorporar el juego en su enseñanza.

Al final del taller, queremos que los y las participantes se sientan motivados para incorporar este enfoque en su práctica docente de manera continua y significativa. Esperamos que las propuestas puedan servir para una posible incorporación a su programación el próximo año escolar.

Referencias

Arce, M., Conejo, L. & Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Máster de Formación del Profesorado. Síntesis.

De la Fuente, A. & Garrido-Martos, R. (2023). Aprendizaje basado en juegos. En L. Cañadas y N. Hidalgo (Eds.), *Materiales docentes para el empleo de metodologías y procesos de evaluación formativa en la formación inicial de profesorado.* Dykinson. https://doi.org/10.14679/2310

LOMLOE (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Educación Primaria (BOE núm. 52).

Va de reto(s)

María M. Fernández Correa
mariafdzcorrea@gmail.com
IES Fernández Vallín (Gijón). SADEM Agustín de Pedrayes

Rubén Pérez Zamanillo
rubenpz@educastur.org
IES Mata Jove (Gijón). SADEM Agustín de Pedrayes

Núcleo temático: Recursos para el aula, Conexiones.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

El taller *Va de reto(s)* se compone de una colección de actividades que tienen como objetivo generar en el alumnado sensaciones positivas con respecto a las matemáticas a la vez que se trabajan las estrategias de resolución de problemas, se establecen conexiones entre los distintos saberes matemáticos y se desarrolla la creatividad y el ingenio.

El taller está organizado en cuatro actividades principales que, a su vez, se dividen en varias tareas, retos, juegos, acertijos y puzles.

Todas las actividades del taller se pueden llevar a cabo con unos materiales sencillos y asequibles.

Palabras clave: resolución de problemas, socio-afectividad, materiales, conexiones.

1. Introducción

El taller *Va de reto(s)* se compone de una colección actividades que tienen como objetivo generar en el alumnado sensaciones positivas con respecto a las matemáticas que les hagan ganar confianza cuando se enfrentan a un problema, de la naturaleza que sea, a la vez que se trabajan las estrategias de resolución de problemas y se establecen conexiones entre los distintos saberes matemáticos.

El título del taller es un juego de palabras que pretende dar alguna pista sobre su contenido: actividades de aula planteadas en forma de retos o juegos, en distintos formatos, a través de diversas formas de representación y haciendo uso de materiales y herramientas variadas.

Este taller tiene su origen en mi interés en cómo se desarrollaba el bloque I, sobre resolución de problemas, en el antiguo currículo.

Uno de los aspectos a los que presto una atención especial a la hora de enfrentarme a mis clases es que el alumnado se sienta cómodo y confiado, que disfrute, en la medida de lo posible, de la clase y que gane autonomía y confianza en sus propias capacidades.

Durante varios cursos he implementado las actividades del taller en el aula, lo que me ha permitido ir mejorándolas año tras año, detectando los aspectos que no funcionaban, para corregirlos, y también los que funcionaban bien, para potenciarlos.

Esta experiencia, junto con otras que he desarrollado en mis clases a lo largo de estos últimos años, me ha permitido apreciar el valor de una de las variables implicadas en el desarrollo de actividades en el aula a la que, quizás, no le prestamos demasiada atención: la sencillez de los materiales necesarios para desarrollar la actividad. Este taller tiene unos requerimientos previos muy sencillos y austeros, asequibles como palillos o botones. Los alumnos y alumnas sólo necesitan cosas básicas y de las que prácticamente todos disponen (bolígrafo, calculadora, regla, tijeras, pegamento).

Otro aspecto que me gustaría destacar es el de las conexiones. Las actividades del taller, además de atender al entrenamiento en la resolución de problemas, pretenden poner de manifiesto las conexiones entre los distintos saberes matemáticos, y proponer al alumnado tareas en las que deban hacer uso de esas conexiones.

Por último, algunos de los textos de las tareas están redactados en inglés con el objetivo de contribuir al desarrollo de la competencia plurilingüe del alumnado. Son textos breves y sencillos, con un vocabulario y una gramática que se estudia en la ESO, que pretenden ayudar a que el alumnado se sienta cómodo y confiado a la hora de trabajar en otro idioma que no es el propio.

2. Las actividades del taller

El taller se compone de cuatro actividades: Mates por los ojos, Witty Halloween, Asuntos Geométricos y Puzles.

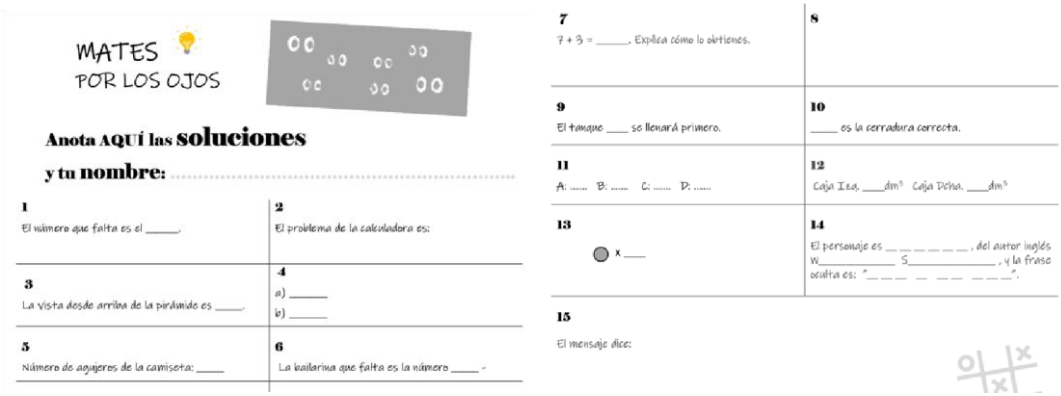
2.1. Mates por los ojos

Actividad para desarrollar en una o dos sesiones a comienzo de curso. Puede servir, por la variedad de las matemáticas implicadas y las tareas propuestas, como evaluación inicial y también para mostrar al alumnado el tipo de tareas que se van a encontrar a lo largo del curso y la forma de trabajo que pretendo desarrollar en ellos. Esta tarea consiste en la resolución de quince problemas visuales y puede desarrollarse en una o dos sesiones. Los enunciados se proyectan en la pantalla en dos turnos para dar al alumnado una doble oportunidad de resolver cada problema y también de comprobar si sus soluciones son correctas y/o coherentes.

Las tareas planteadas recorren la mayor parte de las matemáticas que los alumnos han visto en cursos anteriores y tienen una presentación diversa.

Algunas de ellas se pueden resolver con un giro o una simetría, otras ponen en práctica el cálculo mental y el buen uso de la calculadora.

También hay tareas relacionadas aspectos geométricos, algebraicos y con el sentido de la medida, además de otras en las que se practica el reconocimiento de patrones y distintas estrategias de resolución de problemas.



Imágenes 1 y 2: Ficha de trabajo alumno/a *Mates por los ojos*

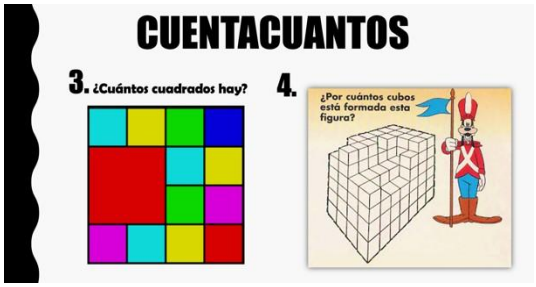
2.2. Witty Halloween.

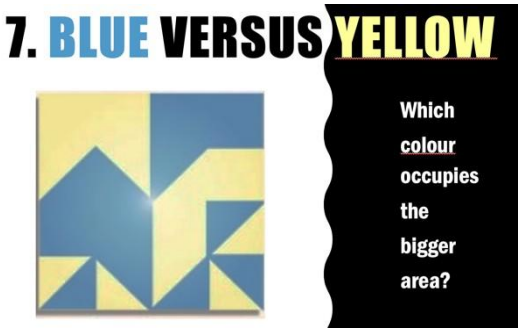
Tarea esencialmente manipulativa diseñada para integrarse dentro de las actividades que, con motivo de la fiesta de Halloween, se suelen desarrollar en los centros educativos, pero con pleno sentido al margen de dicha celebración. Consiste en cuatro retos con palillos de dificultad creciente, dos actividades de observación y una de cálculo mental y álgebra planteada a partir de una imagen.

Imágenes 3 y 4: Fichas de trabajo alumno/a *Witty Halloween*

2.3. Asuntos Geométricos

Esta actividad tiene ciertas similitudes con la de *Mates por los ojos* en cuanto a su estructura, pero dándole más protagonismo a los sentidos espacial y de la medida y haciendo uso de materiales manipulativos.





Imágenes 5 y 6: Alguno de los retos de *Asuntos geométricos*

2.4. Puzles

Aquí se incluyen varios tipos de puzles que pueden llevarse al aula a lo largo de todo el curso y trabajarse de manera independiente o combinada.

2.4.1. Figuras ocultas

En esta tarea los alumnos deben recortar las piezas de un tangram, disponerlas de modo que queden pegados los lados con expresiones equivalentes y descubrir qué figura se oculta en la disposición final de las piezas. Hay varias versiones de este puzle: operaciones con números enteros, con potencias, fracciones y porcentajes, lenguaje algebraico y resolución de ecuaciones.

Imagen 7: Ficha de instrucciones *Figuras ocultas*

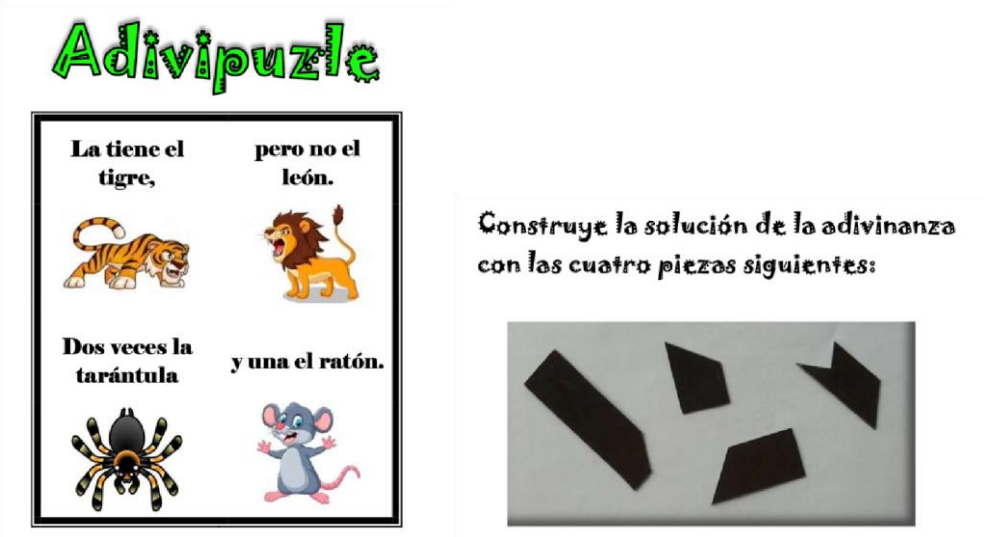
2.4.2. Dominó mágico

Se trata de construir un cuadrado mágico con las fichas de dominó proporcionadas.

Imagen 8: Ficha de alumno/a *Dominó mágico*

2.4.3. Adivipuzle

Combina el reconocimiento de patrones, a través de una adivinanza, con el reconocimiento de figuras geométricas planas y los movimientos en el plano.



Imágenes 9 y 10: Ficha de alumno/a *Adivipuzle*

2.4.4. Puzles imposibles

Estrategias de resolución de problemas a través de cuatro retos geométricos en el plano y en el espacio.

Imagen 11: Ficha de soluciones *Puzles imposibles*

3. Saberes básicos y criterios de evaluación

A continuación, se enumeran los saberes básicos y criterios de evaluación correspondientes al currículo de 2ESO que se trabajan en las actividades incluidas en el taller.

Dado que los criterios de evaluación y saberes básicos son los mismos para los tres primeros cursos de ESO, este taller podría llevarse a cabo en cualquiera de esos tres cursos, y es fácilmente adaptable a un curso de 4ESO.

3.1. Saberes básicos

3.1.1. Sentido numérico

Estrategias de cálculo mental con números naturales, enteros, fracciones y decimales. Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas. Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema. Patrones y regularidades numéricas.

3.1.2. Sentido de la medida

Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos. Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida. Longitudes y áreas en figuras planas: deducción, interpretación y aplicación. Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.

3.1.3. Sentido espacial

Figuras geométricas planas: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas. Patrones: observación en casos sencillos.

3.1.4. Sentido algebraico y pensamiento computacional

Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático. Comprensión del concepto de variable en sus diferentes naturalezas. Igualdad y desigualdad. Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones.

3.1.5. Sentido socioafectivo

Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje. Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

3.2. Criterios de evaluación

3.2.1. Competencia específica 1

Interpretar problemas matemáticos organizando los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas

3.2.2. Competencia específica 2

Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

3.2.3. Competencia específica 3

Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

3.2.4. Competencia específica 4

Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.

3.2.5. Competencia específica 5

Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.

3.2.6. Competencia específica 6

Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

3.2.7. Competencia específica 7

Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.

3.2.8. Competencia específica 8

Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

3.2.9. Competencia específica 9

Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

3.2.10. Competencia específica 10

Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados

4. Conclusiones

Uno de los objetivos principales de las actividades de este taller es entrenar al alumnado en la resolución de problemas, y que se enfrenten a ellos con confianza, gusto y, hasta con amor, disfrutando del proceso de reflexión que la resolución de un problema trae aparejado.

Otro, las conexiones. Más específicamente, las distintas formas de representar y comunicar las ideas, objetos y procedimientos matemáticos. El alumnado no solo debe conocer y conectar adecuadamente los distintos lenguajes matemáticos, también debe ser consciente de la necesidad de disponer de una forma consensuada de representar objetos y herramientas matemáticas, un lenguaje, el de Las Matemáticas, que es compartido por todos los seres humanos.

La experiencia de estos pasados años ha mostrado que estas actividades van en la buena dirección en cuanto a los objetivos antes mencionados. Y también, en cuanto a la tercera pata en la que se apoya este taller: la socio-afectividad.

Los chicos y chicas que han tenido la oportunidad de hacer estas actividades en el aula, en mayor o menor medida, han ganado en confianza frente a la resolución de problemas, han mejorado en el conocimiento de herramientas y procedimientos de resolución, han adquirido perspectiva sobre los que son las matemáticas y las distintas formas que tenemos de expresarlas y han sido conscientes de que todo ese conocimiento ha sido adquirido gracias a la aportación de muchas personas a lo largo de la historia de la humanidad.

Entre las matemáticas y el pensamiento computacional Taller de HelloBebras! para secundaria

Arnau Sánchez Farreras
asanch92@xtec.cat
Institut Caterina Albert

Raül Fernández Hernández
rferna63@xtec.cat
Institut Vidreres

Anton Aubanell Pou
aaubanel@xtec.cat
MMACA i Grup Cúbic

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

En los últimos años, el desarrollo del pensamiento computacional en el aula de matemáticas ha cobrado especial interés como forma para desarrollar habilidades y destrezas asociadas a los procesos de resolución de problemas. En muchas ocasiones, este trabajo se lleva a cabo a través de prácticas relacionadas con la programación informática. Pero existen recursos como los problemas Bebras que ofrecen a los docentes la posibilidad de trabajar la abstracción, el reconocimiento de patrones o el razonamiento lógico sin emplear recursos tecnológicos. En el presente taller se abordan las posibilidades que ofrecen este recurso para desarrollar competencias asociadas a la resolución de problemas, al pensamiento computacional

y a las destrezas sociales en el proceso de aprendizaje de las matemáticas a través de materiales elaborados para la iniciativa HelloBebras! de EduCaixa y cómo incluir este recurso en la práctica docente.

Palabras clave: Pensamiento Computacional, resolución de problemas, Bebras, Razonamiento

1. Marco teórico

En matemáticas y en educación matemática parece indiscutible la importancia de la resolución de problemas. Lluís A. Santaló afirmaba que “Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema.” (Santaló, 1981), George Pólya en el prefacio de su libro “Cómo plantear y resolver problemas” escribía “Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento” (Pólya, 1944) y Miguel de Guzmán dedicó a la resolución de problemas y al razonamiento matemático uno de sus libros más bellos “Para pensar mejor” (Guzmán, 1994). Tres referentes de autoridad que justifican la importancia de la resolución de problemas en la matemática y en su enseñanza.

Por otra parte, el pensamiento computacional (entendido de manera muy general) como elemento importante en la formación de futuros ciudadanos invita a reflexionar sobre los aspectos que lo caracterizan. Seymour Papert fue el primero que acuñó este término en los años 80 (Papert, 1987), pero no fue hasta el 2006 que Jeannette Wing no lo describió (Wing, 2006) tal como lo podemos interpretar en la cuarta competencia matemática del currículum actual de secundaria (Educagob, n.d.).

Como consecuencia, y buscando un entorno que engloba la resolución de problemas y el pensamiento computacional, se decide trabajar con el recurso de la comunidad Bebras *(www.bebras.org*).

Las características comunes de los problemas que publican los diferentes autores de la comunidad Bebras són:

- Están dirigidos a desarrollar conceptos informáticos
- No se necesitar ningún concepto previo para entenderlos
- Se deben resolver sin la necesidad de ningún dispositivo que no sea el papel y lápiz
- Se encuentran contextualizados
- Van acompañados con diferentes tipos de recursos como gráficos visuales, esquemas, ejemplos.. para fortalecer la comprensión del enunciado
- Se dan opciones de solución única
- Se resuelven en menos de 5 minutos

Un corolario de trabajar con los problema que ofrece Bebras es que se desarrolla la comprensión lectora y las competencias transversales.

La reciente incorporación explícita del pensamiento computacional al currículo de matemáticas plantea un reto y una oportunidad al profesorado de matemáticas, además, introduce nuevas necesidades en formación inicial y continua del profesorado de todas las etapas educativas (Palop et al., 2022).

Para contribuir a superar este reto y a potenciar esta oportunidad nació el proyecto *HelloBebras!* de EduCaixa (https://educaixa.org/ca/-/hellobebras-1). En estas JAEM se presenta una comunicación centrada en los fundamentos de *HelloBebras!* y en su organización. Nuestro taller, en cambio, nos acercará a estos retos desde la acción directa y participativa de las personas asistentes, saboreando el gusto de enfrentarse a ellos, descubriendo el tipo de planteamientos que se hacen e imaginando como pueden ser útiles en nuestras clases de matemáticas de secundaria. Hay otro taller paralelo al nuestro enfocado a la etapa de primaria.

El taller se propone explorar el fecundo territorio de encuentro entre matemáticas y, en concreto la resolución de problemas y el razonamiento, y el pensamiento computacional, a través de las tareas Bebras, centrándose en las etapas de ESO y de Bachillerato.

2. Objetivos del taller

El taller se propone dos objetivos:

- Presentar, a partir de la participación directa de las personas asistentes, las tareas Bebras, un territorio excelente para trabajar, desde las matemáticas, la resolución de problemas, el razonamiento y ciertas habilidades generales que impulsan el desarrollo del pensamiento computacional.
- Dar a conocer, de manera pràctica, los materiales del proyecto HelloBebras! que, impulsado por EduCaixa, se ha desarrollado en más de 1000 centros de toda España.

3. Desarrollo del taller

3.1 Introducción

3.1.1 ¿Qué es Bebras? 4 min

- Objetivos de Bebras
- Organización internacional
- Referencias y ejemplos
- ¿Por qué Bebras? El pensamiento computacional en el currículum

3.1.2 ¿Qué es HelloBebras!? 8 min

- Descripción general de HelloBebras!
- Participación
- Breve comentario sobre el feedback de los participantes

3.1.3 ¿Qué se pone en juego en Bebras? 8 min

- Procesos matemáticos (véase imagen 1)
- Habilidades del pensamiento computacional (véase imagen 2)
- Competencias transversales y comprensión lectora (véase imagen 3)

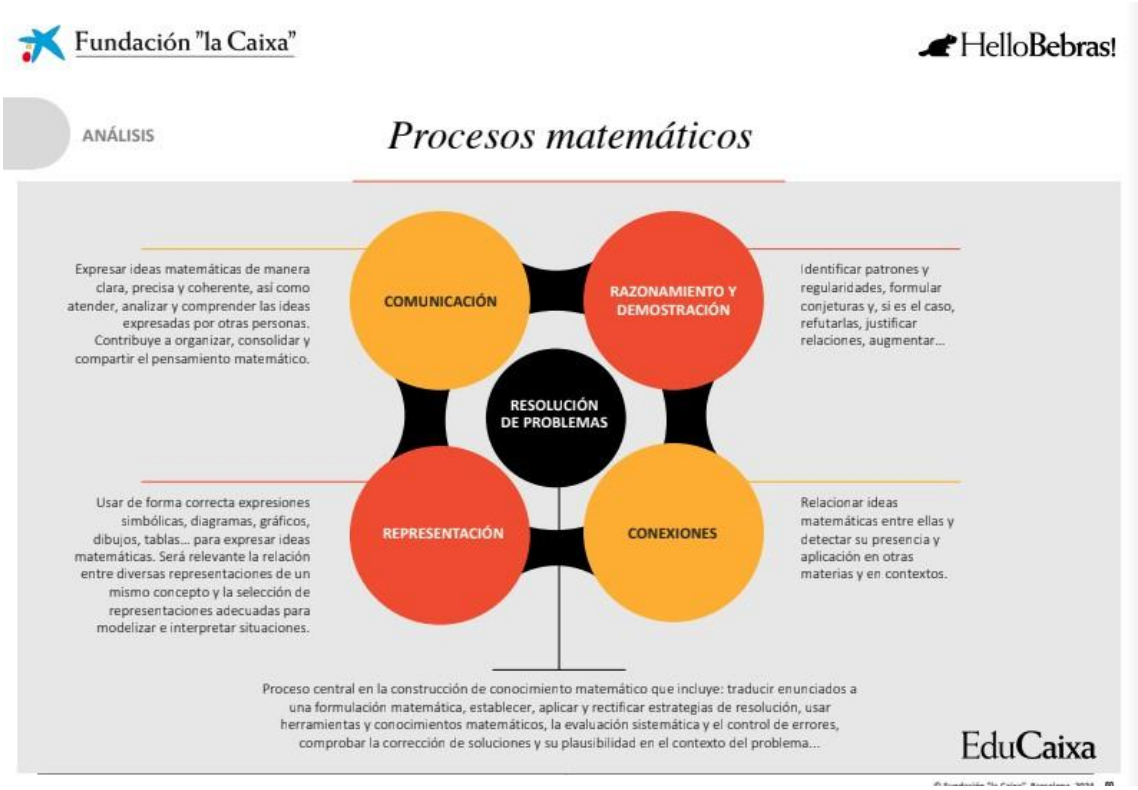


Imagen 1: Procesos matemáticos

Imagen 2: Habilidades del pensamiento computacional

Imagen 3: Competencias transversales

3.2 ¡La mejor manera de conocer Bebras es vivirlo!

3.2.1 Primera parte (45 min)

Trabajaremos en pequeños grupos sobre una muestra de tres retos de Bebras pensados para distintas edades, desde la ESO al bachillerato.

En cada uno de los tres casos…

- Se planteará el reto que será trabajado en equipo. (10 min)
- Se hará un análisis conjunto de los procesos matemáticos, las dimensiones del pensamiento computacional y las competencias transversales que se ponen en juego. (5 min)

La propuesta que se planteará consistirá en los retos que se muestran en las imágenes 4, 5 y 6. En cada caso se hará un análisis a través de la plantilla de la imagen 7.

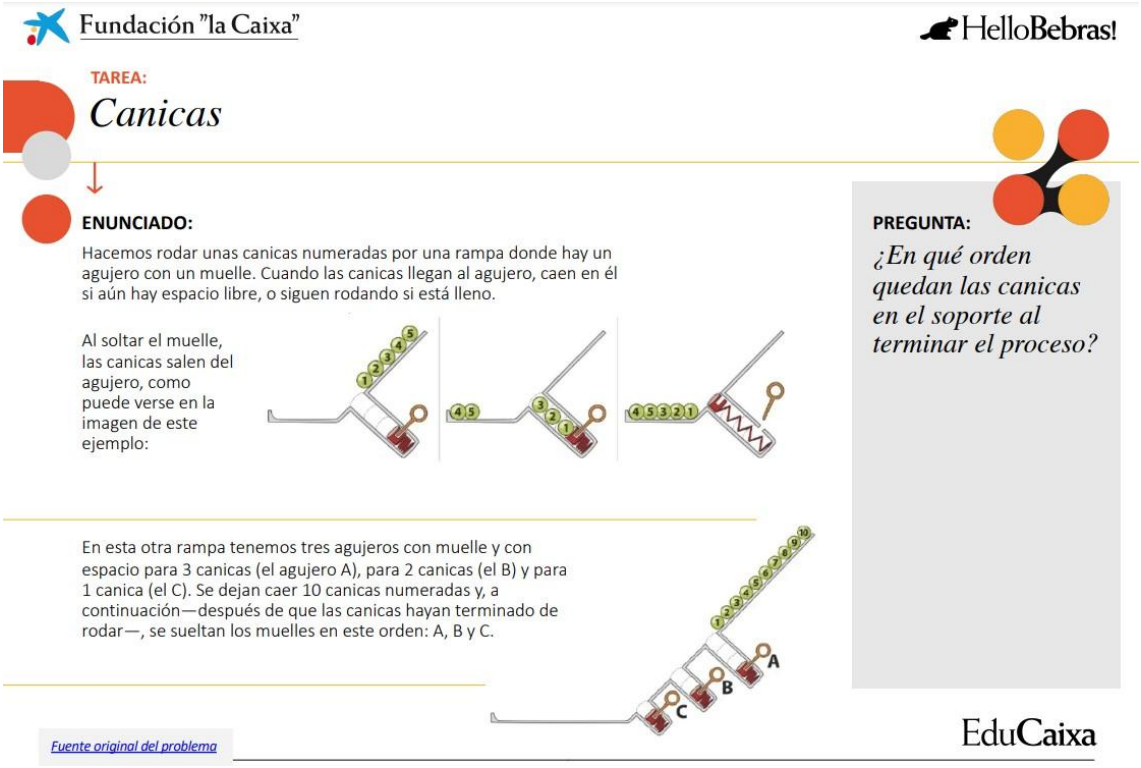


Imagen 4: Canicas

Imagen 5: Llaves de hotel

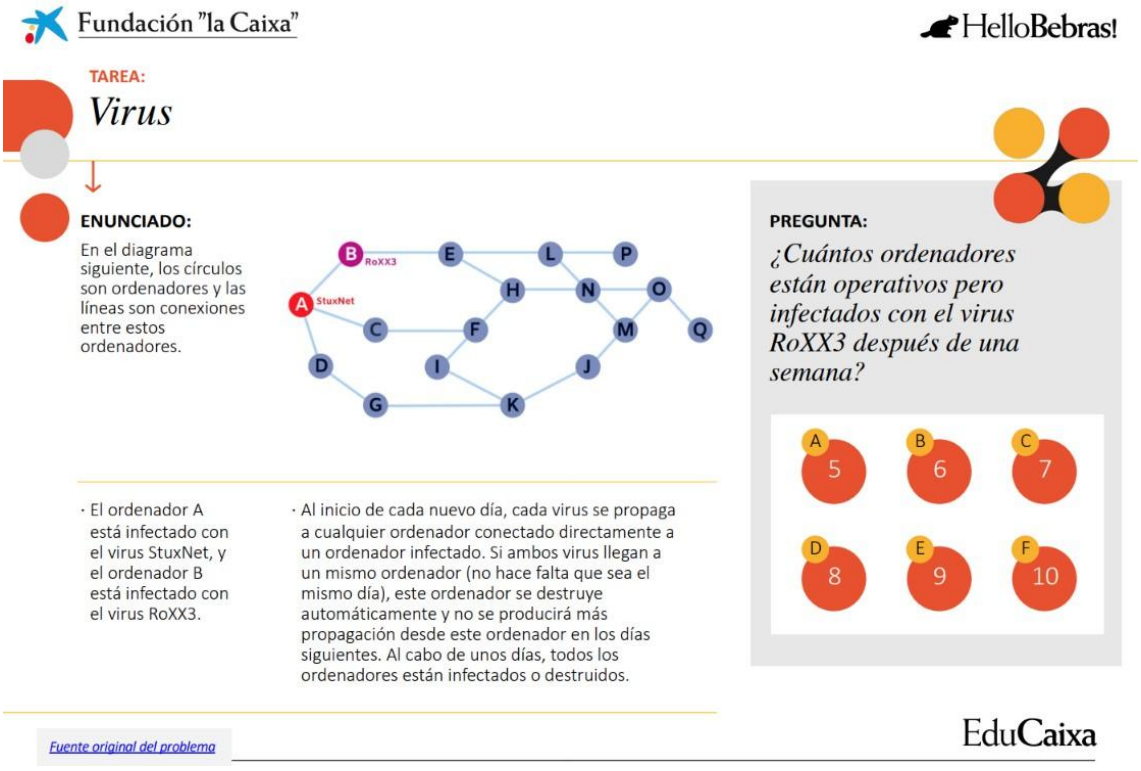


Imagen 6: Virus

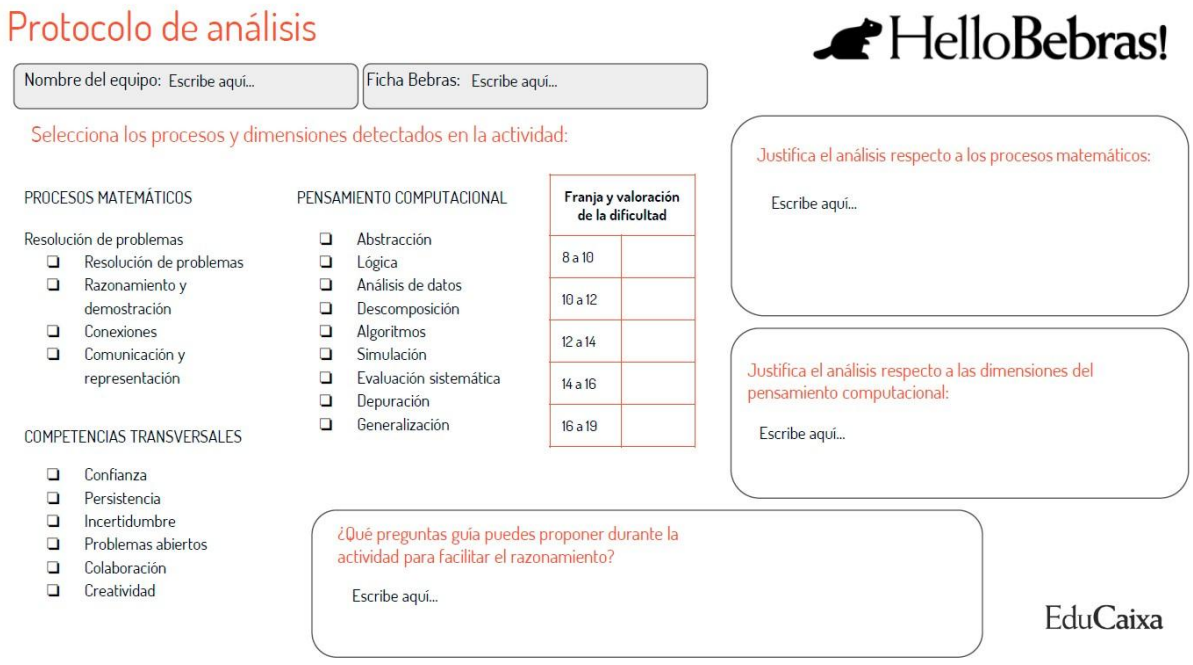


Imagen 7: Protocolo de análisis

3.2.2 Segunda parte (15 min)

Los grupos explorarán, de manera libre, un conjunto más amplio de retos para tener una visión más general del tipo de tareas que se plantean en Bebras y, en concreto en HelloBebras!

3.3 Puesta en común final (10 min)

El último bloque del taller se dedicará a poner en común las observaciones de los participantes sobre los retos Bebras entendidos como actividades en el territorio de encuentro entre las matemáticas y el pensamiento computacional.

4. Conclusión

El taller se plantea desde la convicción de que los retos Bebras constituyen un material de trabajo excelente para nuestras clases: sólidos en los contenidos que se ponen en juego, ricos en los procesos que contribuyen a desarrollar y motivadores en los contextos que se plantean.

La incorporación del pensamiento computacional en los actuales currículos de matemáticas da una relevancia especial a este tipo de actividades.

Referencias

Santaló, Luis A. (1981). Enseñanza de la matemática en la escuela media. Buenos Aires: Proyecto CINAE.

Pólya, George. Cómo plantear y resolver problemas. Ed. Trillas, México, 1965.

Guzmán, Miguel de. Para pensar mejor. Ed. Pirámide, Madrid, 1994.

Educagob. (n.d.). Competencias específicas - | Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes. Retrieved April 11, 2024, from https://educagob.educacionfpydeportes.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/menu-curriculos-basicos/ed-secundaria-obligatoria/materias/matematicas/competencias-especificas.html

Papert, S. (1987). *Desafío a la mente: computadoras y educación*. Galápago.

Wing, J. M. (2006, Març). Computational Thinking. *Communicactions of the ACM*, *49*(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Palop B., Santaengracia J. J. y Rodríguez-Muñiz L. J. (2022). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXV (p. 623). SEIEM.

Actividades de probabilidad a través de la obra de Tamás Varga

Jordi Font González
jfont@iesbaixamar.com
Grup Cúbic - Institut Baix a mar (Vilanova i la Geltrú)

Sergi Muria Maldonado
smuria@xtec.cat
Grup Cúbic - Institut El Joncar (Barcelona)

Paula López Serentill
paula.lopez@udg.edu
Grup Cúbic - Universitat de Girona

Raül Fernández Hernández
rferna63@xtec.cat
Grup Cúbic - Institut Vidreres (Vidreres)

Núcleo temático: Recursos para el aula y Procesos.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

Tamás Varga fue un matemático y profesor húngaro reconocido internacionalmente por su propuesta de reforma del sistema educativo en su país conocida como "Educación matemática compleja", así como por sus publicaciones sobre lógica, combinatoria y probabilidad en diferentes países y su participación en organizaciones internacionales.

En el taller se trabajará en torno a algunas de sus propuestas sobre probabilidad. Se abordarán actividades experimentales propuestas por Varga que promueven un tratamiento de la probabilidad matemáticamente rico y didácticamente potente. Se tratan de actividades de umbral bajo, techo alto y paredes anchas, donde de manera experimental se podrá observar el ciclo conjetura, planteamiento, simulación y, cuando se considere oportuno, formalización y demostración.

Con la participación dinámica de las personas asistentes se planteará una estructura de taller rotatorio en torno a diferentes propuestas en las cuales convergen recursos didácticos distintos que responden a un enfoque práctico y muy próximo a la actividad docente.

Palabras clave: Tamás Varga, Probabilidad, Experimentación, Simulación

1. La figura de Tamás Varga

Tamás Varga (Kunszentmiklós, 3 de noviembre 1919 - Budapest, 1 de noviembre 1987) es uno de los personajes principales en la historia de la educación matemática en Hungría y, a nivel internacional, un reconocido impulsor de mejoras en la enseñanza de la lógica, probabilidad y combinatoria.

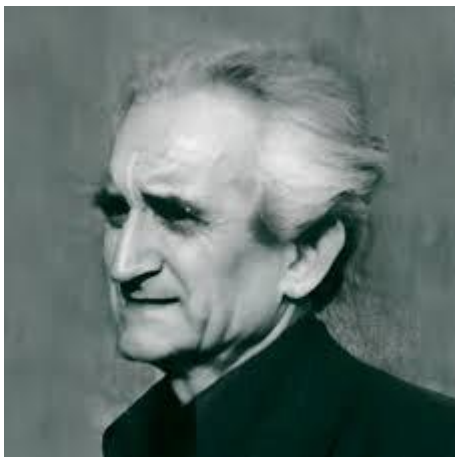


Imagen 1. Tamás Varga

Después de graduarse como profesor de matemáticas y física en la Universidad de Ciencias de Budapest empieza a enseñar matemáticas en la escuela secundaria de

Kunszentmiklós en 1945. Desde 1951 trabaja en la formación de profesores de matemáticas en la Universidad Eöyvos Loránd.

Motivado por una serie de conferencias de Paul Dienes en 1960 y un simposio de la UNESCO sobre educación matemática organizado en Budapest en 1962, inicia una tarea intensa de renovación de los planes de estudios de matemáticas en Hungría.

Después de unas primeras experimentaciones, en 1963, pone en marcha el proyecto de "Educación matemática compleja" que va creciendo progresivamente hasta cubrir todos los niveles de educación obligatoria de Hungría. En el 1967 Varga se traslada al Instituto Pedagógico Nacional donde lidera el equipo responsable del desarrollo del proyecto de reforma. A principios de 1970 el proyecto se toma como base del nuevo plan de estudios, que es introducido en 1974 en su versión provisional y, de forma definitiva, en 1978, dentro del marco de una reforma curricular general.

La amplitud y profundidad ("complejidad") de la reforma propuesta puede apreciarse en diferentes aspectos:

- En el contenido y estructura del nuevo currículum, donde aparecen nuevas ideas matemáticas y las consecuentes intersecciones y conexiones entre ellas.
- En los materiales didácticos y los recursos propuestos, tanto para los estudiantes como para el profesorado.
- En la formación docente.
- En la propuesta de prácticas educativas ricas, utilizando una amplia variedad de herramientas y métodos de enseñanza.

La concepción de Varga tiene en cuenta el enfoque constructivista pero se inspira, al mismo tiempo, en un enfoque dialógico de las matemáticas y su enseñanza, característico de la epistemología "heurística" húngara.

Las tareas propuestas por Varga, como podrá observarse en las actividades que se realizarán en el taller, son “tareas ricas” en varios sentidos:

- Son situaciones problemáticas que permiten a los estudiantes dar sentido a nociones matemáticas y requieren su contribución activa en la construcción del conocimiento matemático.
- Muchas de ellas conectan varios contenidos matemáticos.
- Están abiertas a múltiples estrategias de resolución.

Se trata de tareas que, en el lenguaje actual podríamos calificar de umbral bajo (siempre es posible iniciar la exploración del reto), techo alto (el problema se puede llevar muy lejos a través de ampliaciones, profundizaciones o conexiones) y paredes anchas (permite distintos caminos de abordaje y de progreso en la resolución).

La riqueza también se manifiesta en el conjunto de tareas propuestas:

- Diversidad de contextos de los problemas.
- Diversidad de herramientas manipulativas utilizadas: desde objetos cotidianos del aula hasta instrumentos especialmente diseñados para la ocasión.
- Diversidad de formas de representación.

Esta diversidad, que se observará en las actividades del taller, permite avanzar en dos objetivos: por una parte apoyar un proceso de abstracción progresiva basado en una variedad de experiencias que pueden conectar con distintos estilos de aprendizaje y, por otra parte, presentar las matemáticas como una actividad lúdica y placentera que atraiga el interés de los estudiantes.

El currículum propuesto por Varga se estructuraba en 5 grandes bloques de contenidos, que aparecen a lo largo de todo el plan de estudios:

1. Conjuntos y lógica
2. Aritmética y álgebra
3. Relaciones, funciones y series

4. Geometría y medida
5. Combinatoria, probabilidad y estadística

Este planteamiento curricular otorgaba mucha libertad al profesorado, permitiendo una atención diferencial a los estudiantes, proporcionando una base experimental rica y variada para la generalización y abstracción progresiva de las nociones matemáticas y apoyando un proceso de aprendizaje basado en el descubrimiento matemático.

A partir de mitad de los años 60 Tamás Varga también desarrolló una carrera internacional en el marco de la investigación educativa en matemáticas. Publicó y fue invitado regularmente en países tanto del bloque oriental como occidental (Alemania, Francia, Italia, Unión Soviética, USA, Canadá, España...). También asumió responsabilidades en varias organizaciones internacionales. Entre otros cargos, fue miembro del Consejo de *Educational Studies in Mathematics* y vicepresidente de la CIEAEM.

2. Tamás Varga y la probabilidad

Varga fue reconocido internacionalmente por su trabajo, especialmente en los ámbitos de la enseñanza de la lógica, combinatoria y probabilidad desde las primeras etapas educativas. Es extensa la producción de artículos y libros de Tamás Varga sobre probabilidad en colaboración con diferentes autores.

Podemos destacar su participación en la creación en 1972 de la que, a veces, se ha llamado Caja de Varga (Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit Spielanleitungen) para la editorial alemana Ernst Klett: un laboratorio portátil sobre probabilidad y combinatoria. En 1974 Varga publica, junto a Engel y Walser, el libro asociado al "laboratorio portatil" *Zufall und Strategie?* y finalmente en 1976 se publica una versión en francés *Hasard ou Stratégie?* de la Editorial O.C.D.L.

La editorial Teide publica en 1975 el magnífico libro *Las probabilidades en la escuela* que ha sido el referente para la propuesta del taller. En la bibliografía se referencian con detalle estas obras que han servido de inspiración a excelentes trabajos en el campo de la enseñanza de la probabilidad. A continuación hacemos referencia a dos de ellos:

- Es imprescindible mencionar el libro *Azar y Probabilidad* de Batanero, Cañizares y Díaz Godino (1991) en donde aparecen frecuentes referencias al trabajo de Varga. Esta obra ha sido y sigue siendo un referente en la didáctica de la probabilidad.

- Por otra parte nos gustaría destacar las palabras de Lluís Santaló, en su obra la *Educación Matemática hoy* (1975): "*No se trata de conocer a fondo las teorías respectivas, cosa reservada a especialistas, sino de educar la intuición para que no parezcan cosas caprichosas ni milagrosas. Tal vez muchos de los inconvenientes del comportamiento global de grandes sectores de la población provenga de que la gran mayoría de los ciudadanos no han sido nunca educados en probabilidad y estadística.*" Estas ideas están absolutamente alineadas con los planteamientos de Varga. Tanto es así que en su artículo *La probabilidad en la escuela media: uso de tablas de números de azar* publicado en el número 10 de la revista Epsilon de La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" en 1988, podemos encontrar referencias al libro de Glaymann y Varga.

-

3. Las probabilidades en la escuela

Esta obra de arte de la didáctica de la probabilidad destaca por dos caras bien diferenciadas de una misma moneda: por un lado, encontramos metodología aplicada al aprendizaje de la probabilidad y, paralelamente, problemas ricos donde podemos aplicar dicha metodología.

El libro se estructura en tres grandes bloques: *Combinatoria*, *Las probabilidades* y *La simulación*. En cada uno de estos bloques, podemos encontrar una introducción sobre su didáctica asociada y, seguidamente, problemas o situaciones donde poder aplicar cada uno de los tres conceptos recogidos en los respectivos títulos.

Bloque 1: Combinatoria

Después de valorar la existencia (o no) de conjuntos finitos que poseen determinadas propiedades, es necesario pasar a la clasificación y recuento de sus elementos. El alumno puede empezar este estudio a través de experiencias y manipulaciones de casos más sencillos (quizás con menos elementos). En el momento que los casos aumentan, el alumno puede detenerse en el camino e iniciar un razonamiento que le lleve a poner en práctica un método deductivo. A través de múltiples experiencias, el alumno llegará a descubrir múltiples conceptos sin conocimientos previos. De forma natural, irán apareciendo distintos **modelos** de agrupamiento (variaciones, con y sin repetición, permutaciones, combinaciones). La evolución que se debería llevar a cabo en nuestras aulas podría pasar por el estudio de casos sencillos, continuar por la simbolización de dichos casos y buscar de forma sistemática alguna(s) característica(s) en común para llegar a una generalización (donde se pueda variar los parámetros iniciales para el recuento de casos).

Bloque 2: Las probabilidades

En contraposición al determinismo que domina el campo de la combinatoria, las probabilidades tienen por objetivo el estudio de fenómenos aleatorios. El primer paso que debe superar el alumno es hacerse con la gradación que podemos encontrar entre el suceso imposible y el seguro; el suceso posible. Desde edades bien tempranas (a partir de 7-8 años), podemos explorar estas nociones a través de contextos sencillos (estudios basados en urnas y bolas, por ejemplo). Una vez superado este primer peldaño, ¿cómo podemos proseguir en la didáctica de las probabilidades? En una primera etapa debe ser, sin lugar a dudas, **la experimentación** con material variado (ruletas, dados, monedas, bolas…). A través de la repetición sistemática de un experimento en las mismas condiciones, se invita al alumno a tratar de adivinar el resultado. A continuación, podemos hacer pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales y estudiar, seguidamente, cómo afectan a las predicciones hechas inicialmente. En una segunda etapa, el **razonamiento**

elemental alrededor de juegos puede ser el siguiente peldaño a afrontar en nuestras aulas. La comparación cualitativa de los grados de incertidumbre de ciertos sucesos en estos juegos deben hacer emerger el concepto de probabilidad. En esta fase la actividad se limita a simples comparaciones de probabilidades sin caracterizarlas aún con números, pero razonando los argumentos que las sustentan. A partir de este momento, el alumno debería estar preparado para afrontar el estudio de la **medida de la probabilidad** a través del cálculo de fracciones. Su aprendizaje y utilización se harán simultáneamente con el estudio de las situaciones y motivados por ellas. Partir del estudio de frecuencias relativas nos puede conducir a asociar las probabilidades a números del intervalo [0,1]. En un último estadio, el alumno podrá trabajar con sucesos complejos definidos a través de la intersección, unión, producto cartesiano… de sucesos simples.

Bloque 3: La simulación

El objetivo del estudio de probabilidades es asignar un grado de incertidumbre sobre la verificación de un suceso. A veces, puede suceder que seamos incapaces de determinar dicho grado (por falta de instrumentos matemáticos adecuados, dificultades en el estudio de casos a través de la combinatoria…). Sin embargo, podemos centrarnos, en una primera etapa, en el estudio de un modelo aproximado que nos permita hacer una **simulación.** La virtud de la simulación es que nos invita a desarrollar la intuición y el pensamiento probabilístico en el alumno. "*Gracias a los métodos de simulación, el niño es capaz de abordar un gran número de situaciones probabilísticas y dar así un salto adelante*", pág. 149. Progresivamente, el alumno podrá transitar de la simulación al razonamiento probabilístico.

En la actualidad las simulaciones por ordenador, realizadas a través de pequeños programas, son una herramienta importante tanto de exploración como de comprobación aproximada.

4. Planteamiento del taller

En el taller se presentarán diferentes actividades propuestas por Tamás Varga, pero desde un punto de vista actualizado.

La propuesta de las actividades se hace desde un planteamiento de umbral bajo, techo alto y paredes anchas:

- Umbral bajo: Permiten su abordaje por parte de todos los alumnos.
- Techo alto: Permiten ampliaciones y/o extensiones de forma natural.
- Paredes anchas: Permiten su resolución con diferentes estrategias, por distintos caminos.

En la resolución de las actividades del taller se propone siempre el mismo ciclo: Conjetura, planteamiento y simulación. En algunos casos este ciclo se prolonga a través de un cierto proceso de formalización y demostración.

En el desarrollo del taller comprobaremos cómo diferentes situaciones se fundamentan en un mismo modelo probabilístico. Este es un hecho muy bello para ilustrar la potencia de la abstracción en matemáticas creando modelos aplicables a distintos contextos.

Además, se darán ejemplos multimodales (en los que convergen dinámicas didácticas distintas) de cómo llevar las actividades al aula. En este sentido, será un taller con un enfoque práctico y próximo a la actividad docente.

La estructura del taller será la que se describe a continuación.

4.1 Presentación inicial (10 minutos): Se presentarà el taller i la figura de Tamás Varga.

4.2 Una primera actividad en torno a una primera situación-reto, “La bola o la vida” (5 minutos). Se trata de “entrar” en la tipología de actividades que vamos a trabajar en la sesión. El enunciado de la situación-reto es el siguiente:

“La bola o la vida”

Esta es la historia del señor que, cansado de su astrólogo y de sus vanas promesas, decide hacerlo ejecutar. Sin embargo, buen príncipe en el fondo, le da una última oportunidad. Autoriza al astrólogo a repartir 4 bolas, dos blancas y dos negras, entre dos urnas. El verdugo elige una de las urnas y saca una bola: si es negra el astrólogo es ejecutado, si no, salva la vida. ¿Cómo pondrá el astrólogo las bolas en las urnas para asegurar la máxima probabilidad de salvarse?

(Enunciado literal del libro de M. Glaymann y T. Varga, 1975)

Imagen 2. Problema La bola o la vida

4.3 Trabajo en torno a tres situaciones aleatorias (30 minutos): Se plantearán tres situaciones - problemas (“Las avispas”, “Tres dados, dos dados” y “Rectángulos aleatorios”) que se trabajarán siguiendo una dinámica rotatoria en la que todos los participantes podrán experimentar con materiales y explorar cada uno de los retos, “entrando” en ellos y, a través del trabajo en grupo, empezando a apuntar estrategias de solución. Los participantes en el taller se dividirán en 3 grupos (A, B i C). En cada una de las 3 mesas habrá hojas con el planteamiento de cada situación-reto y materiales para experimentar, entender la actividad y empezar a establecer posibles estratégias de abordaje. Los 30 minutos se dividirán en tres períodos de 10 minutos:

- En el primer bloque de 10 minutos el grupo A trabajará en la mesa 1, el grupo B trabajará en la mesa 2 y el grupo C trabajará en la mesa 3.
- En el segundo bloque de 10 minutos el grupo A trabajará en la mesa 2, el grupo B trabajará en la mesa 3 y el grupo C trabajará en la mesa 1.
- En el tercer bloque de 10 minutos el grupo A trabajará en la mesa 3, el grupo B trabajará en la mesa 1 y el grupo C trabajará en la mesa 2.

A continuación detallamos los enunciados de las tres situaciones aleatorias / retos que se trabajarán, todas ellas procedentes del libro *Las probabilidades en la escue*la de Varga y Glaymann (1975) y del propio catálogo de la “Caja de Varga”.

“Las avispas”

Tenemos dos habitaciones separadas por una puerta que está abierta, en la habitación de la izquierda hay tres avispas cada una de las cuales lleva dos números a su espalda: 1,2 - 3,4 - 5,6. La habitación de la derecha tiene una ventana que inicialmente está cerrada. Véase el esquema de la imagen1.

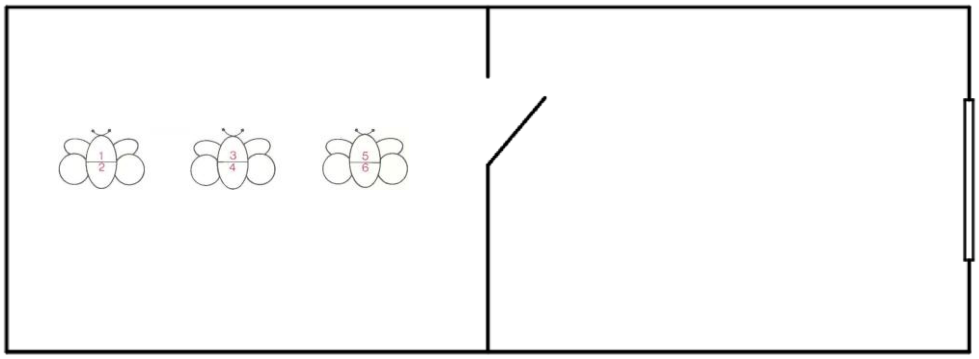


Imagen 3: Problema de las avispas

Cada minuto exactamente una avispa vuela a través de la puerta pasando de una habitación a la otra. El azar decide qué avispa cambia la habitación. Echamos el dado y ponemos en la otra habitación la avispa que tiene en la espalda el número que ha salido. Esto continúa hasta que todas las avispas están en la habitación de la derecha. Después ya podemos cerrar la puerta, abrir la ventana y nos hemos librado de todas las avispas. ¿Cuánto tiempo se tarda de media hasta que todas las avispas están en la habitación de la derecha?

“Tres dados, dos dados”

Consideremos los dos experimentos aleatorios siguientes:

> *Experimento 1: Echamos dos dados y sumamos sus puntuaciones.*
> *Experimento 2: Echamos tres dados, descartamos el que ha obtenido mayor puntuación (si son varios, descartamos uno de ellos) y sumamos los otros dos.*

En ambos casos podremos obtener un resultado entre 2 y 12 incluidos.

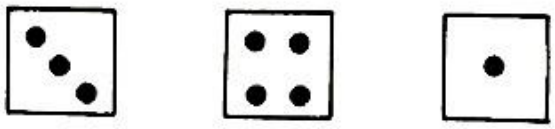


Imagen 4. Problema Tres dados, dos dados

¿Las probabilidades de los diversos resultados serán las mismas en ambos casos?

"Rectángulos aleatorios"

Tenemos una cuadrícula 5x5. Las líneas que definen la cuadrícula (horizontales y verticales) están numeradas del 1 al 6. Echando un dado equilibrado obtenemos cuatro números al azar del 1 al 6, sean a, b, c, d y tomamos el rectángulo que tiene como vértices diametralmente opuestos los puntos (a,b) y (c,d). Esto lo hacemos muchas veces…

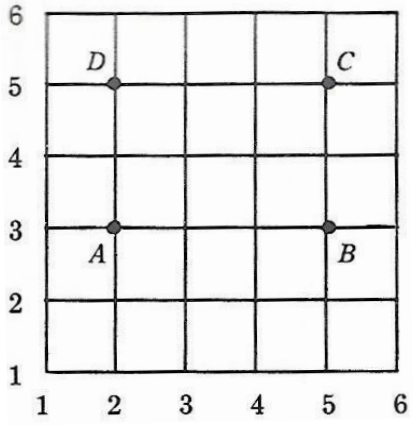


Imagen 5. Problema Rectángulos aleatorios

¿Cuál es la probabilidad de obtener un cuadrado?

¿Cuál es la probabilidad de obtener un rectángulo de área 2?

¿Cuál es la media de las áreas de estos rectángulos?

¿Cuál es la probabilidad de obtener un rectángulo de perímetro 10?

¿Cuál es la media de los perímetros de estos rectángulos?

4.4 Profundización en una de las tres situaciones aleatorias (20 minutos): Cada participante podrá elegir en cuál de las situaciones problema presentadas en la parte anterior desea concentrar su atención y continuar trabajando. Se dedicarà una o dos mesas cada problema y cada participante se colocará en la mesa que considere conveniente aunque, naturalmente, se intentará que el reparto se haga de manera equilibrada. En esté bloque se plantearán y discutirán estratégias, se sugerirán posibles extensiones, se presentarán recursos para trabajar la situación planteada en el aula, en algún caso se realizará un role-play que modeliza el problema, etc.

El tipo de trabajo, tanto de introducción como de profundización, que se puede hacer en cada situación-reto es diferente:

- Experimentar
- Formular conjecturas
- Establecer estrategias
- Identificar modelos probabilísticos
- Buscar situaciones distintas que correspondan al mismo modelo

4.5 Cierre del taller (5 minutos) en los cuales harán algunas consideraciones finales.

Todo el material del taller se podrá recuperar a través de la página web del Grup Cúbic de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, en la dirección: http://www.ub.edu/cubic/2024/04/08/21jaem/

Hay que reconocer que, con frecuencia, la probabilidad en nuestras aulas tiene una presencia muy limitada, relegada al final de los cursos y afectada por falta de

tiempo. Esto puede provocar enfoques reduccionistas y trabajo con experimentos aleatorios muy simples que no se alejan mucho de los meros ejercicios de aplicación. No siempre en la ESO se plantean problemas de probabilidad que inviten a la reflexión de fondo, la exploración sistemática de situaciones, la definición de estrategias, el

razonamiento complejo, la conexión interna significativa y potente con otras partes de la matemática... La muestra de problemas que, recuperando los trabajos de Varga, plantearemos en el taller quieren mostrar que es posible trabajar la probabilidad en secundaria a través de retos bonitos, interesantes y matemáticamente significativos que pueden abordarse de manera elemental, que, sin embargo, permiten ir muy lejos desde el punto de vista matemático.

5.Conclusiones

El tipo de actividades propuestas por Tamás Varga ofrecen importantes posibilidades didácticas para trabajar la probabilidad de una manera sólida en el contenido y motivadora en la forma. En el taller que presentamos nos gustaría poner en valor la obra de Tamás Varga de la manera más genuina: trabajando en torno a algunos de los problemas que planteaba, saboreando el gusto de descubrir posibilidades inesperadas, atisbando caminos de profundización, imaginando cómo los podemos llevar a nuestra aula como elementos de aprendizaje de la probabilidad, esta parte de la matemàtica a veces un poco olvidada pero tan esencial para entender un mundo en el que el azar está presente en múltiples situaciones.

En el trabajo que se presenta en esta propuesta, además de los autores, ha participado un equipo formado por las siguientes personas, todas ellas miembros del Grup Cúbic (grupo de didáctica de las matemáticas de la Facultat de Matemàtiques i

Informàtica de la Universitat de Barcelona): Anton Aubanell, Francesc Massich, Laia Miró, Manel Martínez y Paula Arrebola.

Referencias

Batanero, M.C., Cañizares,M.J. y Díaz Godino, J. (1991). *Azar y probabilidad.*

Fundamentos didàcticos y propuestas curriculares. Editorial Síntesis. Madrid.

Gosztonyi, K.(2020): *Tamás Varga's reform movement and the Hungarian Guided*

Discovery approach. Revista Teaching Mathematics and Computer Science. nº. 18, 11-28

Santaló, L.A. (1975): *La educación matemática hoy.* Editorial Teide. Barcelona

Santaló, L.A (1988): *La probabilidad en la escuela media. Uso de tablas de números de azar*. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", nº. 10, 9-22.

Varga,T., Engel,A. i Walser, W. (1972). *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit*

Spielanleitungen. Editorial Klett. Stuttgart.

Varga,T., Engel, A. i Walser, W. (1976). *Hasard ou Stratégie?*. Editorial O.C.D.L. Paris

Varga, T. y Glaymann, M. (1975). *Las probabilidades en la escue*la. Editorial Teide.

Barcelona.

Taller de estrellas de papel

Elena Gajate Paniagua
Eegp16@educastillalamancha.es
IES Mº Juan de Ávila, Ciudad Real, UCLM

Núcleo temático:

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

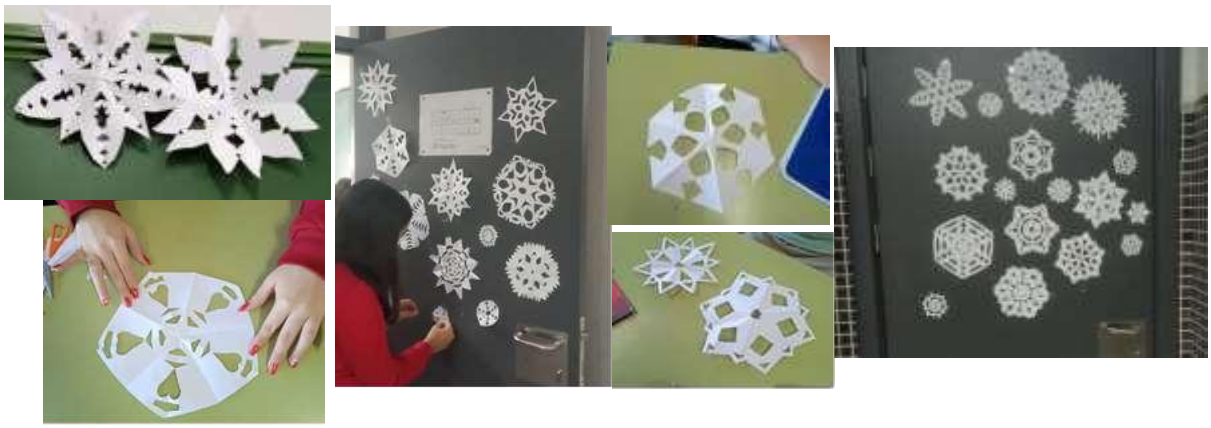
La técnica japonesa de recortar papel de forma artística se conoce con el nombre de *kirigami* (análogamente al *origami*, consistente en plegar papel). Las figuras se recortan directamente con las tijeras sin necesidad de un modelo dibujado previamente, lo que permite desarrollar la creatividad del ejecutante. En este taller lo vamos a utilizar para trabajar de forma manipulativa algunos conceptos relativos al sentido espacial (figuras geométricas en el plano, movimientos y transformaciones) y al sentido de la medida en la ESO y en bachillerato (medidas de ángulos, razones trigonométricas). Se trata además de transmitir que las matemáticas también implican belleza y creatividad. Utilizaremos papel y tijeras y el software de Geogebra.

Palabras clave: recortables, kirigami, simetría

Introducción

En los países anglosajones existe la tradición navideña de realizar “copos de nieve” plegando un cuadrado o rectángulo de papel de forma conveniente para que al recortar y desdoblar aparezcan estrellas con simetría octogonal, hexagonal, o

pentagonal. Las primeras son relativamente fáciles de conseguir y no nos pararemos en ellas, aunque son interesantes para iniciarse y entender conceptos como bisectriz o simetría axial. En este taller vamos a mostrar cómo conseguir primero la hexagonal y luego la pentagonal, razonando siempre matemáticamente por qué funciona cada técnica utilizada. Además, haremos una simulación con geogebra para mejorar el diseño de nuestra estrella sin necesidad de desperdiciar papel.



Imágenes de la autora

Simetría hexagonal.

Empezamos con la estrella hexagonal, que es relativamente sencilla. Nuestro objetivo es obtener una cuña de 30°: ¿Por qué 30°? ¿Cuántos ejes de simetía contiene esta figura? ¿Se puede obtener mediante giros?...

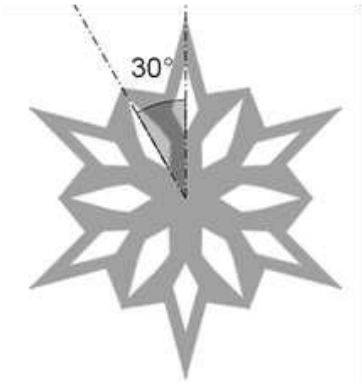


Imagen de la autora

Utilizamos un folio doblado en dos (¿Cómo se llaman las rectas discontinuas?):

Imágenes de la autora

¿Qué figura se forma en la parte inferior derecha? ¿Por qué? ¿Cuánto miden entonces los ángulos? ¿Cómo seguimos doblando para conseguir nuestro objetivo?

Una vez obtenida la cuña procederemos a recortar para obtener una figura. *Aquí* tenemos una simulación dinámica con geogebra que nos ayuda a visualizatr la estrella completa a partir de la cuña, aunque se mostrará a cada participante en el taller cómo realizar la suya, si lo desea.

Simetría pentagonal

Conseguir una estrella de cinco puntas es un poco más complejo, ya que el ángulo central (¿Cuánto mide?) no es tan fácil de conseguir.

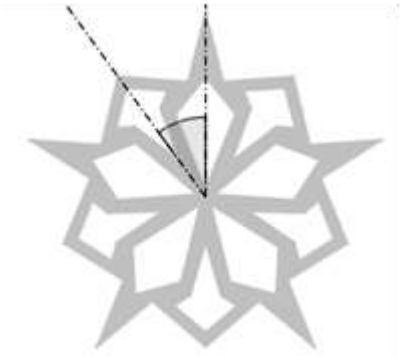


Imagen de la autora

Para construirlo partimos de un cuadrado doblado en dos por su diagonal:

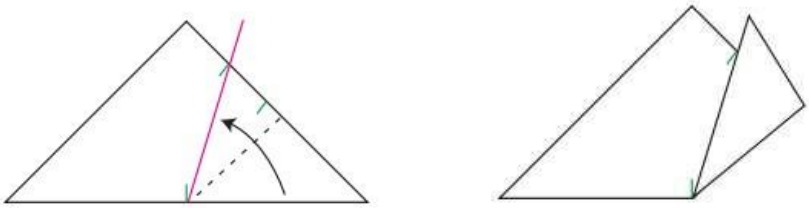


Imagen: Jessica Jones

Como veremos después, el ángulo señalado con la flecha curva mide 72°. Al igual que anteriormente, tenemos que pensar cómo seguir doblando para obtener una cuña de 36°. La simulación con geogebra la tenemos *aquí*

Una vez completada la estrella realizaremos la comprobación de que el ángulo α conseguido al principio mide 72°. Para ello tenemos que resolver el triángulo ABC utilizando la trigonometría que suele trabajarse en 4º de ESO o 1º de bachillerato, no sin antes contestar a las siguientes preguntas:

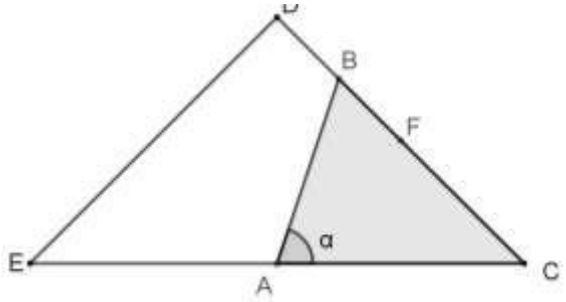


Imagen de la autora

Si tomamos como unidad de medida el lado del cuadrado de partida, ¿Qué lados y qué ángulos del triángulo ABC conocemos? ¿Qué resultados trigonométricos necesitamos utilizar para llegar al valor de α? El resultado obtenido ¿Es exacto o aproximado?

Se trata de dar un contexto a un ejercicio típico de trigonometría, que se puede completar trabajando las relaciones en el pentágono regular.

Referencias

Jones, J (2014) *http://www.jessicajonesdesign.com*

Thinking Classroom de Pensamiento Computacional

Belén Palop
b.palop@ucm.es
Universidad Complutense de Madrid

Juan José Santaengracia
juanjose@uniovi.es
Univderisdad de Oviedo

Luis J. Rodríguez-Muñiz
luisj@uniovi.es
Umiversidad de Oviedo

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

El Pensamiento Computacional ha irrumpido en el currículo de Educación Primaria y Secundaria, y resulta necesario disponer tanto de una aproximación teórica como de actividades prácticas para su correcta inclusión en las aulas. En este taller se presentan dos actividades prácticas de PC de suelo bajo y techo alto, que serán abordadas a través de la metodología *Thinking Classroom*. La primera de ellas consistirá en comprender el concepto de autómata de estado finito y aprender a diseñar autómatas sencillos; la segunda consistirá (re)descubrir los algoritmos clásicos de ordenación utilizando material manipulativo. Además, se realizará una breve exposición de un marco teórico de PC que permite identificar los elementos básicos del PC con una visión inclusiva que busca ir más allá del pensamiento algorítmico.

Palabras clave: Pensamiento Computacional, Thinking Classroom, Educación Primaria, Educación Secundaria

1. Introducción

La inclusión del PC en la nueva ley educativa (MEFP, 2022a, 2022b) ha generado revuelo en el profesorado de Educación Primaria y Educación Secundaria al no haber tenido una formación previa relativa a este concepto. Además, esta inclusión se ha realizado atendiendo únicamente a la parte algorítmica del PC, tal y como se explica en Palop (2022a, 2022b). Esto genera la necesidad de realizar formaciones más completas y disponer de recursos que permitan llevar el PC al aula de forma de forma adecuada.

2. Marco teórico

2.1 Modelo de Pensamiento computacional

El término PC ganó relevancia desde las publicaciones seminales de Jeannete Wing (2006, 2008), quien propuso que el PC "implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano mediante la utilización de los conceptos fundamentales de la informática" (Wing, 2006, p. 33, [traducción propia]). Tras esto, diferentes autores han centrado la definición en diferentes aspectos del PC, tales como la algoritmia (Brennan y Resnick, 2012), la resolución de problemas a través del ordenador (Barr y Stephenson, 2011) o la computación (Royal Society, 2012).

La definición de Pensamiento Computacional ha ido desplazándose desde el enfoque integrador de Wing en 2006, en el que se refiere de manera genérica a cómo "piensa un informático", hacia visiones algo más limitadas de su alcance. Aunque incluso en la literatura académica en ocasiones reduce el PC a una de sus partes, el pensamiento algorítmico, es crucial evitar una excesiva simplificación del término en su transferencia al aula. Debemos pues movernos más allá de la robótica educativa y más allá de las secuencias, buscando una construcción en el alumnado de la computación como una disciplina cercana a las matemáticas pero con características propias que, igual que bebe de ella, nos permite encontrar contextos ricos y motivadores para el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo se utilizará el modelo de tres pilares propuesto por Palop y Díaz (2024) en el que se define el PC de la siguiente forma: "El pensamiento computacional es la

manera de razonar que nos permite enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva" (Palop y Díaz, 2024, p. 12). Esta definición se apoya fuertemente en tres pilares: Datos, Algoritmos y Resolución de problemas. Además de estos tres pilares, en Palop y Díaz (2024) se definen 12 componentes que aparecen de manera mayoritaria en la literatura como habilidades o elementos esenciales del Pensamiento Computacional.

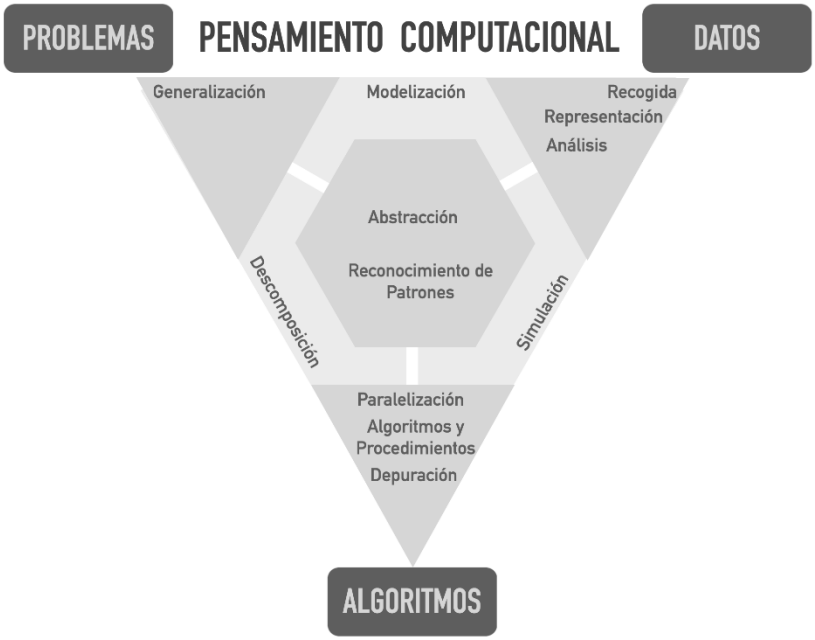


Figura 1. Componentes del pensamiento Computacional de Palop y Díaz (2024)

El diagrama de la Figura 1 nos da una estructura de estos componentes enmarcados en el triángulo con los tres de pilares. Se ha tratado de ubicar a cada componente según su relación con cada pilar. No entraremos en este texto a justificar su posición, pero por dar un ejemplo del sentido del esquema, podemos considerar la modelización: desde el punto de vista de las matemáticas, modelizar es una tarea claramente relacionada con la resolución de problemas que, desde el punto de vista computacional, está también íntimamente relacionada con la construcción de modelos de datos. Así, si queremos abordar de manera holística el Pensamiento Computacional en el aula debemos abrir el foco desde la simplicidad de la robótica, hacia otros componentes que, a través de problemas de interés para el alumnado, puedan enriquecer al tiempo su pensamiento matemático y computacional.

2.2 Metodología Thinking Classroom

La metodología *Thinking Classroom* nace de la investigación de Liljedahl (2020). El autor propone que una clase de matemáticas debe basarse en el pensamiento por encima de la mecanización de las tareas. Para conseguir que el alumnado pase la mayor cantidad de tiempo pensando en el aula establece una serie de pautas a seguir, que resumimos de manera muy sucinta en las tres siguientes:

- Los problemas propuestos deben ser de suelo bajo y techo alto, de forma que todo el alumnado pueda conseguir avanzar, pero lo suficientemente amplios como para llegar a suponer un reto para todo el alumnado.

- El alumnado debe trabajar en grupos aleatorios de tres personas y de pie, en cualquier superficie vertical borrable (pizarras de tiza o blancas, ventanas, superficies plásticas…).

- El docente actúa como guía en el aprendizaje del alumnado, siendo el dinamizador del trabajo y guiando en el descubrimiento del contenido. El docente debe fomentar el pensamiento y la discusión entre el alumnado, facilitando nuevas preguntas, eligiendo cuáles contesta o, incluso, reagrupando al alumnado, si lo considera conveniente.

- Al terminar la sesión, se reserva un tiempo de consolidación, toma de notas por parte del alumno y puesta en común de los resultados, donde se realiza la institucionalización del conocimiento.

3. Propuesta de taller

El taller se divide en 3 partes: autómatas finitos, algoritmos de ordenación y (re)definición de PC. Cada una de estas partes es una concreción y ampliación de información del trabajo de Santaengracia et al., (2023). Siguiendo el modelo de Alsina y Mulà (2019), se trabajará inicialmente en la deconstrucción del término PC mediante actividades de diseño de autómatas finitos, con las que se busca romper con la visión de la secuencia y la dos-dimensionalidad que favorecen las actividades de robótica.

3.1 Autómatas finitos

Los autómatas finitos son modelos matemáticos que permiten reflejar los estados de un sistema y son la antesala de la famosa máquina de Turing. A partir de retos sencillos, con tareas de suelo bajo y techo alto, podremos familiarizarnos con

cuestiones tan dispares como el funcionamiento de un ascensor o la definición de un sistema que acepte solo números pares. Para cada reto se trabajará en modo de thinking classroom con los participantes repartidos al azar en grupos y en pizarras.

A partir de algunos ejemplos, los participantes comienzan a construir un modelo mental del modelo de vértices y aristas que forman el grafo dirigido con el que representamos a un autómata (se muestra un ejemplo en la Figura 2). Una vez asumido el modelo, se trabaja desde el constructivismo hacia la construcción de autómatas de mayor nivel de complejidad, poniendo en común cada propuesta entre los participantes e institucionalizando el conocimiento adquirido. Se introducirán ejemplos concretos que se encuentren en la intersección entre el pensamiento matemático y el computacional, buscando autómatas que respondan a cuestiones aritméticas en diferentes bases, analizando reglas de divisibilidad y/o la corrección de la construcción de una operación combinada.

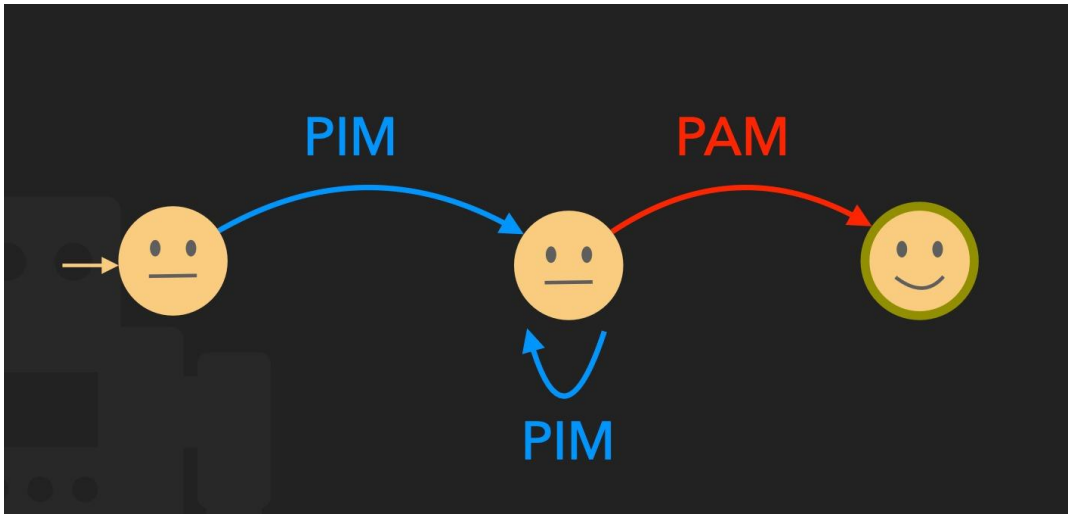


Figura 2. Autómata de estado finito representado figurativamente a través de un grafo dirigido

Si el espacio de trabajo lo permitiese, se llevaría a cabo también una dinámica participativa sobre autómatas en la que los propios asistentes impersonan autómatas y llevan a cabo diversos códigos. Con este ejercicio, que se puede llevar a cabo en el aula ordinaria, se busca la interiorización del concepto y la participación de todos los asistentes.

Esta parte del taller tomará aproximadamente 35 minutos.

3.2 Algoritmos de ordenación

Se hará una breve explicación de la importancia de los datos dentro del PC y de qué es un algoritmo de ordenación. Se proporcionarán a los asistentes diversos materiales con los que se podrá simular el comportamiento de un ordenador, como las campanillas musicales. Con estos materiales podremos intuir y asumir la dificultad del ordenador para realizar la ordenación de grandes conjuntos de datos. A partir de ahí, continuando con la metodología de *Thinking Classroom* y con el uso de regletas de Cuisenaire, ábacos, tarjetas de números y otros materiales manipulativos, se realizará un barrido por los algoritmos de ordenación clásicos de orden cuadrático: inserción, selección y burbuja.

Esta sección del taller cierra con la presentación de algunos algoritmos eficientes de ordenación como los que se pueden ver en la Figura 3 y en el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=kPRA0W1kECg. A través de esta información se pretende centrar la atención en el concepto de orden de complejidad y conectan de manera natural el logaritmo en base dos con el concepto computacional de descomposición de “divide y vencerás”.

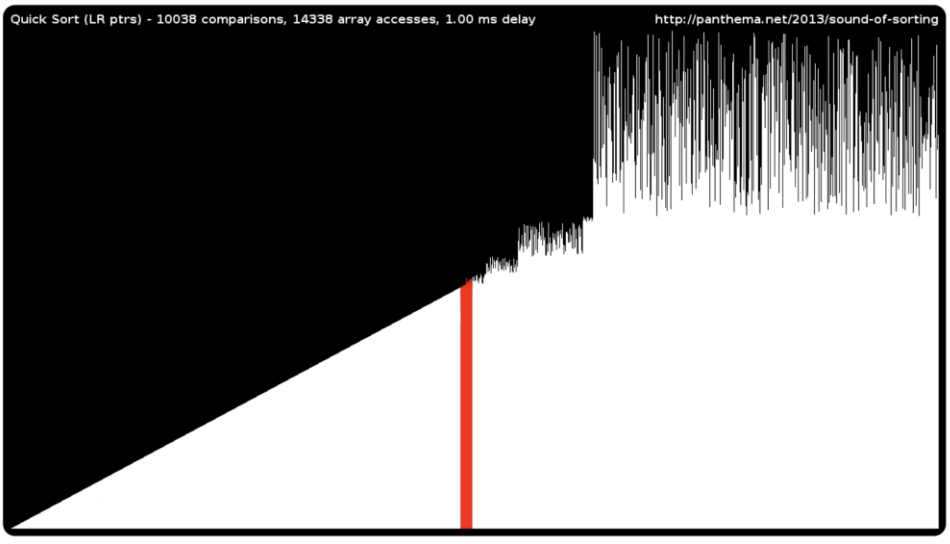


Figura 3. Ejemplo de algoritmo de ordenación llevado a cabo por un ordenador

Esta parte del taller tomará aproximadamente 35 minutos.

3.3 (Re)definición del PC

Finalmente, se presentará la definición de PC y una breve descripción de sus componentes, con el objetivo de reconstruir el término PC desde un punto de vista global.

A partir de la imagen presentada en el marco teórico, utilizando un proyector, se expondrá brevemente el modelo de PC de Palop y Díaz (2024) en el que se basan las dos propuestas que se llevan a cabo. Durante esta presentación se dará una definición de PC, se propondrán unas posibles componentes del mismo y se darán algunas ideas de trabajo en aula que encajan con el modelo.

El tiempo aproximado para la presentación es de 15 a 20 minutos, teniendo en cuenta que esta fase supone, por una parte, la reconstrucción del conocimiento que proponen Alsina y Mulá (2019) y, por otra, la institucionalización del conocimiento característica tras una *thinking classroom,* tal y como propone Liljedahl (2020).

Referencias

Barr, V., y Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is Involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads, 2*(1), 48–54. https://doi.org/10.1145/1929887.1929905

Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12*. Corwin Mathematics Series.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas

mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022, 41571–41789.

Palop, B. y Díaz, I. (2024). El pensamiento computacional en el aula. En Velázquez, L., ed., *Nuevos escenarios educativos, el enfoque competencial y las metodologías activas. ¿Por qué STEAM en el aula?*, pp. 215–244. Grupo Magro Editores

Palop B., Santaengracia J. J., y Rodríguez-Muñiz L. J. (2022a). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 623). SEIEM.

Palop B., Santaengracia J. J., y Rodríguez-Muñiz L. J. (2022b). Computational Thinking in the Spanish Secondary School Curriculum of Mathematics. Meaning and implications. En W. Yang, M. Majewski, D. Meade y W. K. Ho. (Eds.), *Proceedings of ATCM 2022* (p. 21999). ATCM

Royal Society. (2012). *Shut down or restart: The way forward for computing in UK schools*. http://royalsociety.org/education/policy/computing-in-schools/report/

Santaengracia, J. J., Palop, B., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717–3725. https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118

Aprender Matemáticas con un trasfondo histórico. El Álgebra de Pedro Núñez[46]

Autora: Iolanda Guevara Casanova

iguevara@xtec.cat

Departament d'Educació y Departament de Matemàtiques i Ciències Experimentals UAB

Autora: Fàtima Romero Vallhonesta

fatima.romerovallhonesta@gmail.com

Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica. UPC.

Núcleo temático: Recursos para el aula Procesos

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

Uno de los objetivos del grupo de historia de ABEAM[47], al cual pertenecemos, es diseñar actividades para aprender conceptos o procedimientos matemáticos a partir de fuentes originales. En este taller mostraremos cómo se puede utilizar un texto del siglo XVI, el *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* de Pedro Núñez, con esta finalidad. Empezaremos con una breve presentación del autor y de su obra situándolo en el contexto de la algebrización de las matemáticas y mostraremos ejemplos de actividades a partir de problemas del *Libro de Algebra.* Después será el turno de los asistentes que, trabajando en grupos, deberán convertir algunos problemas del *Libro de Algebra* en actividades para el aula. Terminará la sesión con una puesta en común, las conclusiones de la cual, recogeremos y enviaremos a los asistentes que lo deseen.

Palabras clave: aprendizaje de las matemáticas, álgebra, geometría, textos históricos, criterios de evaluación.

[46] Este trabajo forma parte del proyecto PID2020-113702RB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

[47] Associació de Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge de les Matemàtiques.

Introducción

El diseño de actividades para aprender conceptos o procedimientos matemáticos a partir de fuentes originales obliga en algunos casos a un trabajo previo de traducción de esos textos a una lengua comprensible para las personas a quienes se dirige la actividad. El hecho de que el autor elegido escribiese su obra en castellano ha sido uno de los motivos para elegir el texto de Núñez. Además, el objetivo de la obra, presentar el álgebra como una disciplina con categoría propia dentro de la matemática de la época, siglo XVI, que se puede usar para resolver todo tipo de problemas aritméticos y geométricos, la convierte en un recurso muy interesante para utilizar en el aula de Educación Secundaria. En esta etapa educativa, las destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos geométricos y algebraicos se van desarrollando en el alumnado de manera que, hacia el tercer curso de la ESO, el análisis y la resolución de algunos problemas a la manera de Pedro Núñez, pueden ser un incentivo para comprender con más profundidad el lenguaje matemático que se está trabajando en el aula.

En concreto, en el currículo de Matemáticas del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, encontramos criterios de evaluación de las competencias específicas y también saberes que justifican la introducción de Núñez y su obra en el aula de Matemáticas.

Criterios de evaluación de las competencias específicas

Destacamos tres criterios de evaluación de las competencias específicas directamente relacionados con aprender matemáticas con un trasfondo histórico:

“6.3 Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual” (BOE 217/2022: 146).

Pedro Núñez, matemático y científico del siglo XVI, contribuyó al desarrollo del álgebra como una rama propia dentro de la disciplina matemática apta para resolver

problemas aritméticos y geométricos. La introducción a la obra de este autor puede favorecer la comprensión, por parte del alumnado, de la relación entre aritmética, geometría y álgebra más allá de la habitual consideración del álgebra como generalización de la aritmética que olvida las conexiones con la geometría.

“8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor” (BOE 217/2022: 146).

La lectura, comprensión y análisis de la resolución de problemas “a la manera de Núñez” puede ayudar a reflexionar y entender mejor la necesidad de comunicar mensajes con contenido matemático de manera precisa y rigurosa.

“9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos” (BOE 217/2022: 146).

Leer los textos originales de Núñez puede ser un reto para el alumnado. La obra está en castellano, pero es densa y las expresiones algebraicas que utiliza distan en cierta manera de la que están empezando a aprender, pero a su vez puede ser un aliciente llegar entender cómo razonaba y se expresaba un matemático del siglo XVI.

Teniendo en cuenta que los problemas que elegimos para el taller se refieren a la geometría, pero se resuelven con la ayuda del álgebra, también debe mencionarse, como mínimo uno de los dos criterios de evaluación de la competencia 5 referida a establecer conexiones: “5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente” (BOE 217/2022), tal como se indica en la presentación de los problemas trabajados en el taller.

Los saberes

Dentro de los saberes del currículo de primero a tercero de la ESO podemos leer:

“2. Modelo matemático.

− Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático". (BOE 217/2022: 148-149).

La lectura de algunos razonamientos de Núñez para deducir algoritmos de cálculo o para resolver problemas con álgebra, es una actividad valiosa que permite al alumnado desarrollar nuevas estrategias de deducción.

Siguiendo con los saberes:

"3. Variable.

− Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas". (BOE 217/2022: 149).

Núñez, como otros autores de la época, introduce notaciones para las incógnitas: *cosa* y *censo*, y también abreviaciones para denominarlas: *co* (la actual x) y *ce* (x^2). De nuevo, la lectura de Núñez motiva el uso de la terminología actual y es un paso intermedio entre la escritura natural del pensamiento algebraico, el lenguaje sincopado y el algebraico.

"4. Igualdad y desigualdad.

− Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica". (BOE 217/2022: 149).

Aquí ya estamos de lleno en las ecuaciones de primer y segundo grado que resuelve Núñez y justamente proponemos analizar, a través de sus textos, cómo las resuelve y acompañar al alumnado para establecer conexiones con la resolución de la ecuación de segundo grado que ellos ya conocen o que van a conocer después de esta introducción histórica.

Autor y contexto

Pedro Núñez (1502-1578) fue un matemático portugués, que es considerado por algunos historiadores la figura más importante de la ciencia portuguesa. A pesar de

que su obra abarca diversos campos del conocimiento, prima la producción científico-técnica sobre la que se podría considerar más literaria. De hecho, Núñez dedicó una gran parte de su actividad intelectual a la fundamentación científica de la navegación. Nació en Alcácer do Sal y por este motivo añadió el topónimo Salaciense a su nombre en la mayoría de sus textos impresos.

Algunos aspectos de su biografía se conocen por los interrogatorios a que fueron sometidos sus nietos durante los procesos inquisitoriales. Cursó estudios introductorios a la Medicina en la universidad de Salamanca, estudios que cursaban habitualmente quienes estaban interesados en temas científicos[48]. Hacia 1534, según el autor manifiesta, podría haber empezado a escribir el *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* probablemente en su estancia en Salamanca, pero no se publicaría hasta el 1567. Con esta obra, Núñez quería reivindicar el álgebra en una época en que esta nueva disciplina tenía que hacerse un hueco entre una aritmética y una geometría consolidadas.

En la segunda mitad del siglo XVI empezaron a aparecer tratados dedicados a difundir las reglas básicas del álgebra que, poco a poco, fue dejando de ser concebida solo como una herramienta para la resolución de problemas para convertirse ella misma en un objeto de estudio. De hecho, empezó a ser considerada como una rama de las Matemáticas a partir de la difusión de la obra *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de François Viète (1540-1603).

Los primeros tratados españoles con contenido algebraico aparecieron en forma de capítulos de *aritméticas*[49], como la mayoría de los primeros tratados europeos. Estos textos contrastaban de manera explícita el Arte Mayor o álgebra con el Arte Menor, tal como se denominaba a menudo a la aritmética. Las obras con contenido algebraico publicadas en la Península Ibérica en el siglo XVI, todas ellas en la segunda mitad, fueron: el *Libro primero de Arithmetica Algebratica* (1552) de Marco Aurel, el

[48] Más información sobre el autor en Leitão (2010).

[49] En este texto, las palabras "álgebra" y "aritmética" las utilizaremos con dos significados. Uno de ellos es el habitual y el otro hará referencia a tratados de álgebra o aritmética. Aunque creemos que el sentido está claro en cada caso, cuando nos refiramos a tratados escribiremos los nombres en cursiva.

Compendio de la Regla de la Cosa (1558) de Juan Pérez de Moya, la *Arithmetica práctica y speculativa* (1562) del mismo autor, la *Arithmetica* (1564) de Antic Roca y el *Libro de Algebra* (1567) de Pedro Núñez que es el que trataremos a continuación y que consideramos que tiene un gran valor pedagógico[50]. De hecho, la lectura de esta obra puede sugerir materiales para que el profesorado diseñe actividades en las cuales el alumnado conecte el álgebra con la geometría. Si bien estas conexiones se han promovido desde hace años en la educación matemática, actualmente quedan recogidas en el Real Decreto 217/2022 al que ya hemos hecho referencia.

La obra

El *Libro de Algebra* tiene una estructura compleja. Se trata de una obra muy extensa y distinta de las *álgebras* de Aurel, Pérez de Moya y Roca. El intervalo que hay desde que se empezó a escribir hasta que fue publicada hace que sea difícil de analizar[51].

La obra empieza con una carta escrita en portugués dedicada al cardenal y infante don Enrique donde Núñez explica por qué escribe la obra y cita algunos de sus autores de referencia. Aquí el autor deja clara su intención de escribir un trabajo práctico, sin teoría previa a la cual considera que se debería dedicar demasiado tiempo, y con muchos ejercicios resueltos, de manera que no sea necesaria la ayuda de un experto para su comprensión.

El *Libro de Algebra* tiene tres partes que Núñez llama principales. La primera de ellas consta de 6 capítulos que tratan sobre la finalidad del álgebra, sus reglas y *conjugaciones*, que es como se refiere Núñez a las ecuaciones, y sobre las demostraciones de las reglas de las *conjugaciones simples y compuestas*[7] y los casos particulares.

La segunda parte principal tiene tres subdivisiones, la primera de las cuales tiene 11 capítulos donde el autor declara las incógnitas que denomina *dignidades* y explica

[50] Para más información, véase Romero-Vallhonesta (2022) y sobre las fuentes del Arte Mayor en la Península Ibérica: Romero-Vallhonesta et al. (2018).

[51] Más información sobre la estructura de la obra en Bosmans (1908). [7] Ecuaciones de primer y segundo grado en la terminología actual.

cómo operar con ellas. La segunda subdivisión de esta segunda parte principal consta de 12 capítulos dedicados a las operaciones con raíces. Núñez dedica los 14 primeros capítulos de la tercera subdivisión a la teoría de las proporciones y el último a las raíces de los binomios, aunque el autor se refiere al conjunto de los 15 capítulos como la "teoría de las proporciones".

La tercera parte principal de la obra es la más extensa y en ella el autor desarrolla la resolución de ecuaciones que había tratado en la primera parte, y lo hace de una forma mucho más completa. Consta de 7 capítulos, 5 de los cuales tienen un carácter más bien teórico y 2 de ellos ejemplifican la aplicación del álgebra a la aritmética y a la geometría.

Cierra el tratado una carta que Núñez dirige a los lectores y en la que enumeran los libros de álgebra que han llegado a España hasta el momento. Cita en ella a tres autores: Fray Lucas de Burgo[52], Hieronymo Cardano[53] y Nicolo Tartalla[10]. Explica las mejoras que su obra aporta a las de estos autores y al final pide disculpas por no haber tratado la ecuación cúbica.

Las demostraciones geométricas de las reglas para resolver ecuaciones

El Libro de Algebra es el único de los tratados de álgebra publicados en la Península Ibérica en el siglo XVI que contiene demostraciones de las reglas para resolver ecuaciones. La clasificación de las ecuaciones en la obra de Núñez es la siguiente:

"Conjugaciones simples:

1. Censos iguales a cosas.
2. Censos iguales a numero.

[52] Quizás más conocido como Luca Pacioli (c. 1445 – 1517). Su obra más influyente es *De Divina Proportione.*
[53] Hieronymo, Girolamo o Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático italiano que debe su fama principalmente a su obra *Ars Magna*, primer tratado en latín dedicado exclusivamente al álgebra. [10] Núñez se refiere aquí a Niccolò Fontana, más conocido como Tartaglia, quien debe su fama a la resolución algebraica de la cúbica que fue publicada por Cardano en su *Ars Magna.*

3. Cosas iguales a numero.

Conjugaciones compuestas:

4. Censos y cosas iguales a numero.
5. Cosas y numero iguales a censo.
6. Censo y numero iguales a cosas" (Núñez, 1567:1v).

Que en lenguaje actual escribiríamos:

1. $x^2 = bx$ 2. $x^2 = c$ 3. $bx = c$ en el caso de las *conjugaciones simples* que son las que tienen dos términos y se resuelven efectuando alguna división y a veces también alguna raíz, y 4. $x^2 + bx = c$. 5. $bx + c = x^2$. 6. $x^2 + c = bx$ en el caso de las *conjugaciones compuestas* que son las que constan de tres términos y cuyo método de resolución demuestra Núñez a partir de construcciones geométricas.

Núñez demuestra las reglas para la resolución de las *conjugaciones compuestas* de tres maneras, dos de las cuales están en el cuarto capítulo de la primera parte principal. En la primera de ellas se construye la solución de la ecuación suponiendo que existe y en la segunda se construye la solución directamente y, por tanto, queda claro que existe porque se ha podido construir[54]. Vuelve el autor a las demostraciones en el segundo capítulo de la tercera parte principal. Así como en la primera parte reflexiona después de encontrar la solución con la primera construcción, planteándose que esa solución puede no existir, ahora se plantea qué pasaría si el coeficiente del término de primer grado que había supuesto par fuera impar. Esta nueva demostración contribuye a pensar que la obra se escribió en diversas etapas, tal como el mismo autor manifiesta.

En el taller mostramos la primera de las demostraciones de Núñez en forma de actividad para el aula tal como se propuso a alumnos de 3.º de la ESO y un resumen

[54] Más información sobre estas dos demostraciones en Massa-Esteve (2010).

de cómo la resolvieron, y también algunos de los problemas del capítulo 7 de la tercera parte principal[55].

Los problemas 45 y 47

Estos dos problemas del capítulo 7 de la tercera parte principal, versan sobre triángulos y forman parte de los problemas que Núñez introduce en su obra mejorando la resolución de Regiomontanus[56] en el libro II (Teorema 14 y Teorema 16 respectivamente) de su obra *De Triangulis Omnimodis* (1464)[57], que Núñez demuestra conocer a la perfección.

Los hemos elegido como muestra de la manera de trabajar de Núñez porque son problemas de geometría que se resuelven mediante ecuaciones y también utilizando procedimientos propios de la geometría como el teorema de Pitágoras. De esta manera promovemos que el alumnado establezca conexiones entre la geometría y el álgebra, tal como indica la competencia específica 5 del currículum de Matemáticas[58] y como lo indican diversos autores[59].

Núñez resuelve el problema 45 primero con álgebra porque según él, es el método que permite resolver todo tipo de problemas y después sin álgebra para mostrar que también es capaz de resolverlo por otro procedimiento. En cuanto al problema 47, que también resuelve Regiomontanus, Núñez dice que él lo mejora porque no utiliza ángulos, ya que los ángulos se calculan a partir de tablas de senos y cosenos, con

[55] Véase también Romero-Vallhonesta et. al. (2023).

[56] Regiomontanus o Juan de Monteregio son los nombres con los que más frecuentemente se refieren los autores a Johann Müller (1436-1476), matemático y astrónomo que hizo importantes contribuciones a la trigonometría y a la astronomía.

[57] Esta obra se imprimió por primera vez en 1533 y posteriormente en 1561, aunque se conocía como manuscrito en el círculo de matemáticos de Nuremberg. Sobre las conexiones entre la obra de Núñez y la de Regiomontanus, véanse: Guevara-Casanova et al. (2003) i Guevara-Casanova et al. (2005).

[58] "5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado" (BOE 217/2022: 148).

[59] Guevara-Casanova et al. (2018).

muchos decimales y se obtiene un resultado que no es tan exacto como cuando se resuelve por álgebra.

El problema 45 (Núñez, 1567: 269r- 270r)

El enunciado del problema es como sigue: “Si la suma de los dos lados del triangulo fuere conocida, y las partes de la base, que por la perpendicular se apartan, fueren conocidas, cada uno de los lados sera por si conocido, y la area y la perpendicular” (Núñez, 1567: 269r).

Para resolverlo, Núñez utiliza una figura que ya ha utilizado en los dos problemas anteriores y que reproducimos a continuación:

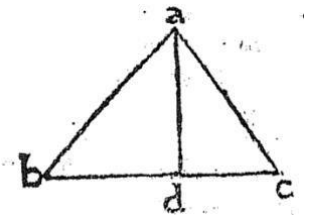
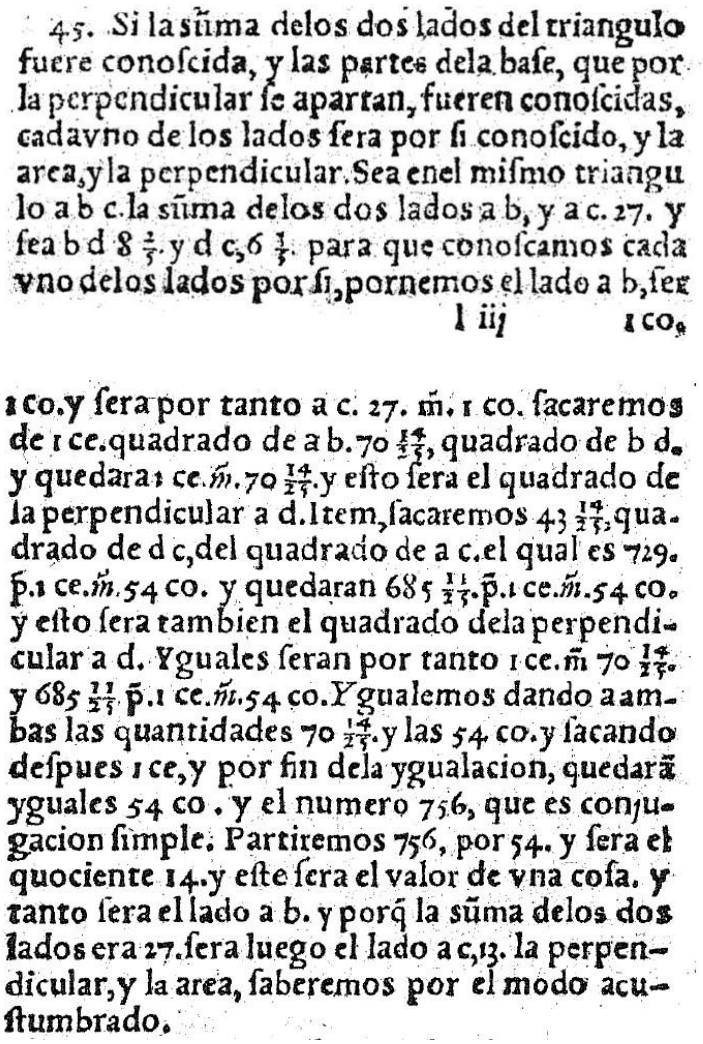


Imagen 1. Ilustración del problema 43 (Núñez, 1567: 268r)

Después de este enunciado general, el autor da valores concretos a los elementos del problema y lo resuelve por álgebra de forma retórica, tal como se muestra a continuación:



45. Si la sũma delos dos lados del triangulo fuere conoſcida, y las partes dela baſe, que por la perpendicular ſe apartan, fueren conoſcidas, cadavno de los lados ſera por ſi conoſcido, y la area, y la perpendicular. Sea enel miſmo triangulo a b c. la sũma delos dos lados a b, y a c. 27. y ſea b d 8 2/5. y d c, 6 3/5. para que conoſcamos cada vno delos lados por ſi, pornemos el lado a b, ſer

l iij 1 co.

1 co. y ſera por tanto a c. 27. m̃. 1 co. ſacaremos de 1 ce. quadrado de a b. 70 14/25, quadrado de b d. y quedara 1 ce. m̃. 70 14/25. y eſto ſera el quadrado de la perpendicular a d. Item, ſacaremos 43 14/25, quadrado de d c, del quadrado de a c. el qual es 729. p̃. 1 ce. m̃. 54 co. y quedaran 685 11/25. p̃. 1 ce. m̃. 54 co. y eſto ſera tambien el quadrado dela perpendicular a d. Yguales ſeran por tanto 1 ce. m̃ 70 14/25. y 685 11/25 p̃. 1 ce. m̃. 54 co. Ygualemos dando a ambas las quantidades 70 14/25. y las 54 co. y ſacando deſpues 1 ce, y por fin dela ygualacion, quedarã yguales 54 co. y el numero 756, que es conjugacion ſimple. Partiremos 756, por 54. y ſera el quociente 14. y eſte ſera el valor de vna coſa. y tanto ſera el lado a b. y porq̃ la sũma delos dos lados era 27. ſera luego el lado a c, 13. la perpendicular, y la area, ſaberemos por el modo acuſtumbrado.

Imagen 2a y 2b. Resolución por álgebra del problema 45 (Núñez, 1567: 269r-269v)

Reproducimos a continuación la resolución utilizando la notación actual. Los datos del problema:

ab +ac = 27; bd = 8 ⅖ y dc = 6 ⅗

Resolución:

"El lado ab sera 1 co. y sera por tanto ac. 27. m̃. 1co." en palabras de Núñez, que escribiremos en notación actual: ab = x, y ac = 27 – x.

A continuación, Núñez efectúa una serie de cálculos relativos a los cuadrados de las longitudes de los lados y segmentos de la base[17], a ambos lados de la perpendicular (altura del triángulo).

En el triángulo de la izquierda se cumple: $(ab)^2 - (bd)^2 = x^2 - (8\ ^2/_5)^2 = x^2 - (70\ ^{14}/_{25}) = (ad)^2$

Y en el de la derecha:

$(ac)^2 - (dc)^2 = (27 - x)^2 - (6\ ^3/_5)^2 = (ad)^2$

$(ac)^2 - (dc)^2 = 729 - 54x + x^2 - (43\ ^{14}/_{25}) = (ad)^2$

A continuación, Núñez iguala las dos expresiones de $(ad)^2$ y obtiene la ecuación siguiente:

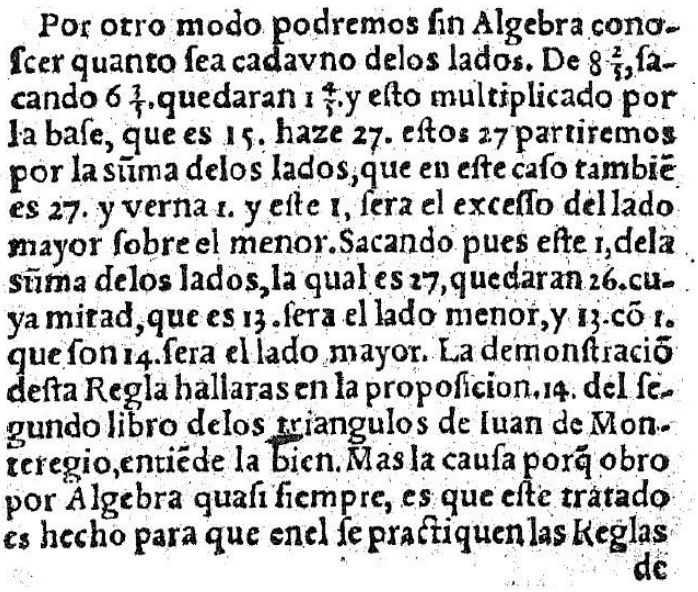
$x^2 – (70\ ^{14}/_{25}) = 729 – 54x + x^2 – (43\ ^{14}/_{25})$. Después, tal como dice Núñez, “sacando a ambas 1 *ce* (un censo, o sea x^2) y dando a ambas $70\ ^{14}/_{25}$, quedan iguales 54 *co* y el numero 756”[18], es decir, en notación actual: 54x = 756, “que es conjugacion simple” que el autor resuelve dividiendo 756 entre 54, de manera que x = 14 = ab y ac = 27–14 = 13.

Seguidamente, Núñez dice que se puede resolver sin álgebra (imagen 4). Explica las operaciones que hay que hacer con los datos del problema y que reproducimos en notación actual.

---

[17] Las igualdades se cumplen porque el triángulo ha quedado dividido en dos triángulos rectángulos, y aplica, por tanto, el teorema de Pitágoras.

[18] 729 – 43 – 14/25 +70 + 14/25 = 756



Por otro modo podremos ſin Algebra conoſcer quanto ſea cadavno delos lados. De 8 2/5, ſacando 6 3/5. quedaran 1 4/5. y eſto multiplicado por la baſe, que es 15. haze 27. eſtos 27 partiremos por la ſūma delos lados, que en eſte caſo tambiē es 27. y verna 1. y eſte 1, ſera el exceſſo del lado mayor ſobre el menor. Sacando pues eſte 1, dela ſūma delos lados, la qual es 27, quedaran 26. cuya mitad, que es 13. ſera el lado menor, y 13. cō 1. que ſon 14. ſera el lado mayor. La demonſtraciō deſta Regla hallaras en la propoſicion. 14. del ſegundo libro delos triangulos de Iuan de Monteregio, entiēde la bien. Mas la cauſa porq̄ obro por Algebra quaſi ſiempre, es que eſte tratado es hecho para que enel ſe practiquen las Reglas de

Imagen 3. Resolución sin àlgebra del problema 45 (Núñez, 1567: 268v)

Los datos:

ab +ac = 27; bd = 8 ⅖; dc = 6 ⅗

Los cálculos que efectúa Núñez:

bd - dc = 8 ⅖ - 6 ⅗ = 1 ⅘; bd + dc = 8 ⅖ - 6 ⅗ = 15

(bd - dc) (bd + dc) = 1 ⅘ · 15 = 15 + 60/5 = 15 + 12 = 27

Que divide por la suma de los lados, que también es 27 y obtiene 1 que dice que es la diferencia entre los lados (ab – ac) y como que ya tiene la suma (ab + bc = 27) puede operar y encontrar ab y bc.

De hecho, está usando la igualdad: $(bd)^2 - (dc)^2 = (ab)^2 - (ac)^2$ pero esta igualdad no es evidente. Él mismo dice que la demuestra Regiomontanus, en la Proposición 14 del libro II de la obra *De Triangulis Omnimodis*.

Regiomontanus remite a su Teorema 17 del libro I, que consiste en la aplicación del teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos en que el inicial queda dividido por la altura:

$(bd)^2 + (ad)^2 = (ab)^2$; $(dc)^2 + (ad)^2 = (ac)^2$

Si restamos las dos igualdades, se obtiene la igualdad: $(bd)^2 - (dc)^2 = (ab)^2 - (ac)^2$

Y continúa diciendo Núñez que lo hace con álgebra porque ayuda a la demostración y a entender el razonamiento: “Mas la causa porque obro por Algebra casi siempre, es que este tratado es hecho para que se practiquen las reglas de Algebra en los casos de Geometria. Y tambien porque quien obra por Algebra va entendiendo la razon de la obra que hace, hasta la igualacion ser acabada. Y siendo hecha, queda en alguna de las sobredichas conjugaciones, las cuales tienen sus Reglas. De suerte, que quien obra por Algebra, va haciendo discursos demostrativos. Pero el que obra por otras Reglas, como es la Regla por la qual resolveremos este caso 45, sacado del dicho libro de Juan de Monteregio, no entienden de luego la razon de la obra que va haziendo, y para poner la razon, la cual es differente en differentes casos, seria necessario usar de muchas y varias proposiciones de Euclides. Y esto se escusa con las reglas de Algebra, porque por ellas demostramos todos los casos, sin aver necessidad de otras proposiciones de Euclides: porque nos basta para los casos de Geometria, la proposicion 47 del primero de Euclides, que es el invento Pithagorico, con algunos faciles documentos (Núñez, 1567: 269r-270v)”.

Y a continuación todavía ofrece otra manera de resolverlo sin álgebra y dice que lo ha extraído de la misma obra (Juan de Monteregio).

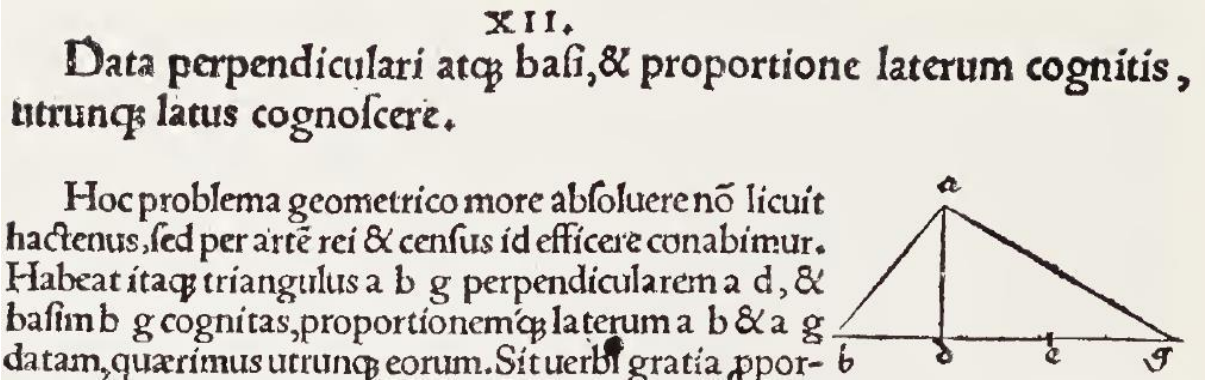
Efectúa una serie de cálculos con los datos del problema:
$(ab + ac)^2 = 27^2 = 729$, $bd = 8\ 2/5$, $(bd)^2 = 70\ 14/25$
$dc = 6\ 3/5$, $(dc)^2 = 43\ 14/25$, $(bd)^2 - (dc)^2 = 27$ Y utilizando la igualdad siguiente:

$$\frac{(ab+ac)^2+(bd)^2-(dc)^2}{2(ab+ac)} = ab$$

Obtiene: $\frac{729+27}{54} = \frac{756}{54} = 14 = ab$ y por tanto ac = 13

A continuación, el autor hace toda una disertación sobre el uso del álgebra: “Pero obrando por este modo, y encobriendo el artificio, no se engendra ciencia, y por esta causa aplaze mas este arte de Algebra, la cual puesto que sea práctica, van pero en ella las operaciones siguiendo las demostraciones. De manera, que quien sabe por Algebra sabe cientificamente. (Núñez, 1567: 270r)”.

Después de esta disertación explica que el problema siguiente, el 46, también lo resolvió Monteregio (Libro II, Teorema 12) y el mismo Monteregio dijo que solo lo sabía resolver por álgebra (imagen 5). Núñez también lo resuelve solo por álgebra, pero con algunas diferencias: los datos numéricos son distintos, también es diferente la parte del triángulo sobre la que sitúa la incógnita y el tipo de ecuación de segundo grado a la que llega, de las tres compuestas que también utiliza Monteregio[60].



XII.

Data perpendiculari atq; basi,& proportione laterum cognitis, utrunq; latus cognoscere.

Hoc problema geometrico more absoluere nõ licuit hactenus,sed per artẽ rei & census id efficere conabimur. Habeat itaq; triangulus a b g perpendicularem a d,& basim b g cognitas,proportionemq; laterum a b & a g datam,quærimus utrunq; eorum. Sit uerbi gratia ppor-

Imagen 4. Regiomontanus dice que resuelve el problema per «arte rei & census[61]» (Müller, 1464: 51)

El problema 47 (Núñez, 1567: 271r-272r)

El enunciado del problema es como sigue: “Si la base del triángulo fuere conoscida, y la perpendicular también conoscida, y la suma de los dos lados conoscida, cadavno porsi sera conoscido (Núñez, 1567: 271r)”.

Para resolver este problema, Núñez da el valor 5 a *bc*, $2\frac{2}{5}$ a *ad* y 7 a *ab*+*ac* y explica que Monteregio[62] primero busca los ángulos *b* y *c* y que a partir de estos ángulos y de la base encuentra los otros lados.

[60] Guevara-Casanova et. al. (2003; 2005).

[61] El álgebra se conocía también como el arte de la cosa i del censo que son los nombres que solían darse a la incógnita y a su cuadrado.

[62] Este problema es el Teorema XVI del libro II, *De Triangulis Omnimodis* (1464: 53-54), de la traducción comparada al inglés, *On Triangles*, de Hughes (1967: 122-124).

Núñez argumenta que este resultado no puede ser preciso porque los ángulos se deben buscar con tablas de arcos y cuerdas, que tal como se dice en el *Almagesto*[63], no puede ser exacto porque muchos valores se obtienen a partir de raíces sordas (irracionales en nomenclatura actual) que se obtienen a partir de otras raíces sordas. Por tanto, el valor real de estos lados no se puede hallar. Y Núñez sigue diciendo que él resolverá el problema más fácilmente y de manera más precisa con álgebra y lo hace de la manera siguiente:

Se multiplica $2\frac{2}{5}$ por $2\frac{1}{2}$ (la mitad de la base), se obtiene 6 como valor del área del triángulo. Una vez obtenida el área del triángulo, el autor continúa diciendo que en el problema 37[64] se había obtenido una fórmula para el área, esto es la fórmula de Herón $\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ y la utiliza para resolver el problema en cuestión.

Primero calcula la mitad de la suma de los lados: $\frac{7+5}{2} = 6.$ El exceso 6 - 5 sobre la base es 1. Toma como incógnita *ab* (1 *co.*), por tanto *ac* será: $7.\widetilde{m}.1.co.$ Después resta esta cantidad de 6 y obtiene . $1.co.\widetilde{m}.1$ Núñez puede ahora multiplicar las 4 cantidades de la fórmula de Herón y obtiene: $42.co.\widetilde{m}.6.ce.\widetilde{m}.36$, cuya raíz es el área del triángu-lo. Pero esta raíz también sebe ser 6, con lo cual $42.co.\widetilde{m}.6.ce.\widetilde{m}.36\ iguales\ a\ 36$, expresión que debe transformar de manera que todos los términos sean positivos, llegando a la ecuación $42.co.iguales\ a\ 6ce.p\ 72$, y dividiendo todos los términos por 6, obtiene la forma estándar que corresponde a la tercera de las compuestas y obtiene[65] 3 como valor de *ab*, siendo 4 el valor de *ac.*

Al final del problema vuelve a hablar de Monteregio diciendo que él no había obtenido con su método esos valores tan precisos. Este es uno de los ejemplos en los que Núñez insiste sobre la importancia del álgebra para resolver problemas de una manera más precisa que por otros métodos.

[63] El *Almagesto* es la mayor obra astronómica de Claudio Ptolomeo (c. 100 – c. 170).
[64] Núñez (1567: 249r-259r).
[65] Los cálculos para obtener la solución a partir de la forma estándar no están detallados. De hecho, el autor los ha explicado ya al principio de su obra.

Consideraciones finales

El *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, obra de uno de los matemáticos más relevantes de la Península Ibérica del siglo XVI, puede ser una buena fuente de inspiración para elegir problemas para el aula en los que la Geometría es el contexto para introducir el Álgebra y viceversa y también para ver cómo un mismo problema se puede resolver con o sin álgebra. Algunos problemas se pueden plantear tal como los enuncia Núñez sin dar ninguna indicación y comparar los métodos de resolución que hayan surgido, con el del autor. Para otros problemas quizás sea mejor dar algunas ideas, o pautar los pasos, pero siempre dependerá de los alumnos a los cuales vaya dirigida la actividad y de si ya se ha introducido o no el álgebra.

También es interesante el *Libro de Algebra* para recordar algunos teoremas relacionados con la Geometría que a veces no se tratan en las aulas, a menudo por una introducción prematura del álgebra. De este modo se pueden proporcionar herramientas para que el alumnado se dé cuenta de que un problema se puede resolver por diferentes métodos y pueda evaluar así, los puntos fuertes y los puntos débiles de hacerlo de una forma o de otra.

El propio autor también da juego para trabajarlo en el aula. Se puede hablar de él o bien encargar a los alumnos un pequeño trabajo sobre el personaje. Lo que sí consideramos necesario es situar la obra en su contexto y que los alumnos sean conscientes de que pueden entender un texto del siglo XVI, cuya lengua no difiere mucho del castellano actual.

Por último, querríamos remarcar la importancia del conocimiento de la historia de las matemáticas por parte del profesorado, puesto que aparte de ser un buen recurso para el aula puede ayudar a comprender las dificultades de los alumnos para entender algún concepto o procedimiento, que a menudo tienen relación con las dificultades que ese concepto o procedimiento han tenido para consolidarse.

Referencias

Bosmans, H. (1908). L'algèbre de Pedro Núñez. *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, n.º 3, 222-271.

Cardano, G. (1545). *Ars Magna.* Nürnberg: Johann Petreius (translation into English by Witmer, R. T. de 1968. M.I.T. Cambridge, reprint by Dover, New York el 1993).

Guevara-Casanova, I. & Casals-Puit, M. À. (2003). Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l'obra de Triangulis Omnimodis (1464) de Regiomontanurs (1436-1476), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 191-199.

Guevara-Casanova, I. & Massa-Esteve, M. R. (2005). Mètodes algebraics a l'obra de Regiomontanus (1436-1476). *Biaix*, n.º 24, 27-34.

Guevara-Casanova, I. & Burgués-Flamarich, C. (2018). Geometry and Visual

Reasoning: Introducing Algebraic Language in the Manner of Liu Hui and al-

Khwarizmî. En: K. M. Clark, et. al. (eds.) *Mathematics, Education and History. ICME13 Monographs*, https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018.

Leitão, H. (2010). Pedro Nunes e o Libro de Algebra. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, vol. XI, 9-18.

Massa-Esteve, M. R. (2010). Àlgebra i Geometria al Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria (1567) de Pedro Núñez. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, vol. XI, 101-125.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 217/2022, de

29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, n.º 76, de 30 de marzo de 2022, 41571-41789.

Müller, J. (1464). *De Triangulis Omnimodis*, trad. Hughes. B. (1967) Regiomontanus on triangles. De triangulis omnimodis by Johan Müller. University of Wisconsin Press. Madison.

Núñez, P. (1567). *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Anvers: En casa de los Herederos de Arnoldo Birckman a la Gallina Gorda.

Pacioli, L. (1494). *Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni et Proportionalita*.

Paganino de Paganini. Venezia.

Romero-Vallhonesta, F. & Massa-Esteve M. R. (2018). The main sources for the Arte Mayor in sixteenth century Spain. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* http://dx.doi.org/10.1080/17498430.2017.1419704.

Romero-Vallhonesta, F. (2022). La introducción del álgebra en la Península Ibérica.

Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. Vol 5, nº. 3, 577-594.

Romero-Vallhonesta, F. Guevara-Casanova, I. & Puig-Pla, C. (2023). Pedro Núñez: Algebra is also for geometrical problem solving. En Barbin, É., Capone, R., Fried, M. N., Menghini, M., Pinto, H., & Tortoriello, F. S. (Eds.) *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 9th ESU.* Edizioni Nouva Cultura. Roma.

Teselaciones de papel

Carme García Caballero
carmegarci@gmail.com
Institut Vilanova del Vallès

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Con el objetivo de explorar los recubrimientos del plano y la construcción de algunos sólidos platónicos, se elaborarán con papiroflexia teselas cuadradas y triangulares conjuntamente con módulos de unión. Durante el plegado de las piezas se citarán diversas actividades que se pueden proponer en un aula de primaria o secundaria. Los asistentes elaborarán sus propios mosaicos y poliedros en pequeños grupos. Por último, a modo de ejemplo, se propondrán más actividades y se mostrarán trabajos hechos por alumnos.

La finalidad última es mostrar una herramienta versátil y económica que ayude a trabajar la geometría en el aula con materiales fabricados por los mismos alumnos.

Palabras clave: Geometría, Mosaicos, Sólidos Platónicos, Papiroflexia.

1. Introducción

Son muchos los beneficios que aporta la papiroflexia tanto a nivel personal como académico. Entre ellos se destacarían: concentración, pensamiento computacional, precisión y pulcritud, paciencia, perseverancia, memoria, motivación, creatividad, visión espacial y lectura de gráficos.

En el aula, además, el uso de la papiroflexia contribuye a mejorar la cohesión de grupo, a trabajar de forma cooperativa, propicia un buen clima, puede ser usada de forma interdisciplinar y, para algunos alumnos, puede convertirse en un hobby instructivo.

Cuando se lleva una actividad de papiroflexia al aula hay algunos aspectos que deben tenerse en cuenta. Para empezar, es conveniente que se sienten en parejas o grupos pequeños para evitar la frustración y que todo el alumnado pueda completar la actividad.

Respecto al material, debe ser preparado con antelación. Es importante elegir un papel apropiado para la pieza que se quiere doblar y éste deberá ser cortado con las medidas oportunas. Si es necesario se proporcionarán fotocopias con los diagramas de plegado o se irán dibujando los esquemas sobre la marcha.

Durante la actividad el docente deberá ir pasando por las mesas para comprobar que cada persona sigue el desarrollo de la figura. Puede ser de gran utilidad llevar figuras a medio plegar para dárselas a los alumnos que presenten más dificultades en seguir el proceso. Si una actividad requiere tiempo de reflexión o de cálculo habrá que repartirla en un par de sesiones para poder sacarle el máximo provecho.

Para figuras modulares o con muchos pliegues es de mucha ayuda ofrecer un sencillo vídeo además de los diagramas.

2. Plegado de las piezas Plegado del cuadrado.

Plegado del triángulo.

Módulo de unión.

(Método de Francesco Decio usado con permiso)

2.1. Actividades relacionadas con el plegado

En relación al cuadrado, notar porqué el primer doblez puede ser aleatorio.

Después de doblar el triángulo ver qué relación hay entre la figura final y el papel utilizado.

Al doblar el módulo de unión se puede demostrar que el ángulo obtenido es de 30º. Es preferible hacerlo con este módulo en vez de hacerlo con el triángulo porque el proceso del triángulo es complicado.

3. Actividades en el plano

3.1 Copiar figuras (con cuadrícula, colores, silueta, objeto)

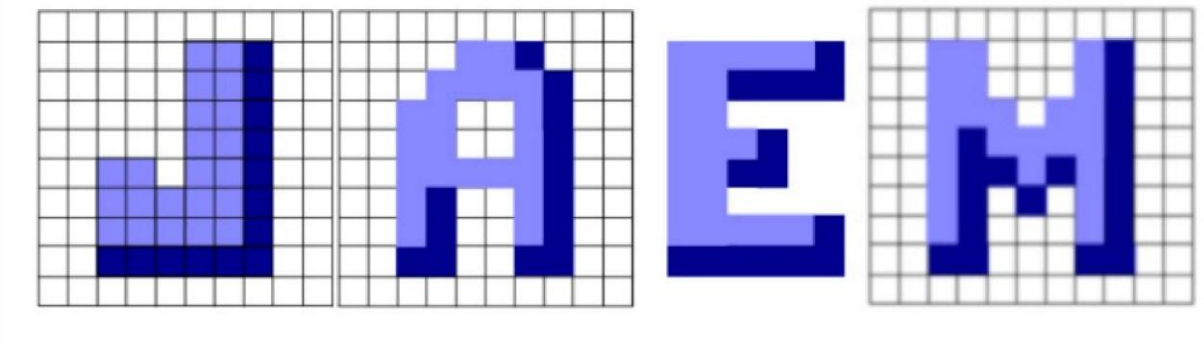


Imagen 1. Letras

3.2 Pentominós

Guiar en el interesante proceso de ver cuantos hay, establecer un proceso para crearlos todos y, finalmente, identificarlos con letras.

Copiar figuras hechas con algunos o todos los pentominós.

Hacer figuras propias.

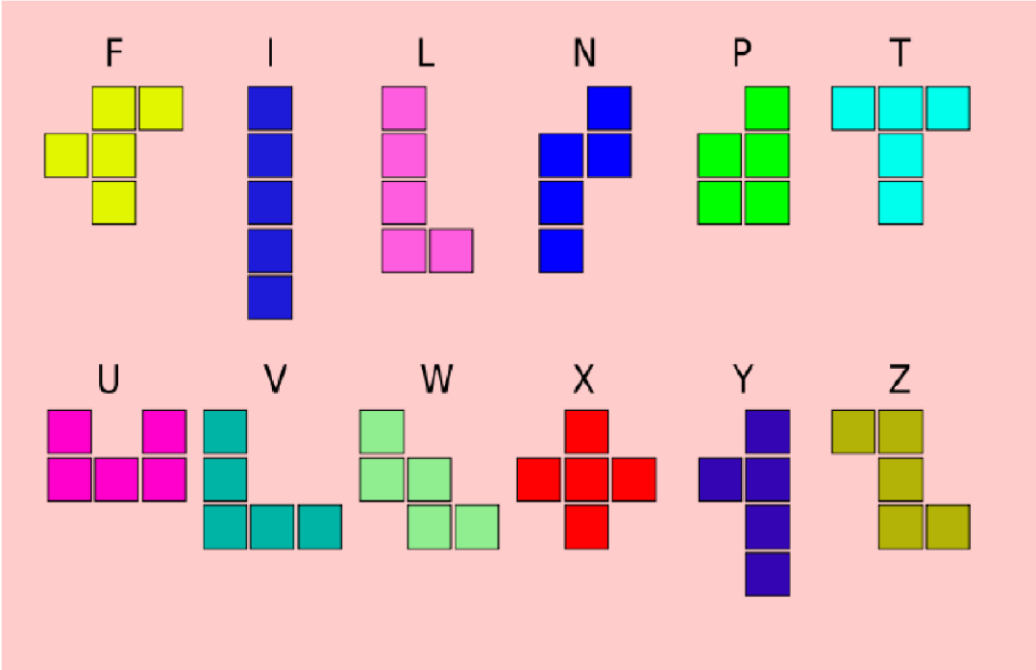


Imagen 2. Pentominós. R.Vázquez

3.3 Mosaicos

Para que un recubrimiento del plano sea considerado mosaico matemático debe cumplir las siguientes características: Tiene quedar recubierto todo el plano con piezas que no se superpongan ni dejen espacios entre ellas. Y los vértices de piezas vecinas tienen que coincidir.

Los mosaicos generados a partir de un polígono regular, se llaman mosaicos regulares. Se puede comprobar que solo hay tres. Hechos a partir de triángulos, cuadrados y hexágonos.

Los mosaicos generados con más de un polígono regular se llaman semirregulares. Hay ocho mosaicos de este tipo. Tener en cuenta que en cada vértice deben concurrir el mismo tipo de polígonos y en el mismo orden.

Los asistentes pueden crear sus propios mosaicos con las figuras hechas anteriormente, para esta actividad deberán ponerse en pequeños grupos que mantendrán para las actividades del siguiente apartado.

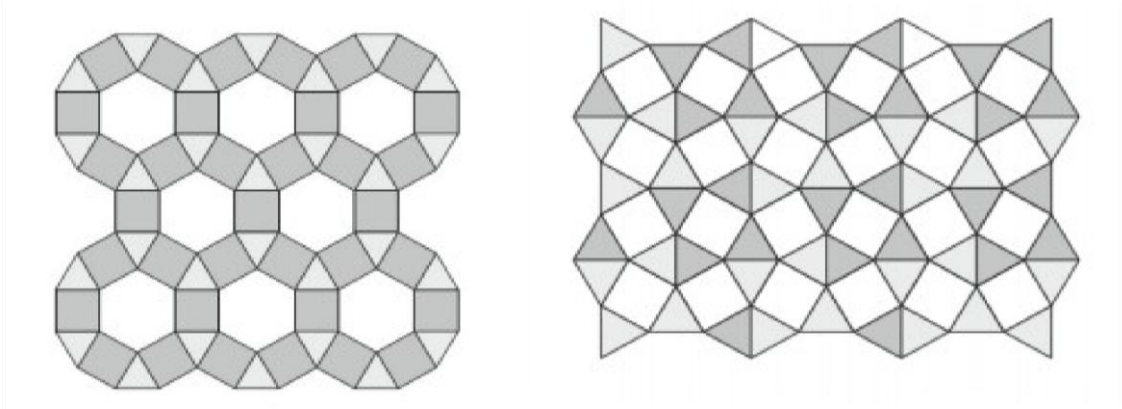


Imagen 3. Mosaicos. Francesco Decio

4. Actividades en el espacio

4.1 Sólidos platónicos

Se puede comenzar con los poliedros con caras triangulares: tetraedro, octaedro e icosaedro (si algún grupo tiene suficientes piezas). Ver que no puede haber más con caras triangulares.

Comprobar que con cuadrados solo se puede construir el cubo. Hacer varios en cada grupo para las actividades finales.

Mostrar el dodecaedro hecho con papiroflexia (sin construirlo).

Demostrar que estos son todos los sólidos platónicos existentes.

4.2 Figuras compuestas de cubos

Mostrar las piezas del cubo soma y otras construcciones que se pueden hacer con ellas.

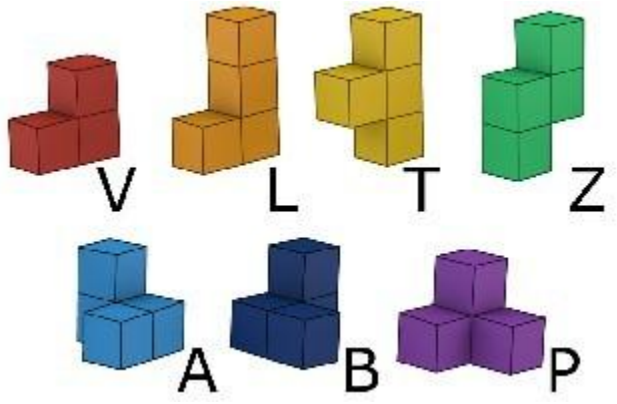


Imagen 4. Piezas cubo soma. MMACA

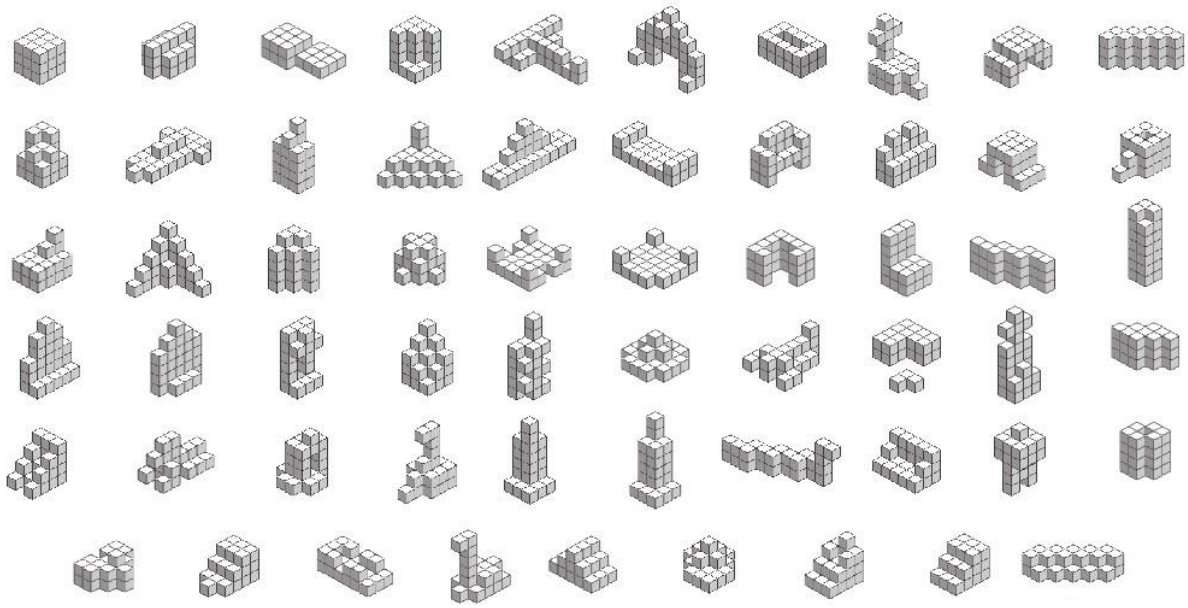


Imagen 5. Cubo soma y otras construcciones. MMACA

Explicar el juego de mesa Rumis.

Imagen 6. Rumis. Amazon

4.3 Otros poliedros

Mostrar otros poliedros que se pueden hacer con estas mismas piezas.

Algunos sólidos arquimedianos.

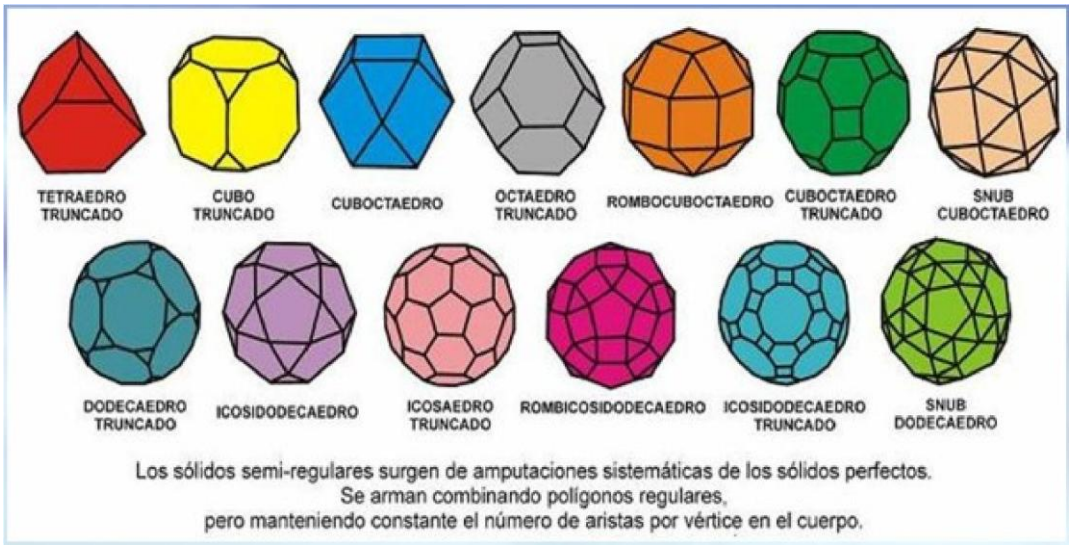


Imagen 7. Sólidos arquimedianos. Vera spa

5. Conclusiones

Es un material que puede ser útil tanto en el aula de primaria como en el de secundaria, con un proceso de plegado sencillo y muchas aplicaciones.

Para finalizar se muestran imágenes de actividades hechas con alumnos de ESO.

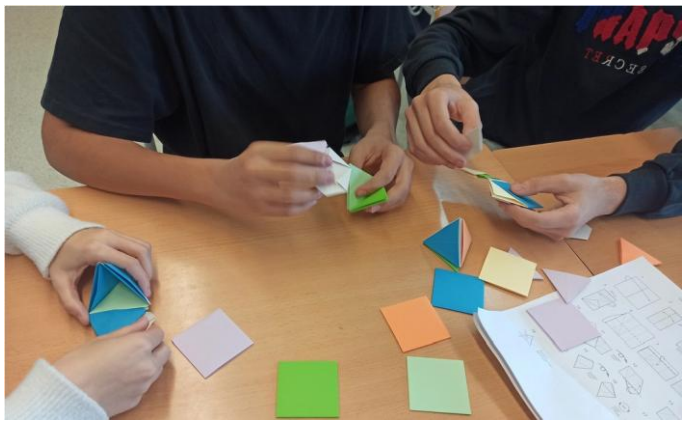


Imagen 8. Alumnos de ESO

Referencias

Dad's gaming addiction (2014). *Rumis Ep140*. *https://www.youtube.com/watch?v=TZMiMDDBL28*

MMACA. *Cubo soma* . *https://mmaca.cat/es/moduls/cub-soma*

Vázquez, R. (2009) *Pentominós*. *http://www.ricardovazquez.es*

Vera spa(2018) *Sólidos arquimedianos*. *https://veraspa.com.mx/wp-content/uploads/2018/03/ARQUIMEDIANOS.pdf*

Juegos abstractos matemáticos

José Muñoz Santonja

josemunozsantonja@gmail.com

Profesor del proyecto ESTALMAT en Andalucía Occidental.

Antonio Ledesma López

antonioledesmalopez@gmail.com

Profesor del proyecto ESTALMAT en la Comunidad Valenciana y miembro de la Junta de Gobierno de la RSME.

Juan Antonio Hans Martín

juanantonio.hans@gmail.com

Profesor del proyecto ESTALMAT en Andalucía Occidental.

Antonio Fernández-Aliseda Redondo

aliseda3.0@gmail.com

Profesor del proyecto ESTALMAT en Andalucía Occidental.

Núcleo temático: Recursos para el aula. Divulgación matemática.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Educación Primaria.

RESUMEN

Dentro de los métodos y técnicas de la didáctica de la matemática ocupa una parte importante el mundo de los juegos; recurso muy útil en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este taller presentaremos una selección de juegos creados no hace muchos años y que tienen la catalogación de abstractos, que, entre otros aspectos, no se desarrollan en un contexto especial ya sea social, histórico, geográfico, etc., ni interviene el azar. Los hemos practicado con nuestro alumnado en el marco de la Feria de la Ciencia de Sevilla y LAM *(Lúdico-Arqueológico-Matemática)* en Requena (Valencia), celebradas este 2024.

Palabras clave: juegos, estrategia, matemática, heurísticos.

El juego y la matemática

El juego se considera una actividad intrínseca al ser humano. Es verdad que no somos los únicos animales que lo practicamos, pues hay gran cantidad de especies que también lo hacen, y no sólo los simios como más cercanos a nosotros, sino, por ejemplo, los perros y gatos que están muy dispuestos al juego en los momentos de más tranquilidad, como puede corroborar cualquiera que tenga mascotas cercanas.

En el entorno cotidiano del ser humano es frecuente la convivencia con el juego, sea en actividad física o deportiva, de índole intelectual, como los pasatiempos, o en juegos de entretenimiento como los juegos de mesa o los que vamos a trabajar en este taller.

El juego está muy relacionado con el aprendizaje. Los bebés comienzan a reconocer animales y elementos cotidianos jugando con sus imágenes en puzles o con los sonidos que producen. En edades tempranas es muy corriente jugar al iniciarse el aprendizaje de letras, números, formas e incluso de procesos de algoritmos básicos para resolver pequeños problemas.

Y, en particular, también el juego está relacionado con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como indica el profesor Luis Ferrero (1991), del que hemos tomado el título de este apartado, los juegos permiten, en algunos casos, potenciar las capacidades mentales relacionadas con la deducción, la inducción, la estrategia y el pensamiento creativo. También favorecen el trato personal y el trabajo en equipo. El juego en la enseñanza potencia la creatividad, el pensamiento lógico, la aceptación de reglas, el espíritu crítico, etc., y también, el trato personal y el trabajo en equipo.

En particular, en matemáticas, al menos desde la década de los 70 del pasado siglo, ha habido multitud de grupos de didáctica y de profesores a título individual, que han incorporado los juegos como un importante recurso didáctico, por lo que actualmente hay un rico banco de materiales para quien quiera utilizarlos en el aula.

Además, ese banco se está ampliando constantemente pues los creadores de juegos, algunos de ellos de formación matemática, están proponiendo novedades muy interesantes desde el punto de vista de nuestra disciplina. A una selección de ellos vamos a dedicar este taller.

Juegos abstractos

2.1 Contexto

Desde el año 2003, estamos participando, con alumnado de Secundaria de nuestros centros, en la Feria de la Ciencia que se celebra anualmente en Sevilla (Grupo Alquerque, 2003), y donde se presentan a público escolar fundamentalmente (aunque también pueden asistir por la tarde familias y personas interesadas), proyectos científicos preparados durante el curso, de centros que abarcan ya a casi todas las provincias andaluzas. Los alumnos son los divulgadores que muestran y cuentan a los visitantes contenidos divulgativos o relacionados con sus aprendizajes en el aula.

Cada año (este 2024 ha sido el vigésimo segundo), planteamos un proyecto diferente relacionado con las matemáticas, para el que recopilamos información, la estudiamos y ampliamos, creando temas nuevos. En este nos hemos acercado a los juegos abstractos.

Entendemos como juego abstracto aquel en el que no hay un tema o una ambientación concreta, es decir, los elementos que se utilizan podrían sustituirse por otros similares y el juego se mantendría análogo; no tiene información oculta (los jugadores disponen de toda la necesaria para poder jugar); prima la estrategia; nula presencia del azar; suelen ser juegos competitivos y tienen instrucciones claras.

A pesar de estas limitaciones, suelen dar un amplio margen para disfrutar y posibilidades para investigar (y aplicar) posibles estrategias favorecedoras de ganar.

1.2 Selección de juegos

La selección de juegos abstractos para la Feria de este año se hizo teniendo en cuenta criterios escolares y particulares del evento en el que se iban a mostrar, como:

- Que fuesen para un jugador -rompecabezas- (donde la competitividad de los juegos abstractos se manifiesta frente a desafíos a resolver) o, como mucho, dos jugadores, por el espacio y número de mesas de las que íbamos a disponer.

- El tiempo estimado de una partida no fuese excesivo (lo establecimos en máximo de 15 minutos), pues los divulgadores tenían que exponer las reglas y jugar una partida con los visitantes.

- Que las reglas fuesen sencillas, porque hay que explicarlas a los visitantes/contrincantes, asimilarlas por estos y aplicarlas durante el juego.

  Creemos que con reglas sencillas también se pueden crear argumentos lógicos complejos y estrategias no triviales.

- Que fuesen atractivos/entretenidos/divertidos/…, al menos, desde nuestro punto de vista. Una vez practicados por los alumnos se tomó la decisión de cuáles se presentarían en la Feria.

- La facilidad de construcción de los materiales, que se elaboran o construyen en los centros y normalmente incluyen las reglas del juego, el tablero y las piezas. Muchos de estos juegos están comercializados, pero dado el nulo presupuesto optamos por realizar diseños, fotocopias, plastificaciones y construcciones realizables con la colaboración del Departamento de Tecnología. Normalmente recurrimos al reciclaje de materiales (fichas de parchís o damas, tapones de botellas, botones…) para abastecernos de fichas y otros elementos.

- Aunque los juegos con estrategia ganadora son matemáticamente muy interesantes por el proceso de razonamiento para encontrarla; nos parecen poco adecuados en un proceso divulgativo con, además, poco tiempo para el análisis y descubrimiento por parte del participante.

  Además, una vez encontrada o conocida la estrategia ganadora están “quemados” como juegos. Por eso, casi todos los juegos abstractos comercializados no la tienen; no se venderían muchos.

  Estudiaremos, cuando se pueda, estrategias favorecedoras para ganar y, sobre todo, la aplicación de heurísticos propios de la resolución de problemas que ayuden en el desarrollo del juego.

  A pesar de ello se incluyeron como muestra algunos con estrategia ganadora. Recomendamos el apartado de *Juegos de Estrategia* (Numéricos y Geométricos) con información, análisis e ideas sobre veinticinco juegos que desarrolla Corbalán (1998).

- Que encajasen en el tiempo para la preparación con los escolares/divulgadores. Como los alumnos iban a ser de Secundaria y de grupos diferentes, la preparación se realizó en recreos o en horas no escolares.

2.3 Heurísticos

En la resolución de problemas matemáticos, con la que muchos juegos tienen paralelismos, se establecen unas fases o estados (que difieren algo de unos a otros investigadores) por los que el resolutor/jugador reflexivo pasa, con idas y vueltas si lo considera necesario, a lo largo del proceso de resolución/juego.

- 1. Fase de comprensión:
    - Entre las estrategias de resolución -heurísticos- de la fase de comprensión, cuando el resolutor procura entender el problema o, al menos, partes del mismo, están “Organizar la información” y “Ejemplificar”.

        - Leer y entender bien la información. Por la analogía ya citada entre resolución de problemas y juegos, en estos últimos, el conocimiento del material que los constituyen (tablero, piezas o fichas…) y de las reglas que los definen (posición inicial, movimientos, objetivo a conseguir para ganar…) debe ser lo primero que se haga. Una explicación o lectura tranquila y comprensiva es necesaria.

        - Ejemplificar. Probar, jugar varias partidas de “calentamiento”, debería ser lo siguiente. Una vez familiarizados con la situación podrían analizarse casos más sencillos (un tablero más pequeño, menor número de fichas…) que pudiesen iluminar sobre el comportamiento más general.

        - Preguntas iniciales. Puede ayudar hacerse preguntas para observar con esa perspectiva el desarrollo del juego.

            - ¿Tiene ventaja el primer jugador? ¿Y el segundo? ¿Por qué?

            - ¿En algún momento los movimientos son obligados?

            - ¿Podrían darse las tablas (empate)? ¿Me ha ocurrido? ¿Conscientemente o sin darme cuenta?

- 2. Fase de abordaje:
    - Jugar, jugar y jugar. Observar qué ocurre. Tomar notas de todo, de forma ordenada y precisa sin importar si las ideas o acciones son descabelladas o si luego resultan infructuosas para llegar a la solución del juego, pues, sin duda, ayudarán a conocer en profundidad los entresijos del mismo.

      Las fases 1 y 2 son de ida y vuelta continua

- 3. Fase de ejecución:
    - Elegir una forma de representar los movimientos para poder reproducir las distintas partidas. Ser ordenado y preciso. Analizar si existe estrategia ganadora, si hay, o no, solución y, en su caso, si hay más de una.

      Las fases 1, 2 y 3 son de ida y vuelta continua
- 4. Fase de verificación o revisión:
    - Valorar la eficacia de la notación empleada, si es mejorable, o no. Criticar los avances obtenidos. Generalizar. Hacer preguntas.

      La oscilación continua entre fases es, sin duda, clara señal de mejora y madurez del jugador, un indicador claro de la experiencia lograda.
- 5. Fase de creatividad:
    - Pensar en variantes, modificando algunas reglas, quitando o añadiendo piezas; cambiando tamaño o forma del tablero… Idear juegos similares.

      Es conveniente no abusar de esta fase que, a veces, puede resultar un enorme distractor del objetivo que se pretende. No trabajarla hasta no haber profundizado y, si puede ser, resuelto el juego casi del todo.

Vamos a comentar y desarrollar en el taller, de forma práctica, los juegos que nos dé tiempo, y veremos, posteriormente, dónde encontrar toda la información.

3. Algunos de los juegos seleccionados

3.1 Cinco vasos

3.1.1 Presentación

Es un juego muy sencillo de configuración para dos jugadores.

Se dispone de cinco vasos que inicialmente alternan la forma en que están colocados (boca arriba o boca abajo). Partimos de una disposición como la que aparece en la imagen 1. El objetivo es llegar a posición final con todos los vasos boca arriba (imagen 2).

Imagen 1. Posición inicial de *Cinco vasos*.

Imagen 2. Posición final de *Cinco vasos*.

3.1.2 Reglas de juego

Una vez sorteado quién comienza, cada jugador puede hacer, en su turno, uno de los siguientes movimientos:

a) Voltear un vaso. En este caso el vaso al que se le da media vuelta deber estar inicialmente boca abajo.

b) Voltear dos vasos. En este caso, los dos vasos deben ser consecutivos y el segundo (el de la derecha) debe estar boca abajo.

Gana el jugador que consigue llevar los vasos a la posición final.

3.1.3 Observaciones

1.- Cuando se empieza a jugar, una vez familiarizados con el juego, las victorias pueden ser imprevisibles porque aún no hay una intencionalidad estratégica ni la sospecha de que pueda existir estrategia ganadora.

Para despertar esta posibilidad puede servir el análisis de situaciones más sencillas (un tablero más pequeño, menor número de fichas…) que pudiesen iluminar sobre el comportamiento más general.

En nuestro juego, ¿qué ocurre si disminuimos la cantidad inicial de vasos a tres siguiendo la misma disposición alternada, comenzando por un vaso boca abajo?

2.- Este es un ejemplo de juego con estrategia ganadora que, además, no es difícil de analizar.

Para explicarla, como en muchas situaciones matemáticas, hemos de utilizar una notación que nos permita mostrar el proceso más fácilmente (esta necesidad puede haber aparecido si se ha realizado el estudio con tres vasos): vamos a representar por **B** la posición de un vaso que esté boca a**b**ajo, y por **R** uno que esté boca a**r**riba. Con esta notación, el ganador será el primer jugador que pase de la distribución inicial **BRBRB** a la posición final **RRRRR**. Esta notación es bastante intuitiva una vez realizada la asociación de la boca B-abajo, R-arriba. Pero también podríamos utilizar la 0-abajo, 1-arriba, que nos llevaría a 01010 (posición inicial) y 11111 (posición final).

La decisión sobre una u otra notación es muy interesante didácticamente con los alumnos e influye en la facilidad de explicación de la estrategia.

Con la primera notación, la estrategia es la siguiente:

a) El primer jugador voltea el vaso en la posición 5 (subrayado en el esquema siguiente): De BRBR<u>B</u> pasa a BRBRR.

b) El segundo jugador puede elegir entre:

   - Voltear solo el vaso 1 (de <u>B</u>RBRR pasa a RRBRR) o el 3 (de BR<u>B</u>RR pasa a BRRRR), pues se ha encontrado una distribución con solo dos vasos boca arriba (el 1 o el 3). En ambos casos en el siguiente movimiento el primer jugador ganaría con solo voltear el otro.

   - O voltear juntos los vasos 2 y 3 (de B<u>RB</u>RR pasa a BBRRR). En este caso, el primer jugador también ganaría volteando a continuación los dos primeros (de <u>BB</u>RRR pasa a RRRRR).

Luego el primer jugador dispone de una estrategia ganadora.

3.- Una vez encontrada o conocida, se pueden estudiar otras situaciones:

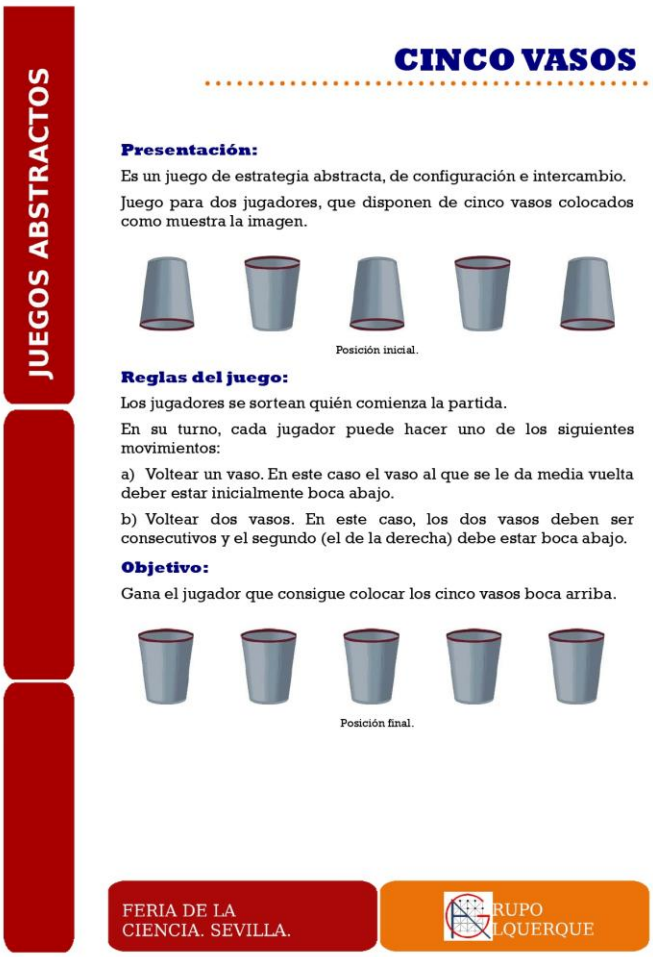
a) Si el primero no conoce la estrategia ganadora, ¿hay alguna otra para que gane el segundo?

b) Si ninguno de los participantes conoce la estrategia, ¿a partir de una posición intermedia cualquiera existe una ganadora?

c) ¿Qué ocurre si ampliamos la cantidad inicial de vasos a siete siguiendo la misma disposición alternada?

d) ¿Puede transformarse este juego para dos jugadores en un rompecabezas solitario, donde los distintos retos mantengan el objetivo de alcanzar todos los vasos boca arriba, pero partiendo de distintas disposiciones iniciales (no necesariamente alternas) con tres, cinco o siete vasos?

Para el trabajo de preparación con los alumnos, y para el posterior de ellos con los asistentes, se prepararon unas láminas que recogían los aspectos más interesantes de cada uno de los juegos. Todas tenían el mismo formato y estructura para darles uniformidad. A continuación mostramos la lámina de este juego.



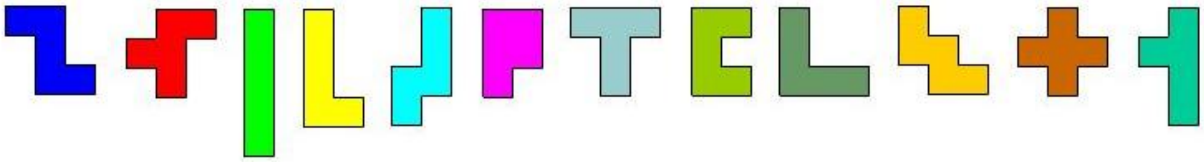
Ejemplo del material para el alumnado divulgador. Cinco vasos.

3.2 Pentominós: El juego de Golomb

3.2.1 Presentación

Los pentominós son formas geométricas descritas en 1953 por Solomon W. Golomb, catedrático de la Universidad del Sur de California. Corresponden a las distintas figuras que se pueden formar uniendo cinco cuadrados iguales siempre mediante un lado completo.

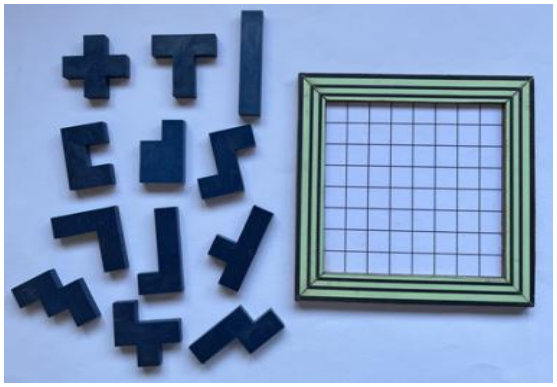
El juego de Golomb es un juego para dos jugadores, que disponen de un tablero cuadrado de 8x8 celdas y un juego de los 12 pentominós.



Los doce pentominós. Imagen: Grupo Alquerque.

3.2.2 Reglas del juego

Se sortea quién comienza y, por turno, cada jugador elige una pieza y la coloca sobre el tablero cubriendo por completo cinco casillas. Luego, su oponente elige un nuevo pentominó y lo sitúa sin superponerlo con el anterior. El juego prosigue del mismo modo, por turno, hasta que sea imposible colocar ningún pentominó más porque los espacios libres del tablero no lo permitan. Llegado este momento gana el último jugador que colocó correctamente un pentominó.



Tablero y piezas del Juego de Golomb. Imagen: Grupo Alquerque.

3.2.3 Variantes

a) Variante 1 (pentominós preseleccionados).

Cada jugador escoge alternativamente un pentominó hasta agotar los 12. A partir de entonces se empieza a jugar, colocando cada uno los suyos sobre el tablero. El último en escoger es quien comienza a colocar. Gana el último que coloca uno correctamente.

b) Variante 2 (pentominós obligados).

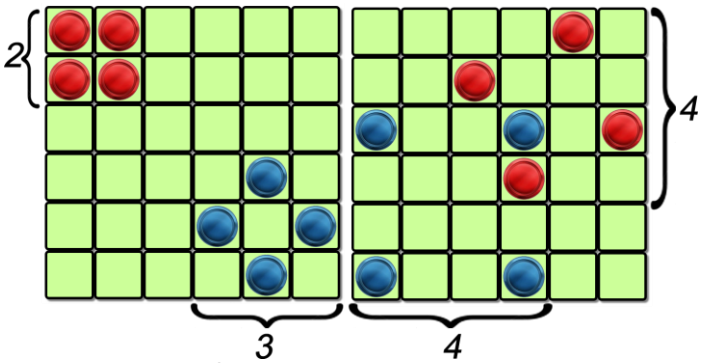
Cada jugador en su turno escoge un pentominó y se lo da a su oponente para que lo coloque; el resto del juego se desarrolla igual.

3.3 Cuadrar

3.3.1 Presentación

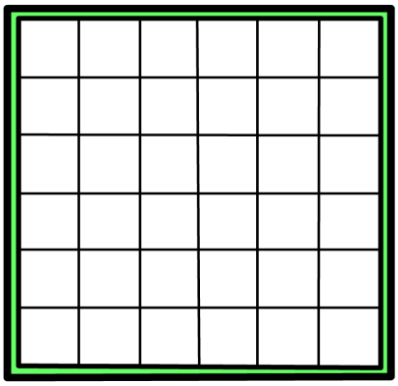
En 1997 el diseñador estadounidense de rompecabezas y videojuegos Scott Kim publicó en la revista *GAMES Magazine* el juego *Squares*. Se juega en un tablero de 8x8 y los dos jugadores se turnan para formar cuadrados, marcando (en la opción de lápiz y papel) un espacio con su símbolo o contabilizándolo (en la de tablero y fichas). Se puede formar un cuadrado de cualquier tamaño y con cualquier inclinación. Un cuadrado recibe puntos según el número de filas y columnas que cubre. Gana el primero que llega a una cantidad acordada previamente; 150 puntos, por ejemplo.

Cada puntuación, p_c, por cuadrado construido, se obtiene de $p_c = 1 + máx.\ X - mín.\ X$, siendo *máx. X* la posición horizontal del vértice más a la derecha y *mín. X* la posición horizontal del vértice más a la izquierda.



Ejemplos de puntuación en el juego Squares. Imagen: Grupo Alquerque.

Cuadrar es una versión simplificada y más rápida de jugar, en un tablero de 6x6 celdas, con 18 fichas de colores distintos para cada jugador y con un objetivo algo diferente. Ambos son juegos de configuración geométrica.



Tablero de Cuadrar. Imagen: Grupo Alquerque.

3.3.2 Reglas del juego

Una vez decidido el orden de salida cada jugador, por turno, coloca una ficha sobre una casilla libre del tablero.

El objetivo es ser el primero en colocar fichas propias de forma que cuatro de ellas puedan considerarse los cuatro vértices de un cuadrado (de cualquier tamaño y en cualquier posición).

3.3.3 Variantes

a) Variante 1. Tablero completo.

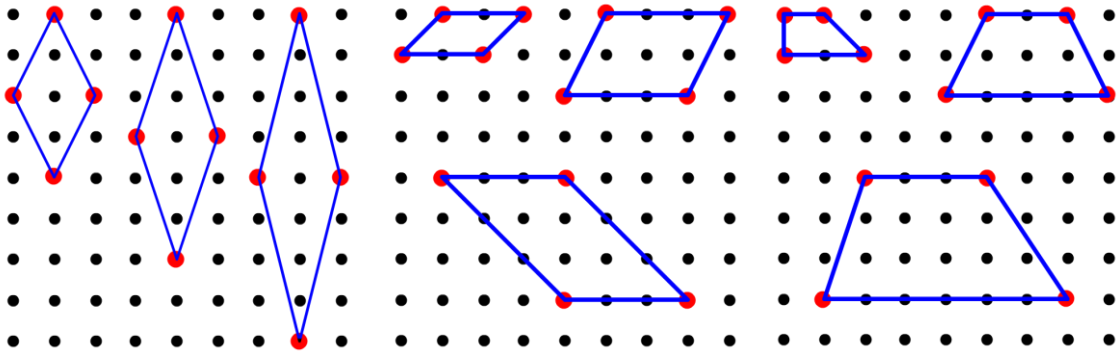
   Con las mismas reglas se juega hasta que todo el tablero quede cubierto de fichas, anotando los cuadrados conseguidos. Gana quien obtenga más.

b) Variante 2. Juego a no formar cuadrados.

   Pierde quien primero se vea forzado a construir un cuadrado o, en el caso de tablero completo, quien haya conseguido menos.

c) Variante 3. Objetivo otros cuadriláteros.

Consiste en cambiar el objetivo de cuadrado a la construcción de otros cuadriláteros como rombos, romboides o paralelogramos.



Posibles cuadriláteros objetivos: rombos, romboides y paralelogramos. Imagen: Grupo Alquerque.

d) Variante 4. Puntuación por áreas.

Se juega como en *Squares* (tablero 8x8 y 36 fichas de colores diferentes para cada jugador), pero la puntuación de cada cuadrado obtenido es el área del mismo. Gana quien primero llega a una cantidad acordada previamente.

El área de los diferentes cuadrados se puede obtener aplicando directamente el teorema de Pitágoras o el teorema de Pick (Georg Alexander Pick (1859-1942), matemático austriaco y profesor de la Universidad de Praga), que permite calcular el área de un polígono simple (sus lados no se cortan entre sí) cuyos vértices se hallan sobre los puntos de una cuadrícula.

3.4 Agujero negro: Escape

3.4.1 Presentación

Juego ideado por Erhan Cubukcuoglu en 2009.

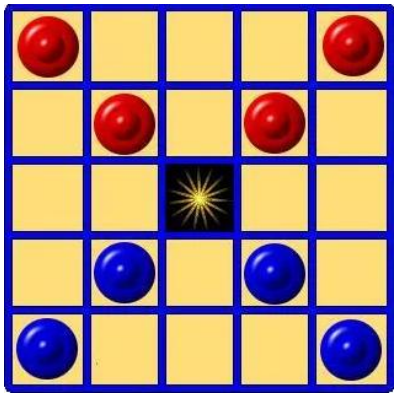
Es un juego de movimiento secuencial para dos jugadores, que disponen de un tablero 5x5 y cuatro fichas de un color diferente para cada jugador, y que simulan naves espaciales. La celda central del tablero es el agujero negro.

3.4.2 Reglas del juego

Se colocan las naves como en la imagen.

Los jugadores sortean quién comienza la partida y con qué color juegan. Por turno mueven una de sus piezas/nave.

Cada nave puede desplazarse horizontal o verticalmente, no en diagonal. Si se mueve una pieza, debe hacerse hasta que la detenga otra (incluso contraria) o los bordes del tablero (los frenos de las naves espaciales no funcionan).



Posición inicial.
Imagen: Aydagül Cubukcuoglu

Los jugadores han de buscar que el movimiento de sus piezas termine en el agujero negro. La nave que lo consigue se retira del tablero.

Las naves pueden pasar por encima del agujero negro, pero para poder retirarlas deben aterrizar exactamente en él.

El objetivo es ser el primero en colocar dos naves propias en el agujero negro y, por tanto, retiradas.

Para eliminar la ventaja del primer jugador, se aconseja jugar un número par de partidas turnándose en el inicio.

3.4.3 Observaciones

a) Un juego solitario con dinámica parecida es *Lunar Lockout*, creado por Hiroshi Yamamoto que está comercializado por *Binary Arts* (2000). Propone 40 desafíos.

b) Desafío 1.

   Propón una variante de *Agujero negro. Escape* donde la posición inicial de las fichas o del agujero sea diferente, juega con esa versión y comenta las similitudes y diferencias que encuentras con la original de Cubukcuoglu.

Los juegos solitarios abstractos son otra perspectiva del mundo de los juegos, donde se evidencian las bondades didácticas de los mismos: la mejora de la comprensión lectora y el desarrollo de la observación, la concentración y la reflexión, así como el aumento de la paciencia y el crecimiento del pensamiento lógico-matemático.

En ellos el tiempo de juego está condicionado por el número y la dificultad de retos que se afronten.

3.5 Columbus Egg

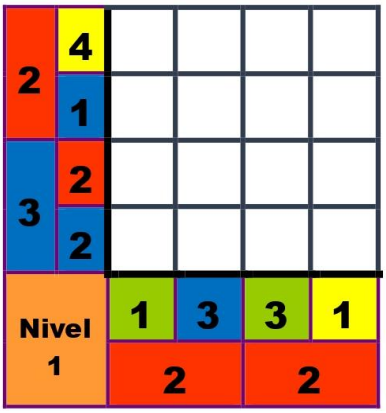
3.5.1 Presentación

Es un juego de configuración lógica para un jugador, que dispone de un tablero de 4x4 celdas, 16 fichas (cuatro de cada color) y una colección de 40 tareas diferentes en cinco niveles de dificultad. Fue diseñado por los finlandeses Timo Jokitalo y Vesa Timonen en 2021 y está comercializado por *Huch!*.

3.5.2 Reglas del juego

El juego consiste en colocar correctamente las 16 fichas en la cuadrícula-tablero respetando las pistas que se dan con números y color en el exterior del tablero: dos columnas a la izquierda y dos filas en la parte inferior del tablero indican cuántas fichas, de qué color y en qué zona del tablero de juego se deben colocar (véase la imagen siguiente).

Siguiendo con la imagen, en la segunda fila del tablero hay una ficha azul y en la tercera fila dos rojas. En el par formado por la primera y segunda columnas hay dos rojas y en el de la tercera y cuarta columna otras dos. Todos los valores numéricos son pistas sobre las filas o columnas, o sobre los pares de filas o de columnas. Además, figura el nivel de dificultad del desafío.



Ejemplo de tablero y de reto tomado de *Huch!*.

3.5.3 Observaciones

Su nombre deriva de la expresión “como el huevo de Colón”, usada para describir algo que parece difícil y que resulta sencillo una vez entendido. Las fichas del juego comercializado tienen forma ovoide.

Referencias

Corbalán, F (1998). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Editorial Síntesis. Madrid.

Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática*. Editorial La Muralla, S. A. Madrid.

Grupo Alquerque (2003). *Feria de la Ciencia de Sevilla*. https://www.grupoalquerque.es/ferias/ferias.html

Lógica y Razonamiento Matemático a través del Ajedrez Educativo

Alfonso Navas Alcaide
anavasalcaide@gmail.com
IES Salvador Rueda (Málaga)

Núcleo temático: Recursos para el aula / Conexiones

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Taller que busca dar a conocer al docente la herramienta del ajedrez educativo para trabajar la lógica y el razonamiento matemático entre su alumnado. Se ha constatado que es una herramienta muy potente pues al ser un material manipulativo despierta mucho interés y motivación entre los alumnos.

Se dará a conocer los conocimientos básicos de ajedrez para poder abordar todas las actividades y recursos que ofrece el ajedrez educativo. Partiremos de la premisa de que haya docentes que no sepan jugar al ajedrez. El taller será eminentemente práctico donde los docentes que asistan al curso practicarán y experimentarán ellos mismos todos los juegos y actividades que proponemos en este taller para que luego las trasladen al aula con sus alumnos.

1. Objetivos

- Conocer el recurso del ajedrez educativo para trabajar en el aula, pues ayuda a trabajar con el alumnado el desarrollo de la lógica, el razonamiento lógico-matemático.

- Conocer un gran abanico de actividades y juegos de ajedrez educativo que permiten trabajar conceptos geométricos, matemáticos y de razonamiento constructivo.

- Valorar que el ajedrez educativo permite a los alumnos a aprender a resolver problemas y a tomar decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y aceptando los propios errores sacando conclusiones positivas de los mismos.

- Ser consciente de que el ajedrez educativo permite al alumnado trabajar capacidades como la concentración, la memoria, el cálculo, la orientación, la iniciativa, la creatividad y la comunicación.

2. Contenidos

- Breve introducción del tablero y sus elementos (columnas, filas, diagonales y casillas) y del movimiento de las piezas.

- Ejercicios de movilidad y laberinto de capturas.

- Movimientos para formar figuras geométricas y determinados tipos de ángulos.

- Juegos de peones contra una pieza (encontrar la estrategia ganadora)

- Rutas de caballo con y sin obstáculo (encontrar la secuencia correcta)

- Sopa de letras con saltos de caballo y ruta de saltos de caballo para conseguir la suma máxima y mínima.

- Ajedrez solitario

- Número máximo de piezas en un tablero cumpliendo una condición.

- Problemas de piezas ocultas (descifrar la incógnita de cada pieza)

3. Ejemplos de actividades

Referencias

Capó Dolz, M. (2010). *Mate a las mates.* Editorial CCS. Madrid

Frabetti, C. (1995). *El tablero mágico*. Editorial Gedisa. Barcelona.

Teselas de Origami y Pensamiento Computacional

Eulàlia Tramuns
eulaliatramuns@gmail.com
Facultad de Educación Universidad de Barcelona

Belén Garrido
belengarrido@gmail.com
Colegio Guadalaviar. Valencia

Núcleo temático: recursos para el aula, formación de profesorado

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

En los últimos treinta años se han ido proponiendo distintas variantes de la tesela (baldosa, azulejo) cuadrada bicolor estudiada matemáticamente por Truchet en el siglo XVIII. El objetivo del taller es que los asistentes construyan uno de estos tipos de baldosas mediante doblado de papel y lo utilicen para resolver un problema matemático que conecta combinatoria y geometría, ejercitando el pensamiento computacional. Con este taller se proporciona a los docentes una actividad de aula en la que la papiroflexia u origami se muestra como un recurso didáctico muy útil para elaborar material para el aula de manera simple y relativamente rápida, con el que se pueden desarrollar diferentes actividades.

Una variante de este taller se presentó como actividad grupal en el congreso final del programa de formación de profesorado HelloMath de Educaixa en julio de 2023 (HelloMath ,2023).

Palabras clave: papiroflexia, origami, matemáticas, pensamiento computacional.

El azulejo o baldosa de cartabón ("de mitadad" o "del mocaoret") es un cuadrado dividido diagonalmente en dos colores (Figura 1.a.). Debido a su diseño simple y su capacidad para crear simetrías mediante combinaciones este estilo de baldosa ha sido empleada durante siglos y hasta en nuestros días en las artes decorativas, como la cerámica y los mosaicos.

Sébastien Truchet, sacerdote dominico que vivió bajo el reinado de Luis XIV, publicó una memoria sobre combinaciones en la que realizó un análisis meticuloso sobre las diversas formas en que estos azulejos pueden ser dispuestos contiguamente mostrando que se pueden generar infinidad de patrones con ellas (Truchet, 1704). Este trabajo fue el origen de un libro de otro religioso francés, Dominique Douat, que contenía observaciones sobre lo propuesto por Truchet y una gran cantidad de dibujos de mosaicos diseñados con esta baldosa (Douat 1722). Debido a estos estudios a este azulejo se le conoce entre los matemáticos como azulejo de Truchet. Se puede considerar que en estos dos textos se da una primera expresión de los principios de la teoría combinatoria y la simetría cristalina.

Durante las últimas tres décadas, se han propuesto diversas variaciones de la baldosa de Truchet, las cuales también se conocen como baldosas de Truchet por asociación. Una de ellas (Smith, 1987) tiene arcos que conectan los puntos medios de los lados del cuadrado produciendo patrones que delinean dos dominios (Figura 1.b.); cuando se colorean estos generan un entramado de zonas abiertas y cerradas muy llamativo. Una modificación de la tesela anterior propuesta por Smith consiste en dos baldosas distintas (figura 1.c.), cada una de las cuales tiene dos orientaciones. La colocación de cada baldosa es una elección libre, pero debe estar orientada de manera que los colores de sus bordes coincidan con los de los vecinos existentes generando directamente un patrón duotono (Browne 2008, a).

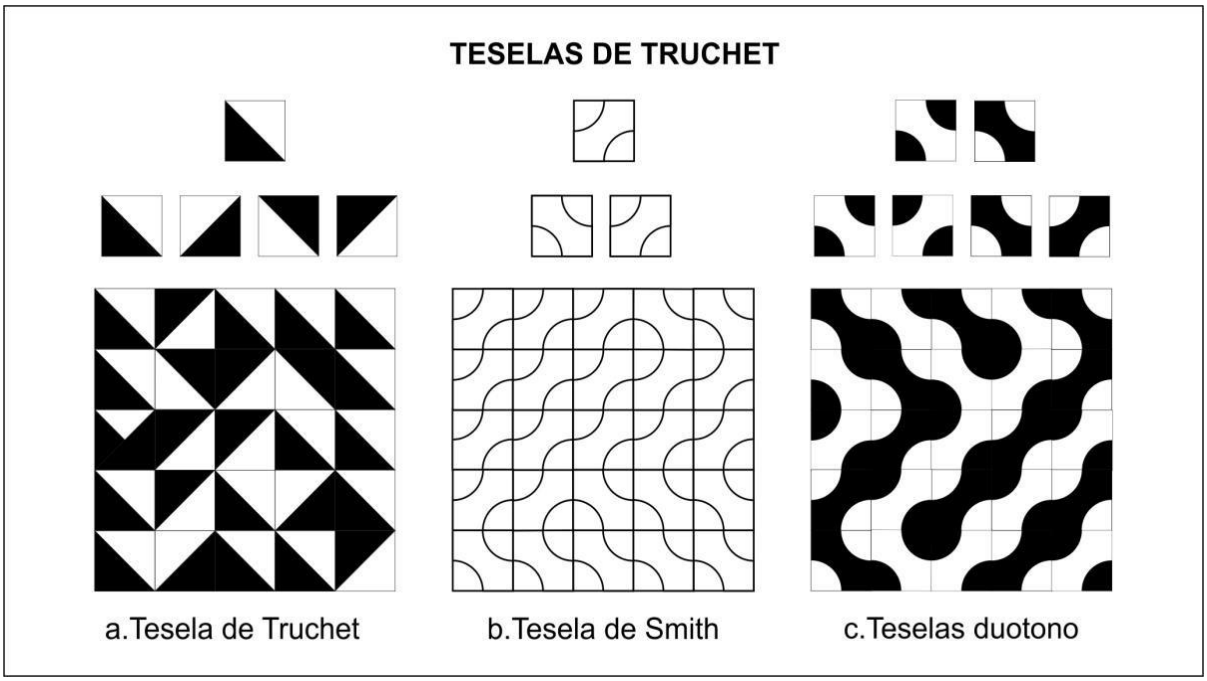


Figura 1.

El origami es una herramienta versátil que puede utilizarse para enseñar una amplia gama de conceptos matemáticos de una manera práctica y visualmente estimulante en el aula, al mismo tiempo que promueve la creatividad, la destreza manual y el pensamiento crítico. (Garrido, 2016), (Haga, 2008), (Hull, 2013), (Spreafico & Tramuns, 2019). Una de las ventajas principales de emplear el origami en la enseñanza de las matemáticas es su demanda de participación activa. Dado que el origami es inherentemente práctico, se erige como una elección natural para el aprendizaje activo. Se podría incluso sostener que al plegar papel, especialmente al confeccionar modelos geométricos, siempre se genera un aprendizaje matemático implícito.

Hemos diseñado unas teselas de Truchet de papiroflexia que se pueden doblar fácilmente a partir de papeles impresos. Estas teselas se pueden utilizar para una variedad de actividades matemáticas relacionadas con la simetría y la combinatoria, pero también con el cálculo de longitudes de arco de curvas policéntricas y de áreas de componentes conexas de los mosaicos que se obtienen al unirlas.

En el taller que llevaremos a cabo las vamos a utilizar para formar mosaicos sujetos a unas determinadas condiciones. El análisis de las propiedades de los mosaicos

obtenidos y el planteamiento de un problema matemático propiciará el desarrollo de habilidades computacionales como el reconocimiento de patrones y la abstracción, pero también la algorítmica y la depuración de errores.

Los asistentes al taller, dirigidos por las ponentes y reunidos en grupos de tres, construirán mediante el doblado de papeles previamente impresos teselas del tipo duotono (Figura 2).

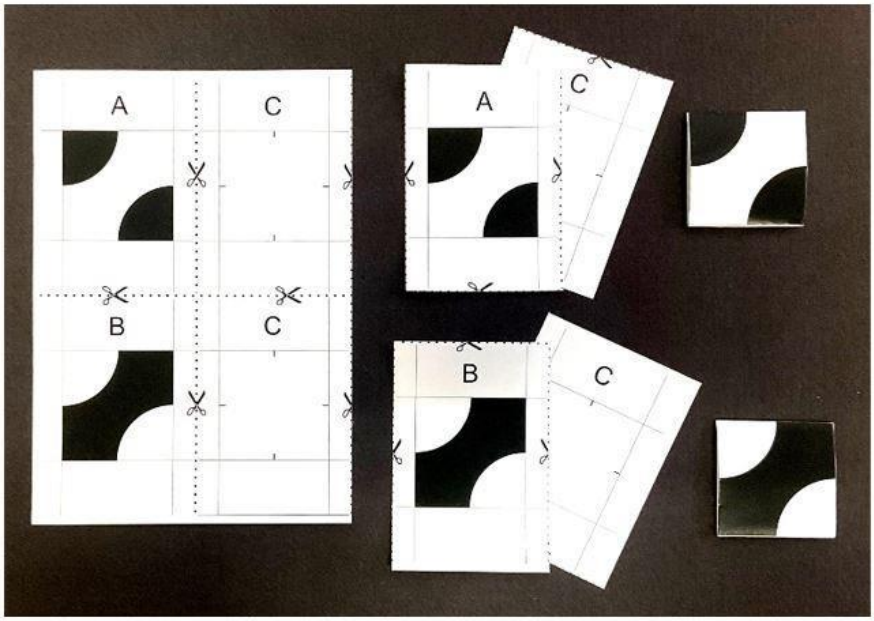


Figura 2.

Cada grupo construirá 9 teselas y posteriormente se les propondrá el siguiente reto: Si se tienen 5 teselas A y 4 teselas B y se colocan dos teselas A como se indica en la imagen (Figura 3). ¿Cuántos mosaicos 3x3 posibles hay, de manera que se consiga un camino de color blanco que una las dos piezas ya colocadas? ¿Cómo comprobamos que los hemos encontrado todos?".

Un aspecto interesante de este problema es que su resolución lleva a buscar una representación abstracta de un camino. Una posible opción la encontramos en la teoría de grafos, que traslada el problema que queremos resolver a un problema de conectividad en grafos.

Tras una puesta en común de los resultados hallados por los asistentes, se compartirá el número de caminos posibles, para que aquellos que tengan una respuesta incorrecta puedan depurar su algoritmo de resolución del problema.

Seguidamente se presentarán todas las soluciones para que los asistentes puedan comprobar sus resultados.

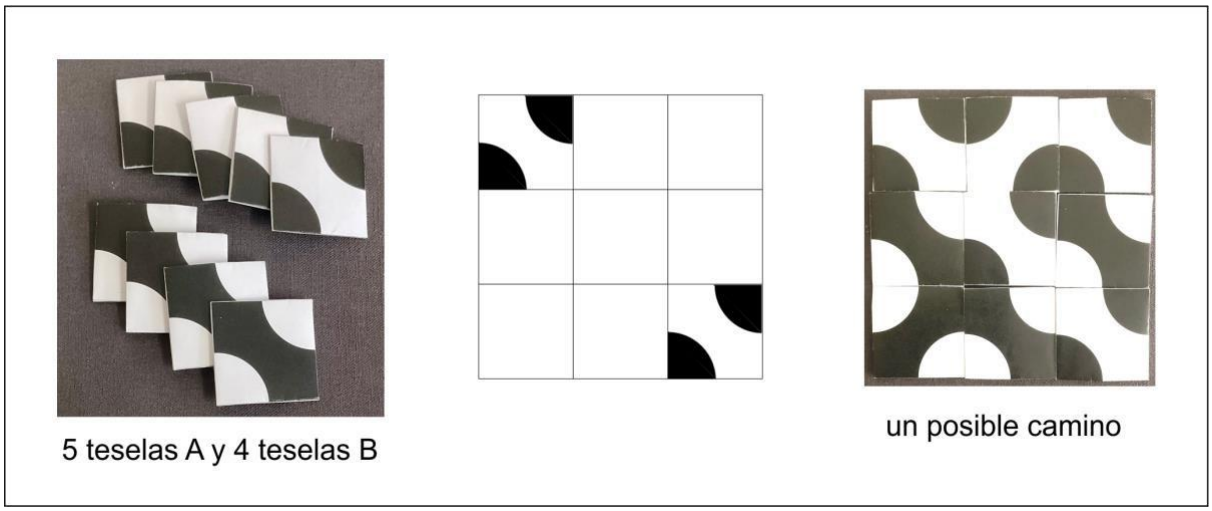


Figura 3.

Como divertimento al final del taller se les propondrá a los asistentes que puedan utilizar estas teselas para jugar a “CHE”, un juego abstracto de estrategia ideado por Cameron Browne (Browne 2008, b). El juego consiste en la colocación de fichas sin tablero donde los jugadores han de formar regiones cerradas con fichas de Truchet.

Las instrucciones de doblado y los patrones de las teselas se pueden descargar a partir de este código QR para poderlos utilizar en el aula (Figura 4).

Figura 4.

Referencias

Browne, C. (2008 a.) Truchet curves and surfaces. *Computers and Graphics*, 32(2),268–281.

https://www.academia.edu/20988797/Truchet_curves_and_surfaces

Browne, C. (2008 b.) *Juego Che*. *http://cambolbro.com/games/che/*

Douat, D. (1722). *Méthode pour faire une infinité de desseins différens, avec des carreaux mi-partis de deux couleurs: par une ligne diagonale.*

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k15100709/f7.item

Garrido, M.B. (2016). *Orisangakus. Desafíos matemáticos con papiroflexia*. Editorial SM.

Haga, K. (2008). *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding*.

World Scientific Publishing Company

HelloMath! Atrévete con la creatividad matemática. *https://educaixa.org/es/-/formacion/hellomath-atrevete-creatividad-matematica*

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. A K Peters/CRC Press

Smith C. S. and Boucher, P. (1987). The Tiling Patterns of Sebastien Truchet and the Topology of Structural Hierarchy. *Leonardo*, 20 (4), 373-385.

Spreafico, M.L. & Tramuns, E. (2019). The Origami and Mathematics Poster Pack. Tarquin editors.

Truchet, S. (1704). *Mémoire sur les Combinaisons*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 363-372.

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3486m.image.f526.langFR

Aprender álgebra con materiales, ¡es posible!

Anna Vilaró Utrillo

anna@annahelpme.com

Institut Les Margues (Barcelona)

Núcleo temático: Recursos para el aula. Inclusión.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En el taller hablaremos sobre qué entendemos por materiales manipulativos y qué requisitos deben cumplir según nuestros objetivos. Nos centraremos en algunos de ellos que nos permitan trabajar el álgebra y profundizaremos en Algemat. Elegimos este ya que nos permite trabajar hasta la tercera dimensión (x^3) y con dos variables (x,y). Podremos practicar con él y descubrir que se pueden trabajar prácticamente todos los conceptos relacionados con el álgebra que el currículum de secundaria nos exige.

Se mostrará que las operaciones miradas desde el punto de vista geométrico adquieren forma. Haremos un recorrido secuenciado desde solamente utilizar las unidades (aritmética) para posteriormente usar variables (álgebra). Incluso llegaremos a resolver ecuaciones de tercer grado utilizando el material Algemat.

Palabras clave: álgebra, materiales, manipulativos.

1. Materiales manipulativos en matemáticas

Existen distintas definiciones en referencia a qué se entiende por material manipulativo. Es por este motivo que debemos tener claro qué definición le damos y qué requisitos tiene que cumplir el material manipulativo que buscamos.

En muchas ocasiones encontramos materiales ya creados, pensados para el aprendizaje de diversos contenidos matemáticos. Al igual que podemos ser nosotros mismos los creadores o diseñadores de estos.

Tanto unos como otros, su objetivo principal, es obtener un recurso que nos facilite el proceso del concreto al abstracto. Entrando así, en la generalización y la modelización de conceptos matemáticos.

Cabe remarcar su importancia en la atención a la diversidad así como el cumplimiento de muchísimas competencias exigidas en el currículum.

2. Álgebra con material manipulativo

Los conceptos algebraicos exigidos en secundaria, requieren de un alto nivel de abstracción, y por este motivo, es interesante buscar un material que ayude al alumnado a pasar del concreto al abstracto de una forma natural. Que puedan sacar ellos mismos conclusiones a través de la observación de lo que manipulen.

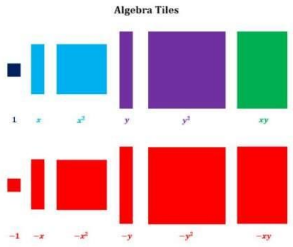
Personalmente, mi objetivo es trabajar el álgebra haciendo conexiones con geometría, números enteros, aritmética… a través de un contexto geométrico en el espacio. Y en cuanto a contenidos de álgebra, poder aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir con polinomios, factorizaciones, ecuaciones de 1.º, 2.º y 3.º grado, etc.

“Pasar de la aritmética al álgebra saltándose la geometría se puede considerar como un error didáctico-histórico, que tiene explicación en el contexto del siglo XVII cuando la fuerza del nuevo lenguaje simbólico desplazó el razonamiento geométrico visual” (Katz & Barton, 2007).

Muchos profesores, ante la necesidad de buscar materiales para trabajar el álgebra en el aula, han utilizado algunos materiales ya existentes y conocidos como los Bloques de Dienes y las Regletas de M. Antonia Canals. Aun siendo muy buenos para trabajar otras áreas de las matemáticas, no cumplen algunos de los requisitos que exigimos para el álgebra. En el taller se explicarán estas diferencias.

2.1. Algebra Tiles

El primer material que encontramos es “Algebra Tiles” de W. Sawyer (1940). Consta de unas piezas rectangulares y cuadradas que se pueden fabricar en el aula con goma eva y permiten hacer operaciones con polinomios hasta el grado 2.



Algebra Tiles.

En la segunda fila encontramos la parte trasera de las piezas y nos indican los negativos.

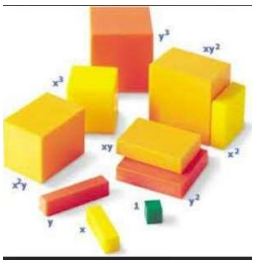
En el dorso de cada pieza, consta su parte negativa y, por tanto, no necesita ningún tablero para indicarlo. No obstante, requiere que el alumnado tenga un conocimiento profundo de los números enteros. Presupone que los alumnos, dominan la regla de los signos. Y solo trabaja con monomios de hasta segundo grado.

Se pueden encontrar muchas actividades en YouTube poniendo los siguientes nombres: algebra tiles, losetas algebraicas, rajoles algebraiques…

2.2. Algeblocs y Algebra Lab Gear

Más tarde surgieron Algeblocs y Algebra Lab Gear (años 90). Dos materiales utilizados mayormente en gran parte de América y Australia, que son poco conocidos en Europa. Estos materiales están formados por unos prismas que permiten trabajar con monomios de grado 3, ya que consideran la altura, la anchura y la profundidad.

En cuanto a Algeblocs, sus piezas necesitan de un tablero para ser identificadas como positivas o negativas. Y también necesita de dos tableros más: uno para las ecuaciones y otro para los ejes para hacer operaciones. Se puede trabajar con dos variables que están identificadas en colores distintos.



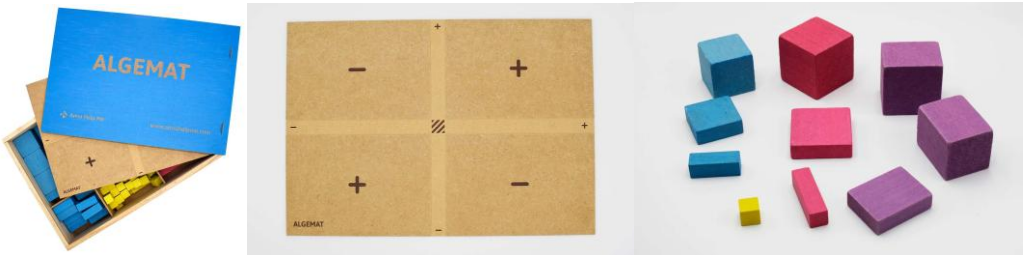
Algeblocks

En Algebra Lab Gear encontramos unas piezas similares a Algeblocks, pero sin utilizar tableros. Necesita de una escuadra de plástico para colocar las piezas y para identificar las piezas negativas las sitúa encima de las positivas. Una diferencia importante con Algeblocs además de no identificar las dos variables en colores distintos, es la forma de resolver algunas operaciones.

Algebra Lab Gear

2.3. Algemat

Algemat es una adaptación de Algeblocs y fue diseñado por Anna Vilaró Utrillo. Está formado por una caja de madera con dos tableros con ejes, 10 tipos de prismas distintos y dos piezas con el símbolo igual. Está preparado para trabajar 4 alumnos con la misma caja.



Algemat

2.4. Operaciones algebraicas con Algemat

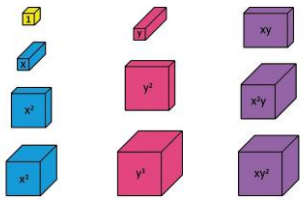
Para poder comprender y visualizar las conexiones entre aritmética y álgebra empezaremos poniendo ejemplos de operaciones sólo con unidades y más tarde con

expresiones algebraicas. Así observamos que la forma geométrica que adoptan las unas y las otras son las mismas.

En el taller se pondrán ejemplos de todas las operaciones matemáticas básicas con unidades y con polinomios, ecuaciones de primer, segundo y tercer grado a través de la factorización. Los asistentes practicarán con el material manipulativo todas estas operaciones y si el tiempo lo permite se hará una ampliación con las identidades notables.

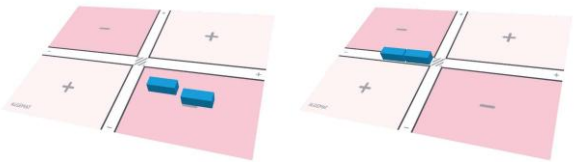
A continuación reflejamos algunos ejemplos de algunas operaciones. No obstante, se recomienda visualizar los vídeos de YouTube del canal Anna Help Me, donde se pueden encontrar más de veinte vídeos explicándolo paso a paso. Estos también están en la página web *www.annahelpme.com*.

Antes de empezar a hacer operaciones, es necesario aprender qué representa cada pieza y cómo colocarla en el tablero.



Piezas de Algemat con su nombre.

Estas piezas no están identificadas con un signo. Dependerá en donde las situemos en el tablero que serán positivas o negativas.

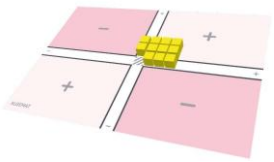


Dos formas distintas de representar -2x

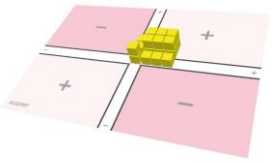
2x = 2·x por lo tanto, cogemos 2 piezas x que en este caso son negativas y las ponemos en el lugar adecuado del tablero para que quede representado.

Ejemplos de multiplicaciones con unidades

La multiplicación de dos factores nos forma un rectángulo o un cuadrado si los dos factores son iguales. Y si se multiplican tres factores formará un prisma o un cubo. Pondremos los factores en los ejes y el resultado estará situado en el cuadrante donde hayamos construido el rectángulo o prisma.



$2 \cdot 3 = 6$



$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Ejemplo de multiplicación con polinomios

Para multiplicar dos expresiones algebraicas, tenemos que situar una en el eje vertical y la otra en el eje horizontal. Así estamos indicando el valor de los lados que tendrá el rectángulo que debemos construir. El área del rectángulo será el resultado de esta multiplicación.

Sólo tenemos que fijarnos en rellenar el rectángulo cumpliendo la norma que las piezas deben encajar. Cuando una pieza está tocando a otra, sus lados deben tener la misma medida. Funciona como un puzle.

Forma correcta de colocar las piezas con Algemat:

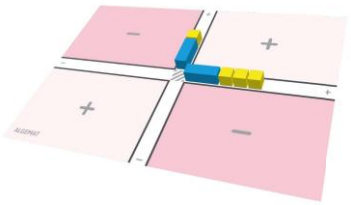
Piezas bien colocadas

Forma incorrecta de colocar las piezas con Algemat:

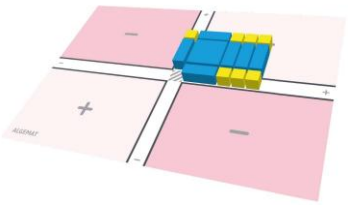
Piezas mal colocadas

Por lo tanto, el producto de dos expresiones algebraicas lo resolveremos así:

$(x + 3) \cdot (x + 1) = x^2 + 4x + 3$



Enunciado de la multiplicación



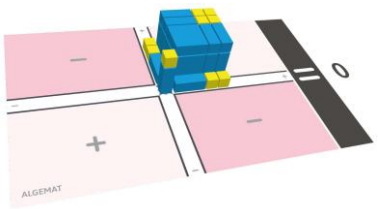
El área del rectángulo es el resultado de la multiplicación

Ejemplo de resolución de una ecuación de tercer grado

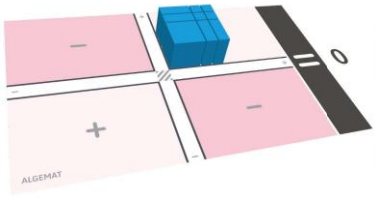
Para resolver ecuaciones de tercer grado utilizaremos el método producto cero que se base en la factorización.

El primer paso será construir un prisma con todo el polinomio una vez igualado a cero. Después observaremos las aristas (los ejes) que multiplicadas entre ellas nos han dado el prisma. En este momento ya tenemos factorizado el polinomio y basándonos en el producto cero, formaremos 3 ecuaciones de 1º grado con cada arista. Solamente faltará resolverlas para acabar de resolver la ecuación de 3º grado.

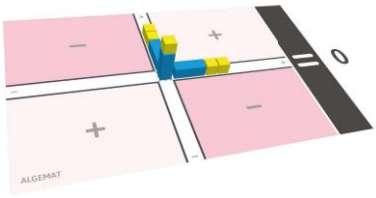
	Factorización	Soluciones
$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$	$(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2) = 0$	$x = - 1 \quad x = - 2 \quad x = - 2$



Prisma acabado y con los ejes



Primer piso del prisma

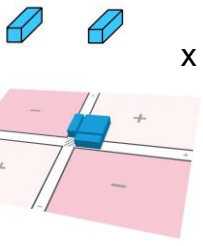


Ejes

3. Conclusiones

Personalmente, utilizo Algemat al inicio de todos los contenidos que habitualmente se programan en 2.º y 3.º de la ESO, en paralelo con el descubrimiento de cómo se hace de la forma tradicional. Permite al alumnado visualizar el álgebra dentro de un contexto geométrico para que después saque sus conclusiones.

Trabajar con material, obliga al alumnado a prestar más atención y podemos evitar alguna confusión muy habitual, como por ejemplo en estas dos operaciones:



$x + x = 2x$

$x \cdot x = x^2$

También encontramos algunas limitaciones en este tipo de materiales:

- No se puede trabajar con números decimales o fraccionarios.
- Solo se puede trabajar con números pequeños según la cantidad de piezas que dispongamos.
- No es posible trabajar con monomios de grado superior a 3.

Después de enseñar álgebra durante 5 años con material manipulativo, puedo expresar que la experiencia es positiva y que ayuda a nuestro alumnado a tener una visión más global y práctica de las matemáticas.

Referencias

Blanco, Rocío; Solares, Cristina. (2017) Bloques multibase, Algeblocks y otros recursos para tocar las Matemáticas en Primaria y Secundaria. VIII CIBEM Libro de resúmenes. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas FESPM. ISBN: 978-84-945722-2-7.

Hernández Espejel, N.A. (2010) Desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de los algeblocks en alumnos de segundo grado de Educación Secundaria. Tesis Doctoral.

Rivera, Ferdinand D. (2017) Algeblocks, promote algebraic understanding.

Vilaró Utrillo, Anna. “Algemat-Guia didàctica”. (2023) ISBN: 978-84-09-52109-8

Vilaró Utrillo, Anna. “Algemat-Quadern”. (2023) ISBN: 978-84-09-51902-6

Taller de asignación de probabilidades

Joan Pons Tomàs
joanpons50@yahoo.es
Profesor IES Mutxamel

Fernando Arenas Planelles
f.arenasplanelles@edu.gva.es
IES Allusser (Mutxamel)

Julia Muñoz Martínez
j.munozmartinez@edu.gva.es
IES Allusser (Mutxamel)

Núcleo temático: Recursos para el aula. Formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

El objetivo de este taller es presentar una colección de problemas, dirigidos a estudiantes de secundaria, para trabajar el pensamiento aleatorio utilizando la experimentación/simulación y algún applet de GeoGebra para determinar la probabilidad frecuencial de los sucesos aleatorios. Nuestro marco teórico se fundamente en el desarrollo de la idea de abstracción reflexiva para el pensamiento matemático avanzado (Dubinsky, 1991), en el cual los estudiantes construyen gradualmente su conocimiento. Los problemas que conforman el taller los hemos agrupado en función de que la asignación de probabilidad sea experimental o simulada. La asignación de probabilidad experimental equivale a obtener la probabilidad de determinados sucesos como consecuencia de repetir el mismo experimento; la simulada equivale a asociar el fenómeno aleatorio a un modelo inventado, que se pueda repetir, equivalente al fenómeno aleatorio motivo de estudio.

Experimentaremos con problemas que acompañaremos con producciones de los estudiantes.

Palabras clave: Sentido estocástico, suceso aleatorio, espacio muestral, probabilidad frecuencial, estudiantes de secundaria

1. Introducción

Este taller se integra en una problemática más general de aspecto cognitivo que tiene como finalidad comprender la posibilidad de estimar una probabilidad teórica mediante la obtención experimental o simulada de datos de frecuencias. El sentido estocástico comprende el análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una amplia variedad de situaciones cotidianas (BOE, 2022). La Ley de los grandes números indica que la frecuencia relativa de un suceso aleatorio, repetido en un experimento realizado en las mismas condiciones, converge *casi seguramente* a la probabilidad de dicho suceso (Bernoulli, 1713). Un ejemplo (Colera, 1985), de la Ley de los grandes números con las frecuencias relativas de lanzar un dado para obtener el cinco, la podemos ver en la Figura 1.

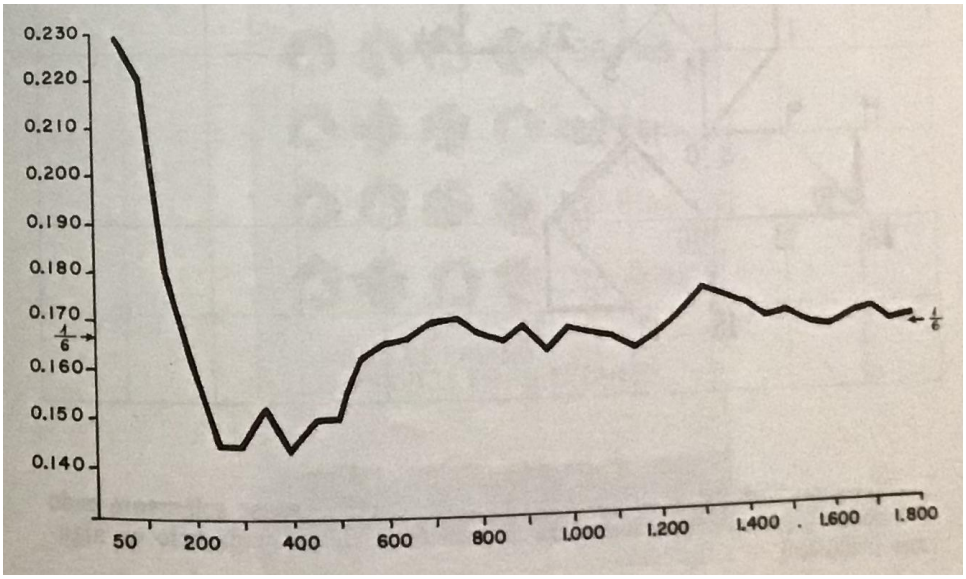


Figura 1. Ley de los grandes números (Colera, 1985). Lanzar un dado

En el enfoque clásico de la probabilidad, esta se obtiene por la fracción de resultados favorables a un evento en un espació muestral, partiendo del supuesto de que todos los resultados individuales tienen la misma probabilidad. Si un suceso es aleatorio y se repite muchas, muchas veces, la distribución de resultados forma una tendencia. La idea de que los sucesos individuales no son predecibles en tal situación, sino que sólo puede predecirse una tendencia, es un concepto importante que sirve de fundamento al estadio de la inferencia estadística (NCTM, 2003). El proceso de modelización puede ser una actividad sencilla cuando las probabilidades del problema son conocidas, pero partiendo del enfoque frecuencial la variabilidad de los resultados puede ser obstáculo para identificar el modelo teórico subyacente. En el enfoque frecuencial de la probabilidad, esta es estimada a partir de las frecuencias relativas de los resultados favorables obtenidos en un experimento aleatorio que se repite bajo las mismas condiciones un número suficientemente grande de veces (Inzunza, 2017). El uso de técnicas informales, por los estudiantes, juegan un importante rol en el desarrollo de una actitud crítica hacia el uso de modelos que seleccionen, siendo cautelosa la interpretación de sus resultados (NCTM, 1981). Los experimentos y las simulaciones ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan en problemas de probabilidad aparentemente sencillos. Sin embargo, debemos tener en consideración dos problemas prácticos: a) mediante las simulaciones o los experimentos frecuenciales obtenemos una estimación de la probabilidad, no su valor exacto; y b) no se especifica cual es el número adecuado de experimentos (Batanero, 2005), situación que puede resolverse con la utilización de ordenadores (Batanero et al., 2005). Por otra parte, tenemos necesidad de conocer qué pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática (en este caso de estudio del azar), cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc., con la finalidad de tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gutiérrez, 2005). Además, debemos tener en cuenta que los avances de las ciencias cognitivas plantean una nueva concepción del aprendizaje y señalan que el enfrentamiento con problemas que sean asequibles y capten el interés de los alumnos es un medio privilegiado para introducir nuevos conocimientos (Callejo,

2000). Es decir, se aprende mejor cuando lo que pasa durante el aprendizaje tiene más importancia que las consecuencias de ese aprendizaje, el temor al fracaso es el fracaso (Hernán, 1988). Con la idea de comprender lo que pasa por la cabeza de los estudiantes, trataremos de identificar las estrategias que utilizan identificando e interpretando indicadores del desarrollo en la generación de destrezas (Montero et al., 2020). De lo que se trata es de cambiar el aprendizaje de la matemática, poniendo al estudiante en contacto directo con su propio aprendizaje (Glaymann y Varga, 1975); razón por la cuál las actividades de tipo experimental sirven para motivar el estudio de la probabilidad, mediante la reflexión (Pajares, 2009).

Con estas consideraciones previas, en este taller, nos hemos planteado como objetivo presentar una colección de problemas para trabajar, con estudiantes de secundaria, situaciones aleatorias utilizando la experimentación, la simulación o applets de GeoGebra para determinar su la probabilidad frecuencial.

2. Marco Teórico

En este taller nos basamos en el marco teórico APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Este marco teórico se fundamente en el desarrollo de la idea de abstracción reflexiva para el pensamiento matemático avanzado (Dubinsky, 1991). En el marco teórico APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. La finalidad del análisis teórico de un concepto matemático es proponer un modelo de cognición, y describir las construcciones mentales específicas que puede realizar un estudiante con la finalidad de desarrollar su comprensión del concepto. En este modelo teórico, los estudiantes construyen su conocimiento mediante un proceso que es gradual.

Nuestro taller está fundamentado en el siguiente hipotético modelo que describe el camino que necesita construir un estudiante para aprender el sentido estocástico (Pons, 2004):

1) Comprender el enunciado del problema.
2) Conjeturar una respuesta inicial.
3) Planificar la experimentación.
4) Observar, anotar y analizar los resultados.
5) Plantear la posibilidad de modificar la conjetura previa como resultado de la experimentación.
6) Estudiar el posterior tratamiento de la información.
7) Asignar la probabilidad a la frecuencia relativa.
8) Plantear de forma autónoma variantes del problema propuesto.

Debemos de tener presentes dos situaciones diferentes. Los estudiantes podrían pensar que no es posible hacer una predicción previa, o podrían considerar la heurística de la equiprobabilidad, es decir, que todos los casos son equiprobables (Batanero el al., 2005).

Finalmente, consideraremos, en la misma línea de Giraldo (2018), que:

a) El modelo pedagógico está centrado en el alumno
b) El docente es el diseñador, el guía o facilitador y evaluador
c) El estudiante participa activamente, y es el responsable de su propio aprendizaje

3. Instrumentos para el desarrollo del taller

Antes de presentar los problemas, presentaremos dos definiciones tomadas de investigaciones en el ámbito de la Geometría: la visualización y el razonamiento. Consideraremos la visualización como la capacidad de producir imágenes que ilustren o representen determinados conceptos, propiedades o situaciones, y también es la capacidad de realizar ciertas lecturas visuales a partir de determinadas representaciones (Alsina et al., 1997); y consideraremos que el razonamiento es

cualquier procedimiento que permita obtener nueva información de informaciones previas, sean estas proporcionadas por el problema o derivadas del conocimiento previo (Torregrosa y Quesada, 2007).

También consideraremos las competencias específicas haciendo hincapié en la formulación y comprobación de conjeturas sencillas o en el planteamiento de problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento, así como en la colaboración activa entre los estudiantes para construir relaciones trabajando en grupos heterogéneos, respetando diferentes opiniones (BOE, 2022).

Los materiales que utilizaremos (Figura 2) para desarrollar el Taller del asignación de probabilidades: dados, monedas, fichas numeradas, cartas, … y producciones de estudiantes.

Figura 2. Materiales utilizados en el Taller de asignación de probabilidad

Partiendo de estas consideraciones, en los tres siguientes apartados presentamos, en primer lugar, que entendemos por asignación de probabilidad experimental o simulada; en segundo lugar, los enunciados de los problemas propuestos; y en tercer lugar, producciones de estudiantes.

3.1. Asignación de probabilidad

La asignación de probabilidad experimental equivale a obtener la probabilidad de determinados sucesos como consecuencia de repetir el mismo experimento; **la asignación de probabilidad simulada** equivale a obtener la probabilidad de determinados sucesos como consecuencia de generar la repetición del mismo experimento de forma inventada o con la utilización de applets de GeoGebra.

Varios de los posibles problemas que utilizaremos en la asignación de probabilidades podríamos presentarlos como juegos. Presentarlos de esta manera tendría como fin obtener momentos de distensión en el aula que permitan volver a redirigir la atención del alumnado a los contenidos tratados en clase y disfrutar con una actividad relacionada con lo que se está trabajando (Pazo y Fernández, 2022). Los juegos los podemos clasificar según impliquen habilidades físicas, estrategia, suerte o una combinación de ellas. Como lo que nos interesa son las ideas matemáticas, consideraremos los juegos que dependen de la suerte (Ascher, 1991). Por otra parte, para organizar la colaboración activa entre los estudiantes, deberíamos formar pequeños equipos. Jugar (y/o asignar probabilidades) puede ralentizar el desarrollo de la clase, pero incrementa de manera exponencial el análisis del problema y la búsqueda de la mejor planificación para resolverlo (Cros, 2022).

En la resolución de problemas de asignación de probabilidad nos encontraremos con una problemática más general, que se produce durante la resolución de problemas, y es que utilizar métodos heurísticos o técnicas informales de resolución no siempre asegura el éxito (Arenas et al., 2022, Gasco-Txbarri, 2017, Muñoz et al., 2023). Por otra parte, el hecho de que la asignación de probabilidades no esté en consonancia con la probabilidad teórica también puede deberse a que finalizado el tiempo de la clase, no hayamos terminado el problema. Una evidencia de lo dicho anteriormente, la encontramos en el problema del lanzamiento de dos dados con la finalidad de sacar dos seises (Figura 3), asignación de probabilidad que consideramos conveniente retomar en la siguiente clase con la finalidad de poder terminar el problema.

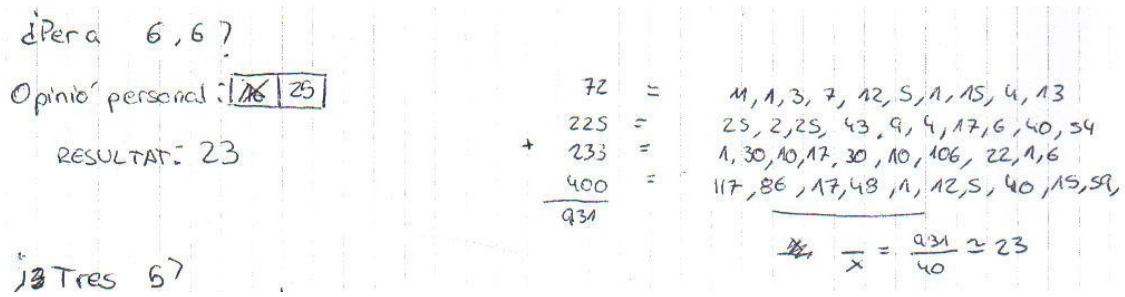


Figura 3. Ejemplo de asignación de probabilidad sin éxito "teórico"

3.2. Problemas propuestos

La finalidad de este taller es presentar una colección de problemas para trabajar, con estudiantes de secundaria, situaciones aleatorias utilizando la experimentación y la simulación. Los problemas que lo conforman están agrupados en función de que la asignación de probabilidad sea experimental o simulada (Tabla 1).

Tabla 1. Problemas que conforman el taller de asignación de probabilidad

Experimental	Simulada
(1) Extraer una carta de una baraja	*(4) Reunión para comer (GG)*
(2) Lanzamiento de dos monedas	*(5)Juego: El tiro en la feria*
(3) Lanzar tres dados (Galileo)	*(7) La rata*
(6) ¿Qué hay en la caja?	*(8) Paseos aleatorios*
(14) Juego: juego de dados	*(9) El feriante*
(15) Lanzar chinchetas	*(10) Las llaves*
(16) Triángulos con tres dados	*(11) Las coincidencias*
(17) Obtener las caras de un dado	*(12) El dilema de Monty (Applet de M. Sada)*
(19) …	*(13) Juego: La partida inacabada*
	(18) Ley de los grandes números (Applet de M. Sada)

1) Extraer una carta de la baraja

¿Cuántas veces, por término medio, hemos de extraer una carta de una baraja para obtener un oro?

Opinión individual, conjetura un resultado: ___, ___

2) Lanzar dos monedas al aire

Al lanzar dos monedas al aire, ¿qué resultados podemos obtener?

Opinión individual, conjetura un resultado: ___, ___

3) Lanzar tres dados al aire: El problema de Galileo (Cruz et al,1993)

Algunas personas dedicadas a la historia de la ciencia señalan la resolución de este problema como el nacimiento de la Combinatoria y de la Probabilidad modernas. El Gran Duque de Toscana propuso a Galileo el siguiente problema:

El número 9 se descompone en suma de tres sumandos no mayores que seis de tantas formas como el número 10. Sin embargo, si se juega con tres dados se obtiene la suma 10 con mayor frecuencia que la suma 9. ¿Porqué?

4) Reunión para comer (Borrás,1995)

Dos personas llegar, al azar, a un restaurante entre la una y las dos. Deciden esperarse, una a la otra, quince minutos como máximo. La cocina del restaurante cierra a las dos. ¿Qué proporción de días comerán juntos?

Opinión individual, conjetura un resultado: ___, ___

5) Juego: El tiro en la feria (Engel, 1973)

En una feria diez personas, que siempre aciertan, van a disparar a 10 patos situados delante de ellas. Cada persona dispara un tiro. Todas disparan al mismo tiempo eligiendo un pato al azar. ¿Cuántos patos, por término medio, sobrevivirán?

Opinión individual, conjetura un resultado: ___, ___

6) ¿Qué hay en la caja?

En una caja opaca hemos introducido fichas de distintos colores. ¿Cómo podemos averiguar la composición de las fichas del interior de la caja?

7) La rata (Selectividad. València. 1990)

Se coloca una rata en una caja con tres salidas aparentemente iguales. Una de las salidas se considera “buena” y las otras dos “malas”, si la rata elige una salida “mala” recibe una descarga eléctrica que no la deja salir. Se pide la probabilidad de que la rata salga en un máximo de dos intentos, considerando:

a) Que la rata no tiene memoria. b) Que la rata tiene memoria.

Opinión individual, conjetura un resultado: ___, ___

8) Paseos aleatorios por un polígono (Problemes Olímpics. SEMPV. València)

Dos amigas están en el vértice O del triángulo equilátero del dibujo. Recorrer un lado cuesta un minuto. En cada vértice lanzamos una moneda para decidir por cuál de los dos caminos posibles continuaran su paseo. ¿Cuánto tiempo, por término medio, tardaran en volver al punto de partida O?

9) El feriante (Problemes Olímpics. SEMPV. València)

Un feriante invita a jugar con su ruleta por el módico precio de 8 euros por partida. Si la aguja cae en cualquiera de los sectores 1, 2, 3, entonces paga 4 euros; si cae en los sectores 4, 5, paga 6 euros, y si cae en el sector 6 paga 12 euros.

¿Crees que este juego es ventajoso para el feriante?

10) Las llaves.

Les llaves de casa I. Una persona tiene en el bolsillo cinco llaves. Al llegar a la puerta de casa mete la mano en el bolsillo y extrae una llave con la que intenta abrir la puerta. Si no lo consigue, la devuelve al bolsillo, vuelve a sacar otra llave y lo intenta de nuevo.

Las llaves de casa II. Una persona tiene en el bolsillo cinco llaves. Al llegar a la puerta de casa mete la mano en el bolsillo y extrae una llave con la que intenta abrir la puerta. Si no lo consigue, la cambia de bolsillo, vuelve a sacar otra llave y lo intenta de nuevo.

¿Cuántas veces, por término medio, se puede esperar que pruebe para conseguir abrir la puerta?

Opinión individual, conjetura un resultado: ___, ___

11)El problema de las coincidencias (Santaló,1994)

En una bolsa introducimos seis fichas numeradas del 1 al 6. Después una persona les extrae de una en una sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad, por término medio, de que alguna de las fichas extraída coincida con el orden de extracción? Avanza una respuesta y después experimenta.

12)El dilema de Monty (Stewart,1992)

En un concurso de televisión tenemos tres puertas cerradas, detrás de una de ellas hay un gran premio. La presentadora del concurso sabe en que puerta se encuentra el premio. La persona que participa en el concurso, elige al azar una de las tres puertas. A continuación la presentadora abrirá una de las otras dos puertas en la que no se encuentra el premio. Ahora la concursante se encuentra con dos puertas cerradas, y debe elegir entre ellas. ¿Le conviene mantenerse en la puerta elegida el principio o sería mejor cambiar de puerta?

13)Juegos: La partida inacabada (Grupo Cero, 1984)

Dos personas deciden jugar una partida en la que ningún juego puede terminar en empate. La persona que primero llegue a ganar cinco juegos ganara el encuentro. Cuando la persona A va ganando por 3 juegos a 2 a la persona B, la partida se interrumpe. Analiza las posibles formas de terminar la partida.

14)Juego: Joc de daus (Problemes Olímpics. SEMPV. València)

En un juego con dos dados cúbicos, se lanzan los dos dados y con los números que salen se forma una fracción menor o igual a 1. Neus afirma que es más fácil que salga una fracción reducible que irreducible, mientras que José dice lo contrario. ¿Quién tiene razón?

15)Lanzar chinchetas (Engel, 1973)

Si lanzamos 50 chinchetas encima de una mesa, que resultados podemos obtener. Analiza las posibilidades.

16)Triángulos con tres dados

Lanzamos tres dados y anotamos el resultado. ¿Cuál es la probabilidad de que con los tres números podamos construir un triángulo?

17) Obtener las seis caras de un dado

¿Cuántos lanzamientos necesitamos realizar, por término medio, con un dado para obtener las seis caras del dado?

18)La ley de los grandes números

3.3. Producciones de los estudiantes

a) Problema 2: Lanzar dos monedas al aire

Las respuestas de los estudiantes de secundaria están influidas por el sesgo de equiprobabilidad al admitir que a la larga los resultados son igualmente probables (García et al., 2014). Una evidencia del sesgo de equiprobabilidad lo podemos observar en la producción del estudiante (Figura 4), en el problema 2, lanzar dos monedas al aire. Este estudiante al expresar su opinión (segunda columna por la izquierda) indica que cada una de las posibilidades será de un "*33'3*". Este estudiante también muestra evidencias de modificación de su opinión debido a su experiencia al lanzar las dos monedas, indicando finalmente que los porcentajes serán de "*2 cares, 25%", "2 creus, 25%, y 1ca 1cr, 50%*"

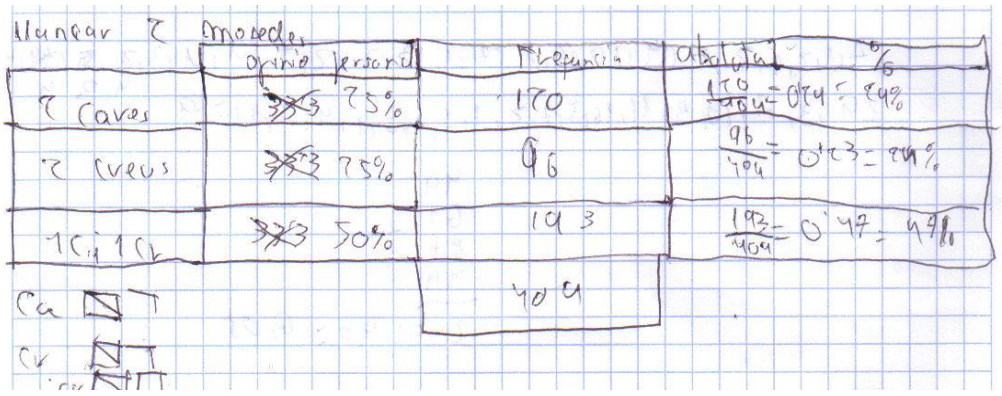


Figura 4. Ejemplo de sesgo de equiprobabilidad y modificación de la opinión

b) Problema 3: Lanzar tres dados al aire: El problema de Galileo

Como evidencia de producciones de estudiantes (Figura 5), en el problema 3, lanzar tres dados al aire, hemos utilizado el problema de Galileo. En primer lugar descompusieron la suma nueve en tantas formas como la suma 10, seis de cada una

de ellas. En segundo lugar planificaron y realizaron la experimentación con 254 experimentos. En tercer lugar organizaron los resultados colaborativos de todo el grupo razonando y visualizando la solución del problema planteado.

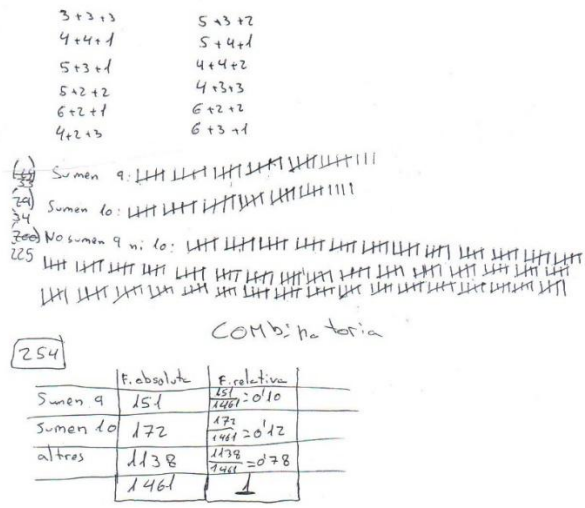


Figura 5. Problema 3. Lanzar tres dados. Problema de Galileo.

Finalmente, con la ayuda del grupo se plantea el espació muestral (Figura 6) en el que los resultados individuales tienen la misma probabilidad, y se resuelve el problema de forma teórica.

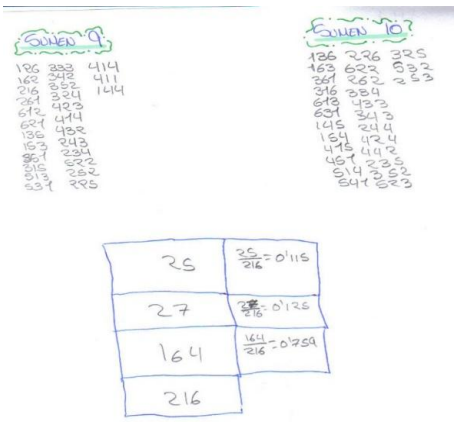


Figura 6. Problema de Galileo. Formula de Laplace

c) Problema 4: Reunión para comer

Simulación realizada por Fernando Arenas (Figura 7) utilizando el GeoGebra. Primero con 100 intentos y después con 10000.

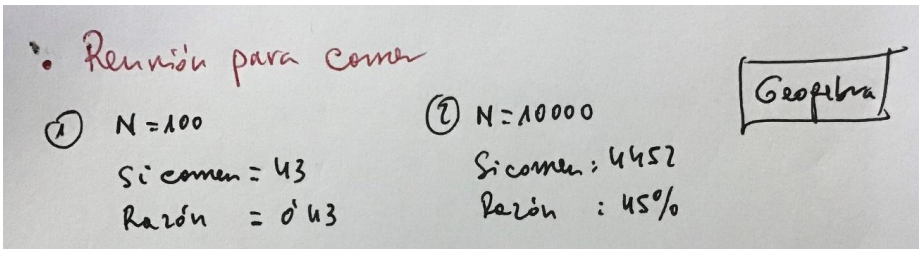


Figura 7. Problema de la reunión para comer (Fernando Arenas)

d) Problema 5. Juego: El tiro en la feria

En el problema 5, el tiro en la feria, podemos observar una evidencia de producción de estudiantes (Figura 8) con la opinión previa a la experimentación, la anotación de 10 experimentos y el cálculo con 12 de ellos.

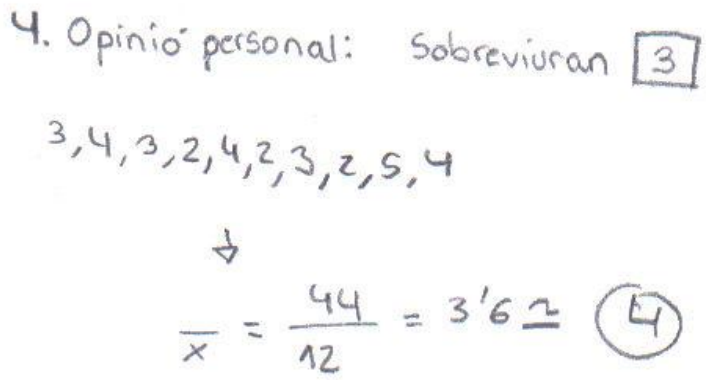


Figura 8. Problema 5. Reunión para comer.

e) La rata

Al intentar resolver problemas de asignación de probabilidades, una de las dificultades que deben resolver ante una situación aleatoria la plantea su capacidad para avanzar una opinión individual. Una evidencia de esta dificultad la podemos observar en la producción de la estudiante (Figura 9) en el problema 7, la rata, al dejar en blanco la respuesta. Además podemos observar que nos indica cuál es la puerta buena (en catalán en el original: porta bona), la realización individual de experimentos, y la organización colectiva de los 100 realizados en los dos apartados del problema. Constatando que si la rata tiene memoria, tiene una mayor probabilidad de salir.

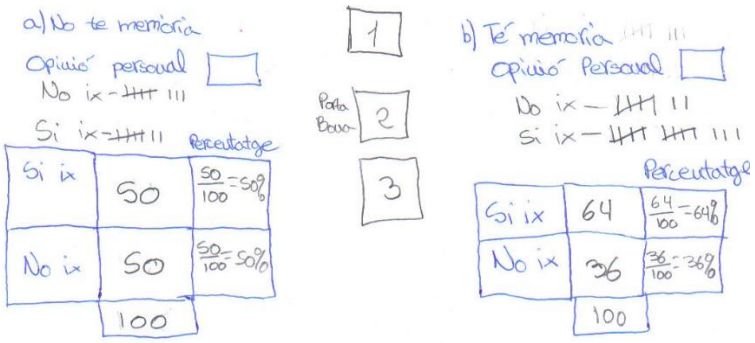


Figura 9. Problema 7. La rata. Ejemplo de dificultad para avanzar un opinión.

f) Problema 8: Paseos aleatorios por un polígono

Una evidencia de dificultad en el tratamiento de la información la podemos observar en la producción de la estudiante (Figura 10) en el problema 8, paseos aleatorios por un polígono. No indica ni su opinión, ni su experimentación, pero si que indica que al lanzar la moneda, con la cara ira a la derecha y con la cruz a la izquierda.

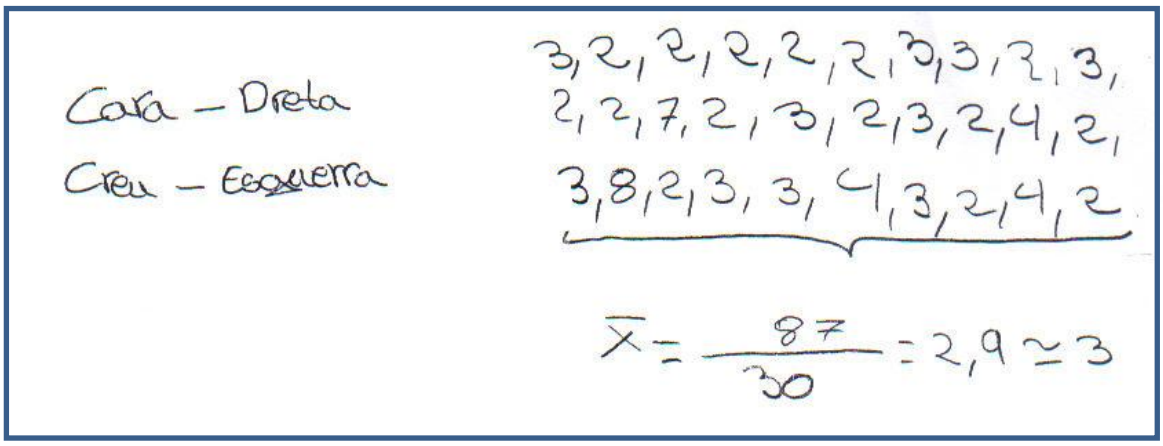


Figura 10. Problema 8. Sin opinión y sin experimentación

g) Problema 9: El feriante

En el problema 9, el feriante, podemos observar una evidencia de producción de la estudiante Laia (Figura 11) en la que ha modificado la propuesta inicial, realiza 20 experimentos, e indica que no es ventajoso para el feriante.

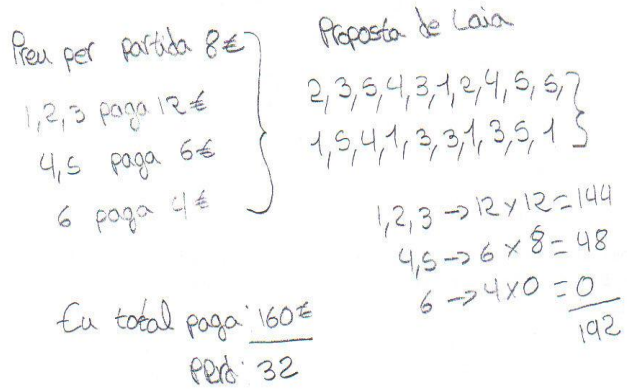


Figura 11. Enunciado modificado a propuesta de la estudiante Laia

h) Problema 10: Las llaves de casa.

En el problema 10, las llaves de casa, podemos observar una evidencia de producción de estudiantes (Figura 12) con la opinión previa, la utilización de un dado con 10 caras, indicando cuáles son las llaves que abren la puerta (4 y 9, enmarcadas en la parte superior derecha), la realización de 30 experimentos.

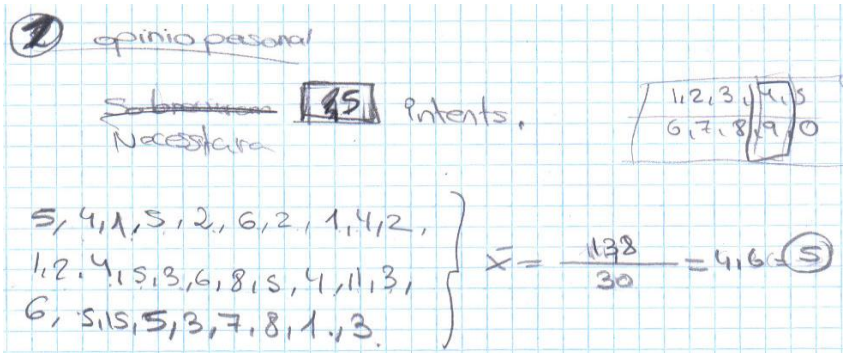


Figura 12. Problema 10. Llaves I.

En las llaves II (Figura 13) podemos observar que al cambiar la llave de bolsillo su opinión es menor que en las llaves I, en que se devuelve la llave al mismo bolsillo.

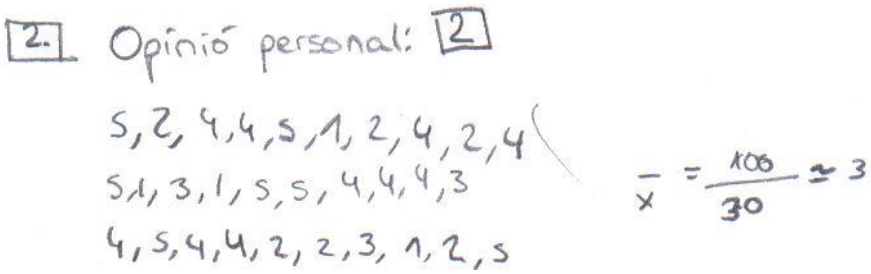
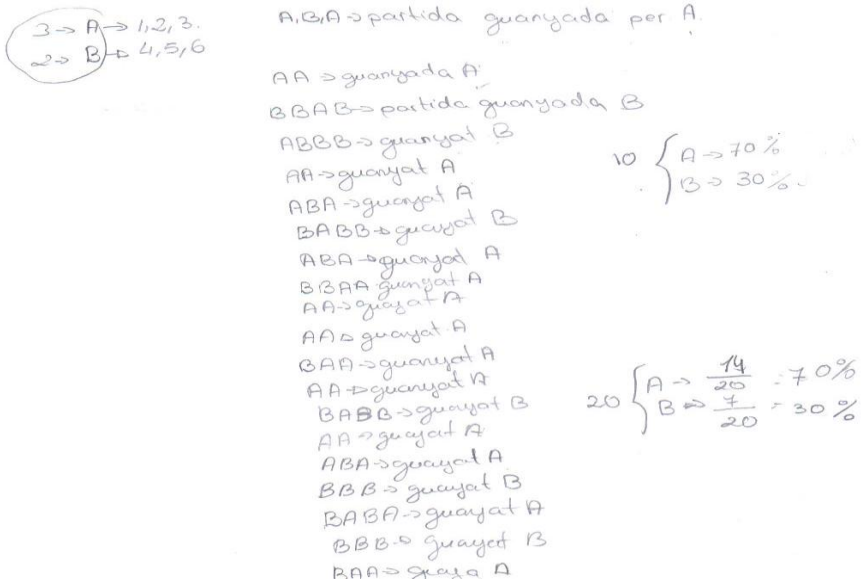
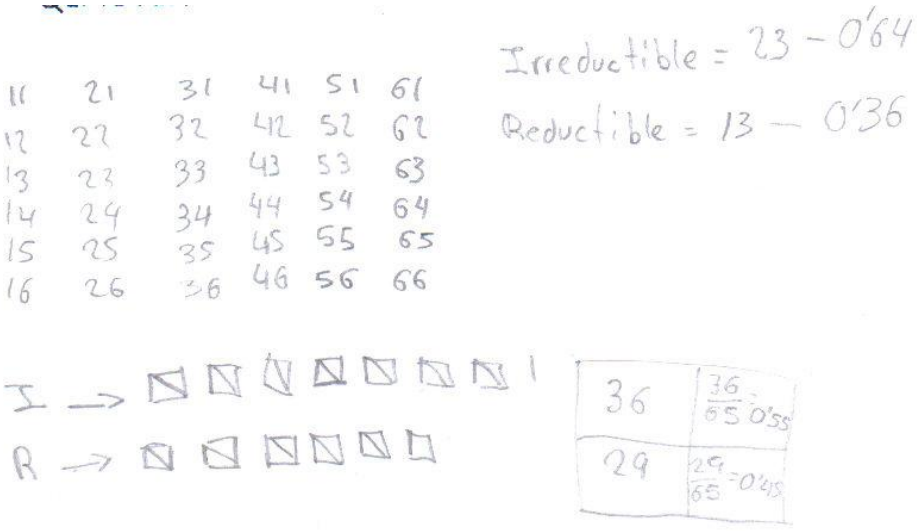


Figura 13. Problema 10. Llaves II.

i) Problema 13. Partida inacabada.



j) Juego: Joc de daus



Probabilidad experimental/Probabilidad teórica

Y para terminar una cita interesante:

“If our students are candidates for advanced mathematics then, no doubt, they should be trained to use the definitions as an ultimate criterion in various mathematic tasks… If, on the other hand, our students are not candidates for advanced mathematics, then it is better to avoid the conflicts" (Vinner, 2002)

4. Bibliografía

Alsina, C; y Fortuna, J.M. y Pérez, R. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, Síntesis.

Álvarez, J.L. (1995). El azar y la probabilidad en la ESO. *Revista UNO, nº. 3,* 45-53.

Arenas, F., Muñoz, J. y Pons, J. (2023). Identificación de estrategias de resolución de problemas en un contexto de Olimpíada Matemática: un estudio de casos. (Ed.) *XX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (20 JAEM),* 221-238. Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi" (FESPEM).

Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics. A multi-cultural view of mathematical ideas*. Pacific Grove, California: Brooks/Cole

Batanero, C.; Godino, J.D. y Cañizares, M.J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. En J. Adler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference,* pp. 13-23. International Commission on Mathematical Instrucction.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en adecuación secundaria. *Relime, nº. 8*, (3), 247-263.

Bernoulli, J. (1713). *Ars Cojectandi: Usum & Applicationem Praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicus* (en llatí). Traducció a l'anglés del capítol 4 a http://www.sheynin.de/download/bernoulli.pdf. Consulta el 28 de juliol de 2022.

Borrás, E. (1995). Procedimientos y recursos para trabajar la estadística y la probabilidad en la enseñanza obligatoria. *Revista UNO, nº. 3,* 61-70.

Callejo, M.L. (2000). El papel de los problemas en la educación matemática: una mirada a través de la historia. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, nº. 3* (2), 297-307.

Colera, J. (1895). La estadística mediante experiencias de simulación. En J.M. Benavente, M.J. Palacios, M.D. Prada (Coord,) *Nueva revista de enseñanzas medias, nº. 7*,75-93.

Cros, L. (2022). Como llevar juegos de mesa al aula. (Ed.) *Servicio de Publicaciones de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPEM). Actas 19 JAEM,* p. 47. A Coruña.

Cruz, M., González, G. y Llorente, J. (1993). *Actividades sobre azar y probabilidad*. Ministerio de Educación y Ciencia. Ed. Narcea

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking, 95-126. Kluver.

Engel, A. (1973). *Probabilidad y Estadística 1*. Ed. Mestral.

García, J.I.; Medina, M. y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *AIEM-Avances Investigación en Educación Matemática, nº.6*, 2-23.

Gasco-Txabarri, J. (2017). La resolución de problemas aritmético-algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). *Relime, nº. 20* (2), 167-192.

Giraldo, M.C. (2018). Entornos virtuales para el aprendizaje de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.) *XIV Congreso Regional de Matemáticas,* pp. 215-220. Universidad de León.

Glaymann, M. y Varga, T. (1975). *La probabilidad en las escuelas*. Ed. Teide.

Grupo Cero (1984). *De 12 a 16 años. Un proyecto de currículum de matemáticas*. València.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 27-44. Córdoba: SEIEM.

Hernán, F. (2022). Lo que he aprendido. *Revista Suma, nº. 100*, 11-15.

Inzunza C. (2017). Conexiones entre las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, nº. 11,* 69-86.

Montero, I., Callejo, M.L. y Valls, J. (2020). Instrumentación de una progresión de estrategias de resolución de problemas por estudiantes para maestro. *Enseñanza de las Ciencias, nº. 38* (2), 83-1001.

Muñoz, J., Arenas, F. y Pons, J. (2023). Anàlisi dels diferents estadis de raonament utilitzats pels estudiants de tercer i quart d'ESO: al resoldre problemes aritmètics d'olimpíades matemàtiques. *XIV Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi".

NCTM-National Council of Teachers of Mathematics (1981). *Teaching Statistics and Probability*. Ed. A.P. Shulte y J.M. Smart. Virginia.

NCTM-National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, VA: Autores.

Pajares, M. (2009). Experimentación con probabilidades: propuesta para tercero y cuarto de secundaria. Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Actas XIV JAEM*, *31*. Girona.

Pazo R. y Fernández, E. (2022). Jugando con ESO de las Matemáticas (1º y 2º). (Ed.) Servicio de Publicaciones de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPEM). *Actas 19 JAEM, 40*. A Coruña.

Pons, J. (2004). Taller d'assignació de probabilitat. Jornades d'Educació matemàtica de la Comunitat Valenciana. En García, F.J. (Ed.), *Societat d'Educació Matemàtica Al-Khwarizmi,* 259-262. Sant Vicent del Raspeig (Alacant).

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, BOE, núm. 76, de 30 de marzo de 2022.

Santaló, L.A. (1994). *Las matemáticas: una filosofía y una técnica*. Es. Ariel.

Stewart, I. (1992). Juegos matemáticos. *Investigación y Ciencia. Enero 1992, nº. 184*.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Relime, nº. 10* (2), 275-300.

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In *Advance mathematical thinking,* 65-81. Springer, Dordrecht.

Juegos en las Olimpiadas Catalanas de ESO

Autor/a Joan Folguera Farré
mail@autor/a jfolgue2@xtec.cat
Institución/Centro de referencia MMACA (Museo de MAtemáticas de CAtaluña)

Núcleo temático: Recursos para el aula y Procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En las olimpiadas catalanas de ESO "*Fem matemàtiques"* hay tres fases, y en cada fase se acostumbra a poner un juego matemático que permite mostrar al alumnado la parte lúdica de las matemáticas.

En el taller, el autor mostrará algunos retos en los que los asistentes tendrán que buscar estrategias para encontrar la solución ganadora, y después, tendrán que relacionar el juego con algunas cuestiones matemáticas. Por ejemplo, a través del juego se pueden estudiar giros y simetrías, cálculo modular, cálculo mental, etc.

Generalmente es la pregunta que más ha gustado a los alumnos y el principal objetivo es aprender matemáticas a través del juego, como así ocurre.

Palabras clave: juegos, geometría, simetrías, cálculo, giros.

1. Descripción

La mayor parte de estos retos corresponden a la primera fase de la olimpiada donde se proponen tres retos a los alumnos que ellos han de responder en un amplio informe que redactarán en grupos de tres o cuatro alumnos. Los alumnos disponen de más de dos meses para resolver los problemas.

El autor de este taller es un miembro del grupo de trabajo de problemas del "*Fem matemàtiques*" y mostrará algunos juegos, todos ellos creados por el propio autor, excepto el tercer reto.

El primer reto se juega con fichas de tres colores en el que juegan dos jugadores por turnos, cada jugador añade fichas de un color según su criterio y elimina el mismo número de fichas de los otros dos colores, gana el jugador que deja en la mesa todas las fichas del mismo color.

El segundo reto consiste en un tablero formado por 10 hexágonos en forma de triángulo de lado cuatro hexágonos (Ver imagen 1), hay cinco trihexágonos en forma de triángulo con unos puntos dibujados en cada hexágono (Ver imagen 2). El juego consiste en escoger 3 trihexágonos y colocarlos adecuadamente en el tablero de manera que quede libre el hexágono central del tablero y de manera que la suma de todos los puntos que forman cada lado del tablero, sumen seis, así mismo la suma de los puntos contenidos en los tres vértices también es seis y la suma de los puntos que contienen los seis hexágonos interiores que tienen forma de hexágono también suma seis. Existe, también, la posibilidad de contemplar el reto de conseguir que todas las sumas sean siete, y un tercer reto, para lograr que dichos puntos sumen ocho.

El tercer reto consiste en un tablero en forma de cinco hexágonos de manera que estos están divididos en seis triángulos equiláteros (Ver imagen 3). Las fichas tienen forma de trapecio formado por tres triángulos, es decir medio hexágono, otras tienen forma de rombo formado por dos triángulos y unas terceras fichas tienen forma de triángulo equilátero (Ver imagen 4), (FEEMCAT, 15 de noviembre de 2021).

El juego consiste en que dos jugadores colocan de manera alternada fichas en el tablero hasta completar los cinco hexágonos. Gana el jugador que coloca la última ficha.

Finalmente, el autor repartirá una cruz geomágica troquelada (ver imagen 5), creada por el propio autor, que se ha dado como obsequio a todos los concursantes que han participado en la olimpiada catalana, en la que los asistentes deben solucionar los retos planteados.

2. Material

Fichas de parchís, otras fichas especiales de juegos y plantillas de los tableros. Todo ello suministrado por el autor.

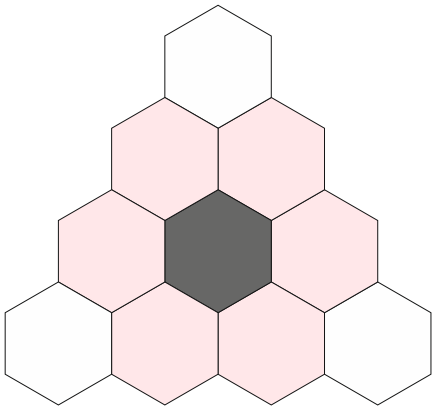


Imagen 1. Tablero formado por diez hexágonos en forma de triángulo

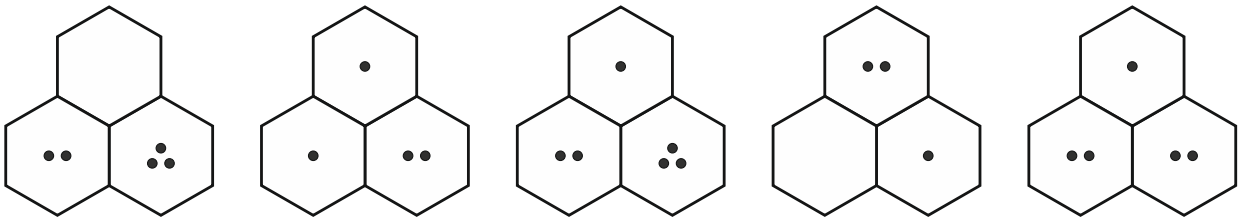


Imagen 2. Las cinco fichas del juego que utiliza el tablero de la imagen 1

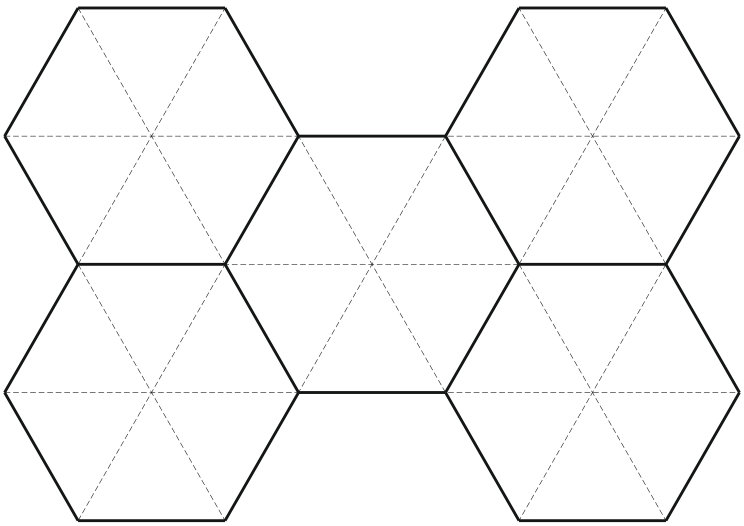


Imagen 3. Tablero formado por cinco hexágonos

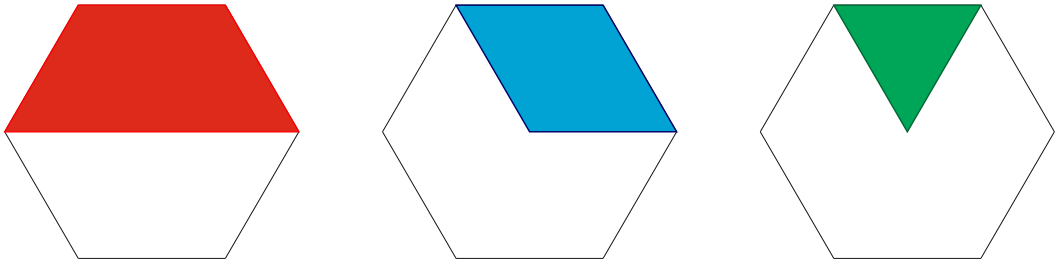


Imagen 4. Las tres fichas del juego que utiliza el tablero de la imagen 3:
la forma de las fichas corresponde a la parte coloreada

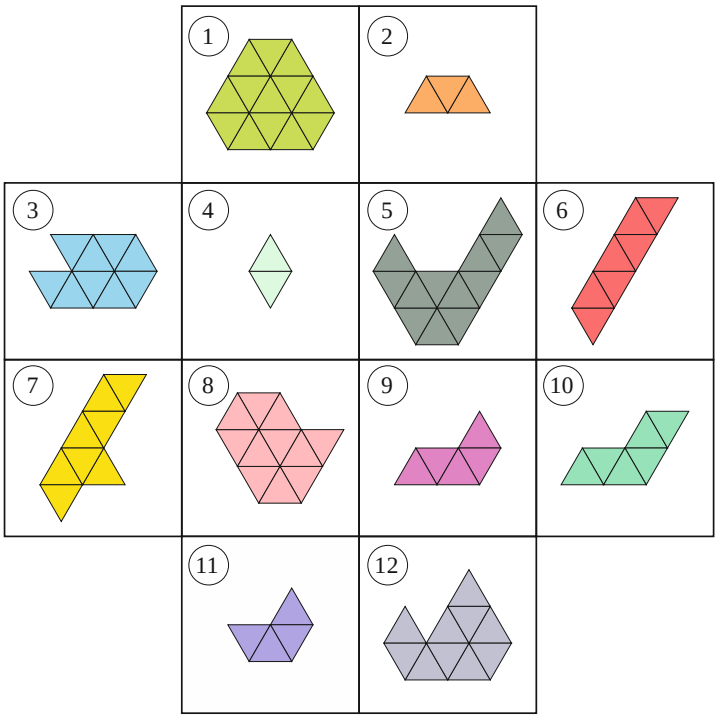


Imagen 5. Cruz geomágica

3. Actividades

3.1 Juego con fichas de colores

Encima de una mesa hay fichas de tres colores (amarillo, rojo y verde) tal como están dispuestas en el siguiente esquema:

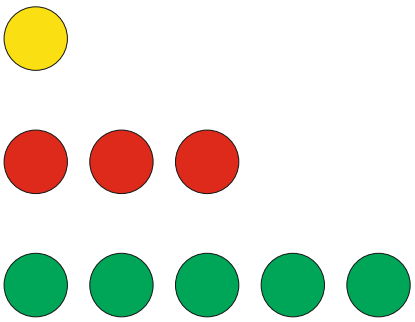


Imagen 6. Disposición inicial de las fichas.

Los dos jugadores juegan por turnos hasta que uno de los dos gane la partida.

En cada jugada escogen uno de los tres colores y un número natural n, de manera que se añaden en la mesa n fichas del color escogido y se retiran exactamente el mismo número (n) de los dos colores restantes.

El juego se acaba cuando un jugador consigue que todas las fichas que hay encima de la mesa sean del mismo color.

A tener en cuenta:

- Ha de poder eliminar n fichas de los colores que NO ha escogido.

  Por ejemplo, en el inicio de la partida si escoge el color rojo (ver imagen 6) no puede escoger el número 2 ja que no se puede eliminar dos fichas de color amarillo porque solo hay una.

- Si en algún momento quedan dos colores se tiene que escoger obligatoriamente el color que falta.

Las cuestiones que se preguntan son:

- Cuando el primer jugador realiza una jugada concreta, ¿de qué manera juega el segundo jugador para vencer?

- ¿Qué jugador tiene ventaja y cuál es la estrategia vencedora?

- ¿Cuál es el número mínimo de jugadas que puede tener el juego? ¿Y el máximo?

- ¿De qué color quedaran las fichas al final del juego?
- Al final del juego ¿quedará un número par o impar de fichas?

(FEEMCAT,14 de noviembre de 2023).

También se puede cambiar la situación inicial del juego.

Esta prueba se ha realizado en la primera fase, en toda Cataluña, durante el curso 2023-24.

3.2 El triángulo con hexágonos

El juego está descrito en el cuarto párrafo del apartado 1. Descripción.

En este juego se tiene que descubrir cuáles son las fichas que se necesitan para que todo sume seis (o siete u ocho, según el reto escogido).

Es un juego de cálculo mental rápido.

Este juego se ha realizado, en la segunda fase, en Lleida. No está publicado en ningún sitio, ha sido creado por el autor del taller.

3.3 Completar hexágonos

El juego está descrito en el quinto párrafo del apartado 1. Descripción.

Los auditores del taller jugarán por parejas y tendrán que descubrir qué jugador tiene ventaja y cuál es la estrategia ganadora.

Hay dos estrategias ganadoras, la más bonita es usando simetrías. Con este juego se utilizan el centro de simetría y simetrías

Esta prueba se realizó, en la primera fase, en toda Cataluña durante el curso 2004-05.

3.4 Cruz Geomágica

En el "*Fem matemàtiques*" cada curso, se reparte un juego con cartulina troquelada, y concretamente este curso, este juego lo ha diseñado el autor del taller y consiste en una cruz con doce cuadrados, y dentro de cada cuadrado hay una figura geométrica, de manera que con las cuatro figuras de cada fila o columna compuesta por cuatro cuadrados o por las de cuatro cuadrados que forman entre ellos un cuadrado de 2x2,

se pueden componer una figura objetivo (Imagen 7) pudiendo girar o hacer simetría con estas cuatro figuras. La figura de la izquierda es la composición de las cuatro figuras geométricas que se encuentran en la primera fila de cuatro elementos 3,4,5,6 y la figura de la derecha es la composición de los cuatro elementos que se encuentran en el cuadrado superior 1,2,4,5 (Imagen 8)

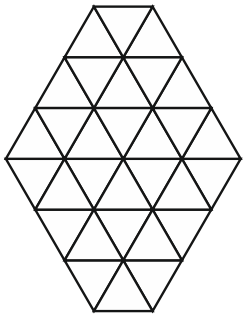


Imagen 7. Figura objetivo

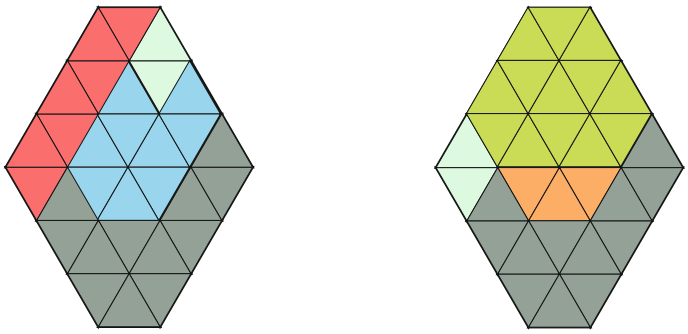


Imagen 8. Ejemplos de composiciones

Los asistentes tendrán que componer diversas figuras para formar la figura objetivo.

La cruz no está publicada en ningún sitio, ha sido creado por el autor del taller.

4. Justificación de los núcleos temáticos

Evidentemente, son recursos para el aula, es un material en el que mediante juegos el alumno puede comprender o reforzar algunos conocimientos matemáticos

Algunos objetivos de la Olimpiada matemática catalana (*Fem matemàtiques*) y que justifican el núcleo temático de procesos son:

- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemática presentando actividades para resolver en equipo y exigiendo la elaboración de informes detallados.

- Ayudar a los alumnos a adquirir seguridad y confianza en sus capacidades para las matemáticas presentándoles actividades motivadoras que suponen un reto para ellos.

(FEEMCAT, 2022)

5. Temporización

- 25 minutos para la primera actividad.
- 20 minutos para la actividad 2
- 20 para la actividad 3.
- 10 minutos para la actividad 4
- 15 minutos para consultas.

Referencias

FEEMCAT. (15 de noviembre de 2021). *Fem matemàtiques 2005. Problemas de la primera Fase 2n ESO.*

https://drive.google.com/file/d/140taaUMQXS1dRQ2P3klBxJ5dIP7uyzbV/view

FEEMCAT. (2022). *Què és el Fem matemàtiques?.*

https://fm.feemcat.org/category/fem-matematiques-2022/

FEEMCAT. (14 de noviembre de 2023). *Primera Fase 2n ESO.* *https://drive.google.com/file/d/1VDOlFG9ZVICb6NBepFPOQQiY5sltJYGy/view*

FEEMCAT. (14 de noviembre de 2023). *Primera Fase 3r i 4t ESO.* *https://drive.google.com/file/d/1evohcri_-qLF-WatbjsS2fhQlfiJCNa9/view*

Explorando en entorno con GeoGebra Discovery

Belén Ariño-Morera(1)
Belen.arinol@urjc.es *(1)*
Universidad Rey Juan Carlos/Universidad Complutense de Madrid (1)

Claudia Lázaro del Pozo(2)
claudia.lazarodelpozo@educantabria.es *(2))*
Consejería de Educación, Formación Profesional y Universidades, Gob. de Cantabria

Tomás Recio(3)
trecio@nebrija.es *(3)*
Universidad Antonio de Nebrija (3)

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula, Formación del profesorado.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad

RESUMEN

GeoGebra Discovery es una versión de GeoGebra, accesible off y online, con capacidades ampliadas para responder, con rigor matemático, a diferentes preguntas que realice el usuario relativas a propiedades geométricas de una figura. Tras recibir una breve introducción al uso y características de GeoGebra Discovery y visualizar algunos ejemplos de la actividad que se les propondrá realizar a continuación, los asistentes al taller, en pequeños grupos, recorrerán el entorno de la Escuela de Náutica donde se celebrará el taller, captando con su teléfono móvil distintas imágenes de objetos (a su elección: carteles, ventanas, puertas, fachadas...) ubicados en ese entorno. De regreso al aula, los participantes explorarán dichas imágenes, colocándolas sobre la ventana de GeoGebra Discovery, obteniendo diversas propiedades geométricas de los objetos elegidos con ayuda de las herramientas de razonamiento automático de este programa. El taller concluirá con la presentación, análisis e interpretación de las propiedades halladas por los participantes, así como del posible interés educativo de esta metodología.

Palabras clave: matemáticas en contexto, GeoGebra Discovery, descubrimiento automático de propiedades

1. GeoGebra Discovery

A lo largo de la última década hemos trabajado (Botana et al. 2020, Hohenwarter et al. 2019, Kovács et al. 2022, Recio et al. 2022) en el desarrollo de una especie de *geómetra automático*, implementado en una versión especial del popular programa GeoGebra[66].

Ciertamente, la versión general de GeoGebra --con más de 100 millones de usuarios en todo el mundo-- incluye ya herramientas de razonamiento automático. Por ejemplo, GeoGebra es capaz de verificar la verdad o falsedad de una relación conjeturada por el usuario entre dos objetos geométricos de una construcción, o de establecer directamente una posible propiedad de los mismos. Aunque el rendimiento de tales comandos (Relación, Demuestra, DemuestarDetalles) es extraordinario, está sujeto a ciertas limitaciones. En particular, sólo es capaz de probar enunciados que involucren igualdades, no desigualdades; y tampoco es capaz de encontrar relaciones entre longitudes de segmentos que no sean de igualdad. Véanse Figuras 1 y 2 para algunos ejemplos.

La versión especial a la que haremos referencia en el taller es la de GeoGebra Discovery[67], disponible en versiones off y online (*https://autgeo.online*), capaz de encontrar relaciones que no sean de igualdad, o de encontrar desigualdades, entre elementos de una construcción, como se muestra en las Figuras 3 y 4.

[66] www.geogebra.org

[67] https://kovzol.github.io/geogebra-discovery/

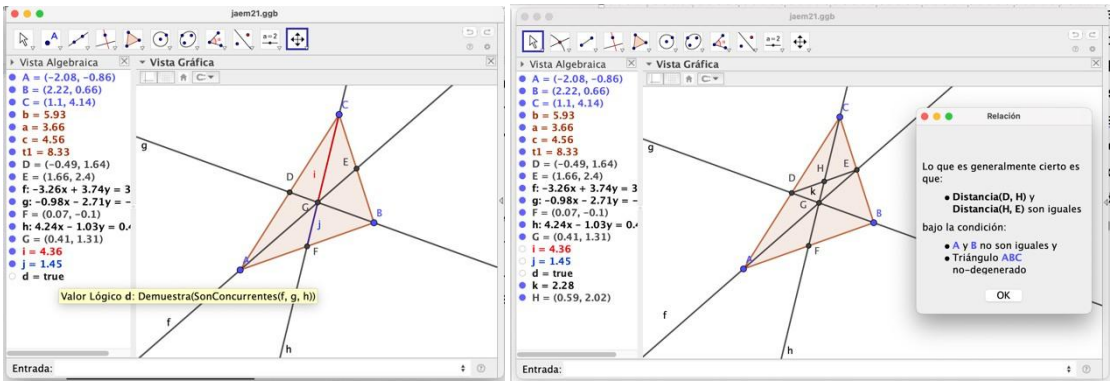


Figura 1: A la izda. GeoGebra confirma que las medianas ***f,g,h*** de un triángulo ***ABC*** son concurrentes. A la derecha, GeoGebra halla que existe una relación de igualdad entre los segmentos ***DH*** y ***HE***, formados por la intersección de la mediana *h* y el segmento ***DE*** determinado por los puntos medios de ***AC*** y ***BC***.

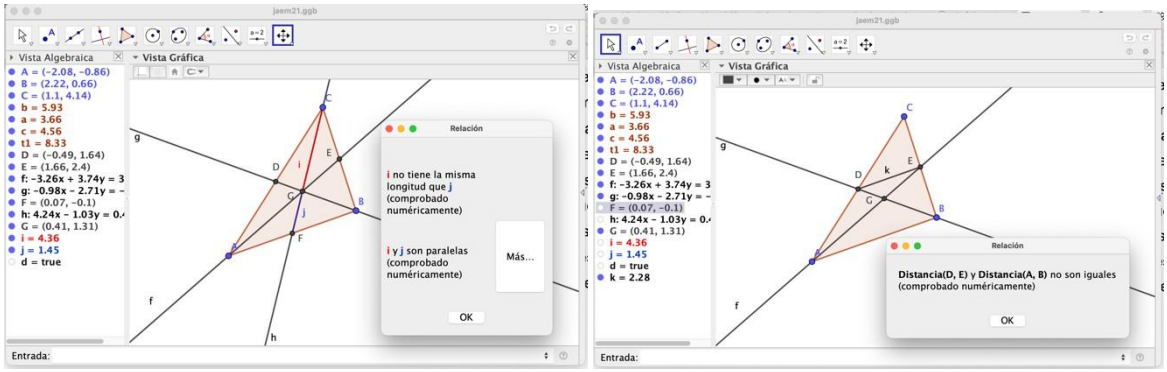


Figura 2: A la izda, GeoGebra no es capaz de encontrar la relación entre el segmento i=***CF*** (donde ***F*** es el punto medio de ***AB***) y j=***GF*** (donde ***G*** es la intersección de las medianas). A la dcha. GeoGebra no puede hallar la relación entre el segmento ***DE*** determinado por los puntos medios de ***AC*** y ***BC***, y el lado ***AB***.

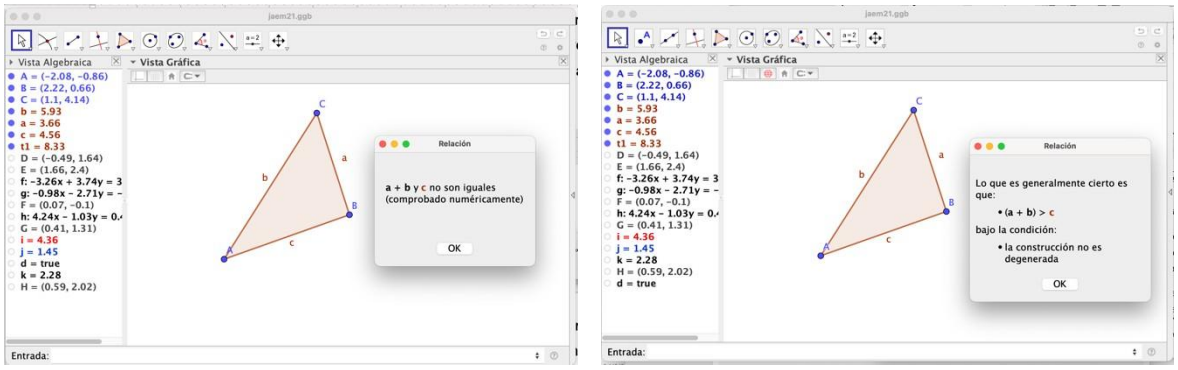


Figura 3: A la izda, GeoGebra no es capaz de encontrar la relación entre ***a+b*** y ***c***, siendo ***a, b, c*** los lados del triángulo, solo afirma que ***a+b*** y ***c*** son diferentes.
A la dcha. GeoGebra Discovery halla automáticamente la desigualdad triangular.

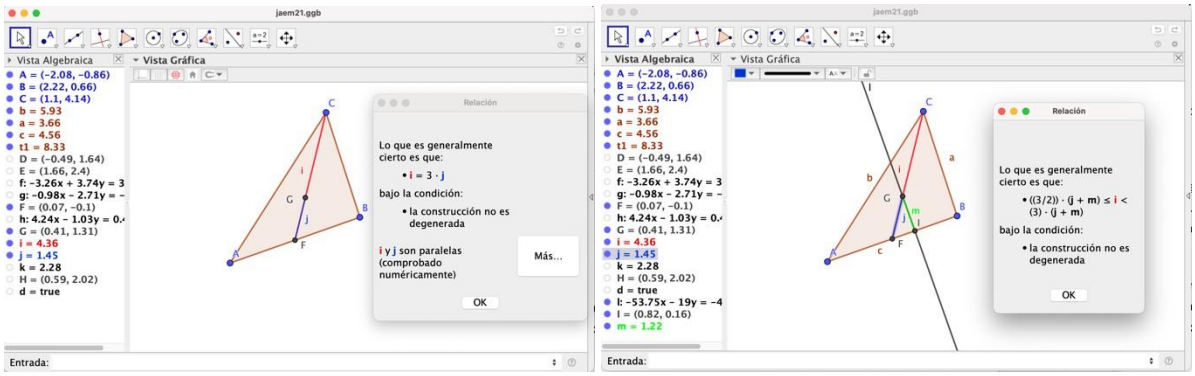


Figura 4: A la izda. GeoGebra Discovery encuentra automáticamente la relación entre los segmentos i=***CF*** (donde ***F*** es el punto medio de ***AB***) y j=***GF*** (donde ***G*** es la intersección de las medianas). A la dcha. GeoGebra Discovery encuentra una relación (¿poco conocida?) de desigualdad entre el segmento *i* y la suma de *j* y *m,* donde *m* es el segmento perpendicular que va desde el baricentro ***G*** al lado ***AB***.

2. Explorando el entorno con GeoGebra Discovery

El objetivo del taller no es simplemente difundir las características de GeoGebra Discovery, sino, tras una breve introducción a este programa, el desarrollar por parte de los asistentes una aplicación del mismo en un contexto muy próximo. Así, se les propondrá recorre el entorno de la Escuela de Náutica donde se celebrará el taller, captando con su teléfono móvil distintas imágenes de objetos (a su elección: carteles, ventanas, puertas, fachadas...) ubicados en ese entorno. De regreso al aula, los participantes (ayudados por los profesores que imparten el taller) explorarán dichas imágenes, colocándolas sobre la ventana de GeoGebra Discovery, obteniendo diversas propiedades geométricas de los objetos elegidos con ayuda de las herramientas de razonamiento automático de este programa. Ver Figuras 5 y 6.

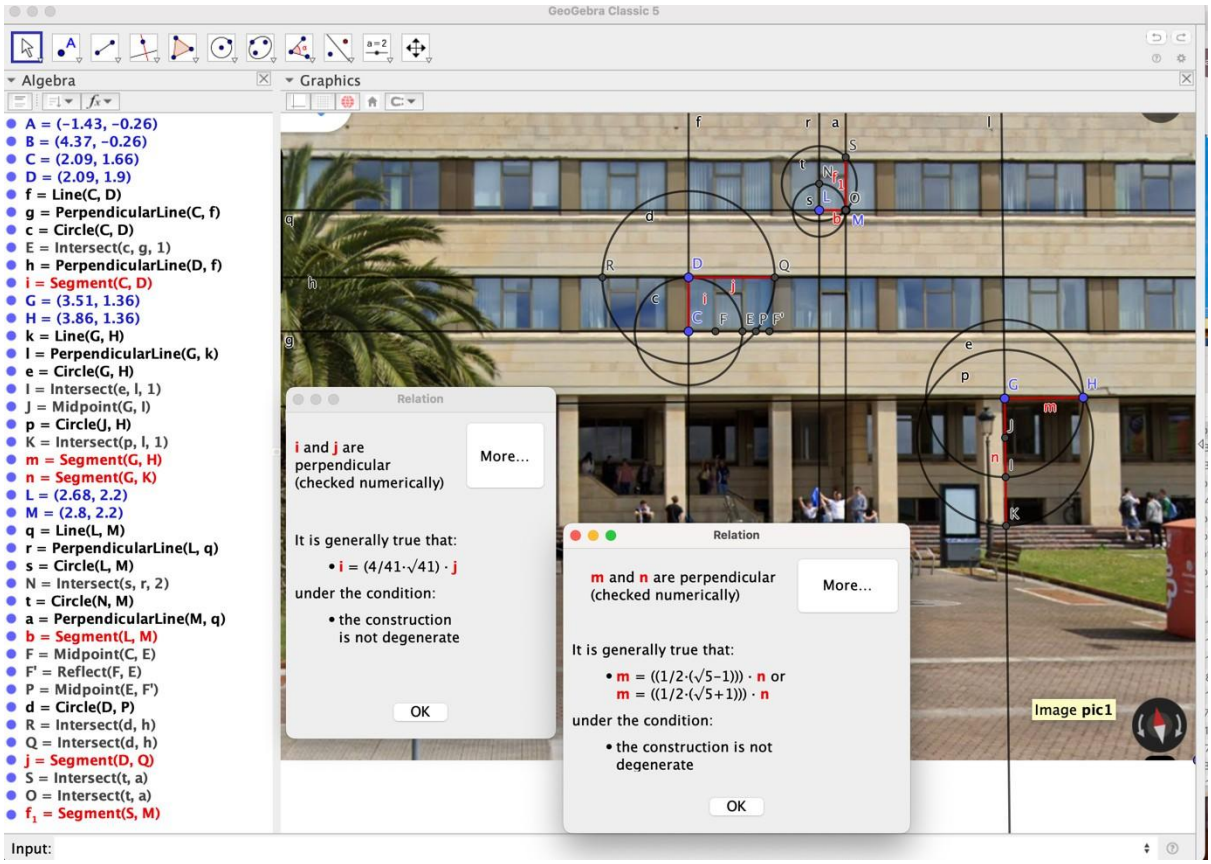


Figura 5: Propiedades geométricas de las ventanas de la fachada principal de la Escuela de Náutica de la UC, descubiertas automáticamente por GeoGebra Discovery, sobre una construcción efectuada por el usuario.

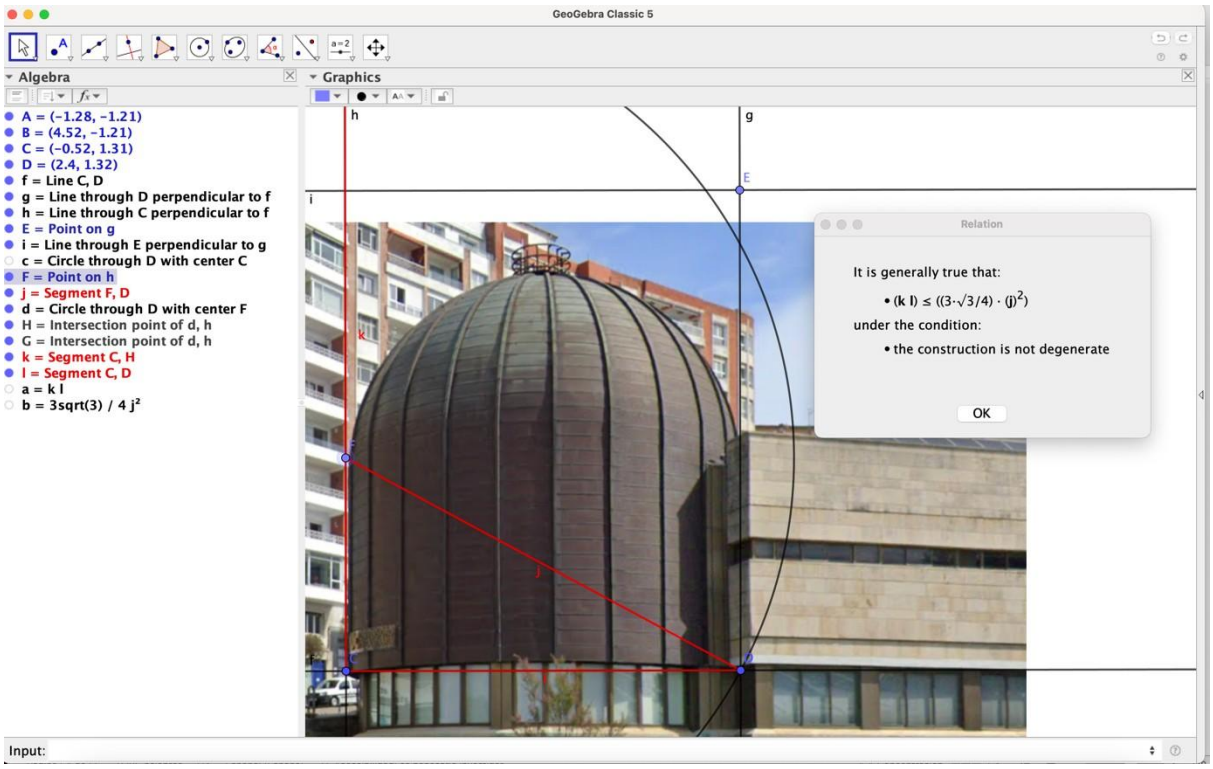


Figura 6: Propiedades geométricas (desigualdades) en el entorno de la Escuela de Náutica de la UC, descubiertas automáticamente por GeoGebra Discovery, sobre una construcción efectuada por el usuario

3. El factor humano

Finalmente, y tal vez la parte más interesante del taller, se desarrollará la presentación por parte de cada grupo de los resultados obtenidos y de la interpretación (i.e. la visión *humana* de la información proporcionada por el programa GeoGebra Discovery: ¿cómo probaríamos *nosotros* esas relaciones, dónde habría que colocar tal punto para que se alcance el máximo en esta desigualdad que ha encontrado GeoGebra, etc?) de las propiedades halladas, para, a continuación, propiciar el análisis colectivo de las mismas y la discusión del aprovechamiento educativo de esta metodología, que puede fomentar la interacción en el aula de aspectos tan diversos y, curricularmente, relevantes: tecnología, arte, arquitectura, geometría, razonamiento, resolución de problemas, matemáticas en contexto...

Referencias

Botana, F., Kovács, Z., Recio, T. y Vélez, M. P. (2020). Hacia un autómata geómetra.

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 23, Núm. 2, págs. 343--

371. Accesible en http://gaceta.rsme.es/vernumero.php?id=114

Hohenwarter, M., Kovács, Z. y Recio, T. (2019). Mora, J.A. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Volumen 100, mayo de 2019, págs. 79-84. Accesible en https://drive.google.com/file/d/1u_MO7fJXcSFu5FqXuIgkhj-WnNo6z1L2/view.

Kovács, Z., Recio, T. y Vélez, M.P. (2022). Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for? In: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. van Vaerenbergh (eds): *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning.* Series: Mathematics

Education in the Digital Era, Springer, 2022, pp. 23-44

https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2

Recio, T., Van Vaerenbergh, S. y Vélez, M. P. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Año XVI - Número 59. Agosto 2020, págs. 08-15. Accesible en https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202

Desarrollando competencias matemáticas: estrategias para un aprendizaje activo y seguro

María Teresa Navarro Moncho
mt.navarromoncho@edu.gva.es
Centre Específic d'Educació a Distància de la Comunitat Valenciana

Núcleo temático: Recursos para el aula, inclusión.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

En el contexto normativo actual, las competencias específicas son el pilar central de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este taller, reflexionaremos sobre la importancia de diseñar actividades competenciales ricas en contenido matemático y su gestión en el aula, asegurando que cada estudiante sea el protagonista de su propio aprendizaje en un ambiente inclusivo y emocionalmente seguro.

Exploraremos diversas propuestas competenciales utilizando materiales sencillos como monedas y tramas de puntos, donde cada estudiante tendrá la oportunidad de desarrollar ideas matemáticas valiosas, respetando la diversidad de estilos de aprendizaje. Estas actividades permitirán a los alumnos desarrollar habilidades para resolver problemas, tomar decisiones y comunicar sus ideas matemáticas de manera clara. Entre estas habilidades se incluyen la capacidad de investigar, argumentar, hacer conjeturas, realizar conexiones y modelar, todas ellas esenciales para fomentar el pensamiento matemático y enfrentar los desafíos del mundo real.

Palabras clave: resolución de problemas, recursos, inclusión

21 JAEM

MATEMÁTICAS ENTRE EL MAR Y LA MONTAÑA

Mesas de experiencias

T3 Puzzle: un material por descubrir

Carles Granell Fernández

Cgranel4@xtec.cat

Col·legi Sant Lluís

Núcleo temático: Recursos para el aula y Procesos

Modalidad: Mesa de experiencias

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

El *T3 Puzzle* es un rompecabezas diseñado por Yoshiaki Araki en el año 2014 que está formado por triángulos equiláteros del mismo tamaño que, cuando se invierten los colores, permiten obtener dos piezas diferentes. Con este recurso se proponen trabajar diferentes tipos de teselaciones, así como otras investigaciones exhaustivas relacionadas con la combinatoria, el trabajo de fracciones y su uso para la medida y otros retos o juegos para trabajar en diferentes etapas educativas. Además, se presenta un juego de estrategia para dos jugadores/as que usa el material.

Palabras clave: T3 Puzzle, Teselaciones, Material didáctico

Presentación

En el año 2014, el matemático japonés Yoshiaki Araki presentó el *T3 Puzzle*, un rompecabezas formado por triángulos equiláteros de la misma medida en que la parte superior y la parte inferior están pintadas de dos colores que, cuando se invierten, permiten obtener dos piezas diferentes (**Imagen 1**).

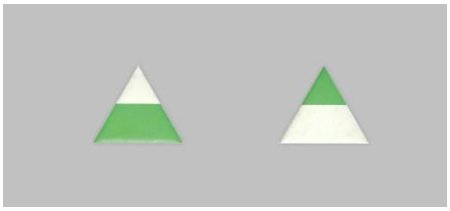


Imagen 1. Piezas del *T3 Puzzle*

Propuestas didácticas

Construcción de teselaciones

La forma de triángulo equilátero que tienen las piezas del *T3 Puzzle* permite crear diferentes mosaicos y teselas, ya sea con un patrón de construcción concreto, como por ejemplo crear flores diferentes (**Imagen 2**) con el aplicativo del material (*https://www.t3puzzle.com/b/*) o bien otras figuras de forma libre para explorar las posibilidades que ofrece el material (**Imagen 3**).

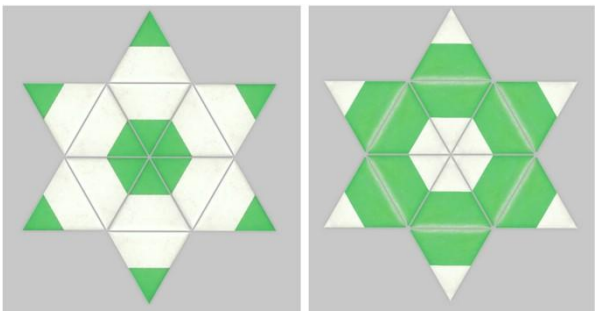


Imagen 2. Flores con patrones diferentes

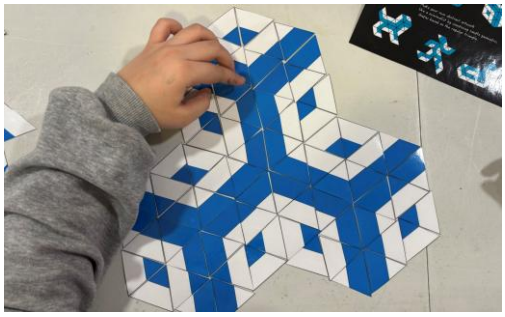


Imagen 3. Exploración libre con las piezas

Se pueden proponer otras actividades de exploración en combinación con otros materiales, como los libros de espejos (**Imagen 4**) o bien la creación de obras artísticas a partir de figuras pintadas por el propio alumnado (**Imagen 5**).

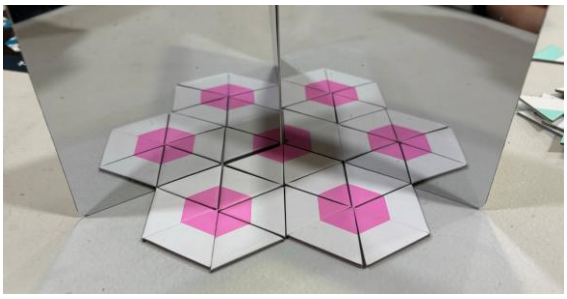


Imagen 4. Piezas en un libro de espejos en 3º de primaria

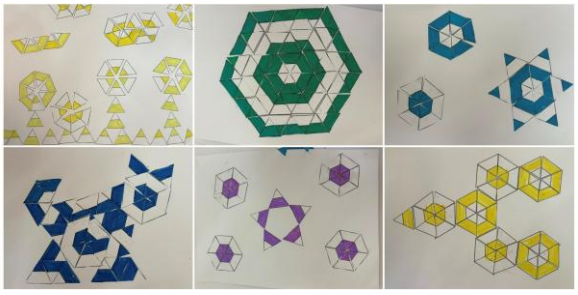


Imagen 5. Creación de obras artísitcas en 1º de primaria

Investigación con poliamantes

Los poliamantes son figuras formadas por diferentes triángulos equiláteros iguales que se unen por un lado. Estas actividades son conocidas y buscan que el alumnado explore las composiciones de nuevas figuras a partir de un mismo módulo de

repetición. Sin embargo, usando los dos tipos de piezas que forman el *T3 Puzzle*, se posibilita la creación de nuevas figuras y sus clasificaciones: ¿Qué figuras son iguales con colores invertidos? ¿Cuántos ejes de simetría tienen? ¿Qué proceso de construcción podemos seguir para encontrarlos todos? A continuación, podemos ver un ejemplo de Araki en el cual se ven las diferentes figuras que se pueden obtener usando solo dos piezas, es decir, formando diamantes (**Imagen 6**)

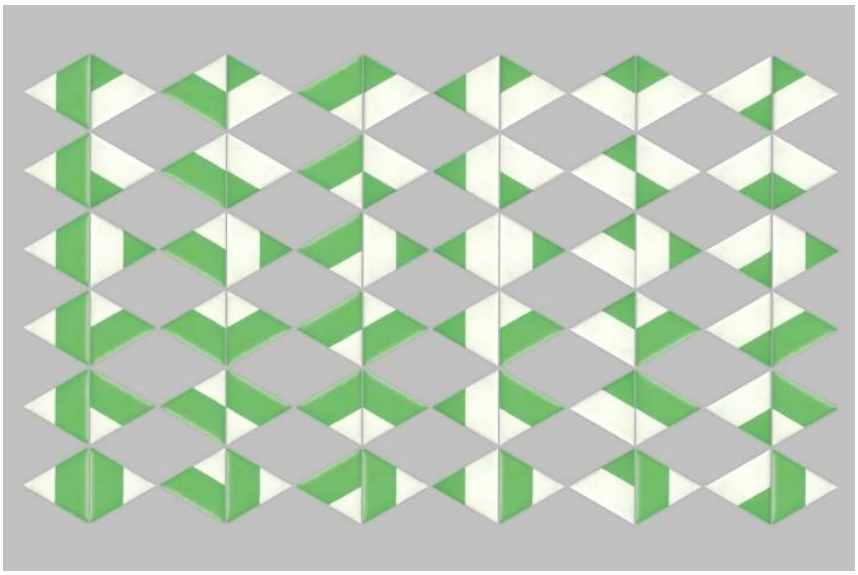


Imagen 6. Diamantes formados con *T3 Puzzle*

En el diagrama anterior, se pueden observar los 36 diamantes posibles dispuestos en 6 filas y 6 columnas, cubriendo así los posibles patrones. A partir de aquí, se pueden proponer nuevas investigaciones para construir todos los triamantes, tetramantes, etc. posibles, aplicando las mismas reglas de organización (**Imagen 7**).

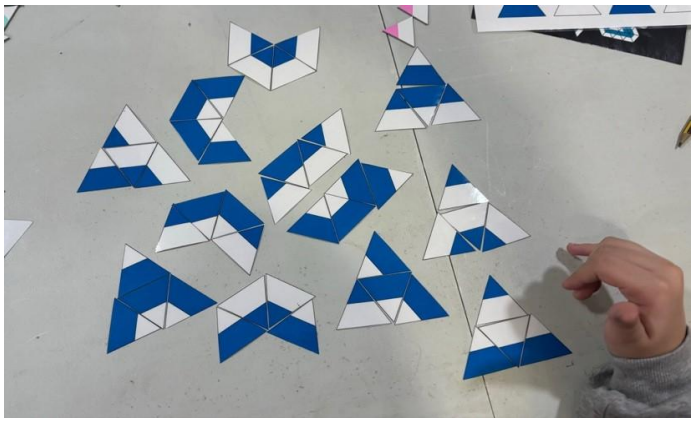


Imagen 7. Creación de triamantes con T3 Puzzle

Trabajo con fracciones y superficies

Si usamos piezas de diferentes colores podemos construir nuevas figuras formadas por varios colores (**Imagen 8**). Este tipo de tareas relacionadas con el uso de la fracción como medida de superficie requiere encontrar la subunidad para encontrar la solución. Del mismo modo, se pueden proponer retos de construcción, como, por ejemplo: “Crea una figura en la que la superficie blanca sea el doble que las superficies verde y azul. ¿Es posible? Explica el proceso que has seguido”.

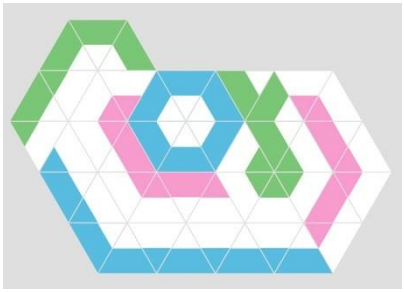


Imagen 8. ¿Qué fracción es de cada color?

Juguemos al Triroad

Este juego creado por Fumihiko Nakamura y Yoshiaki Araki para dos jugadores/as consiste en unir dos lados del tablero con el mismo color colocando, por turnos, una pieza del *T3 Puzzle.* En caso de empate, ganará quién tenga más superficie de su color (**Imagen 9**) ¿Quién ganará la partida?

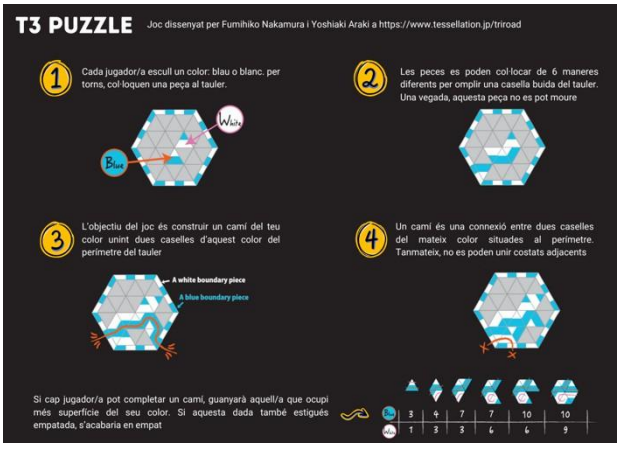


Imagen 9. Instrucciones del *Triroad*

Referencias

Araki, Y. (2024.). *T3puzzle*. https://www.tessellation.jp/t3puzzle

Problemas ambientados

Autor: Juan Lebrija Vega
Juanlebrija66@gmail.com
IES MARISMAS

Núcleo temático: recursos para el aula-procesos.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

La desmotivación y la falta de confianza de los alumnos es uno de los principales obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas y, en concreto, en lo que se refiere a la resolución de problemas. El objetivo de esta *Mesa de experiencias* es exponer una serie de problemas cuyos enunciados han sido ambientados en series televisivas, películas, videojuegos, personajes famosos, populares entre los adolescentes, etc. a fin de *enganchar* al alumno y hacer que se sienta motivado y capaz de resolver el problema que tiene delante.

Palabras clave: problemas ambientados, motivación, interés.

1. Objetivo

El mayor problema de impartir la asignatura de Matemáticas es que muchos alumnos la conciben como difícil y aburrida. La consideran difícil porque no llegan a entenderla, lo que conlleva que no sepan hacer los ejercicios y problemas y les acabe aburriendo. Pero este hecho es fácil de cambiar. Sólo hay que fijarse en los gustos de cada uno. Y esto es aplicable a cualquier asignatura. Por ejemplo, puede ser que, a mí, alumno, no me guste la literatura y, por tanto, si un profesor asume que voy a realizar la lectura

voluntaria de unos cuantos poemas de Machado, probablemente se equivoque. Sin embargo, sí me gusta el judo y, si me hablan de un poema que verse sobre el judo, sí que lo leería…

El uso de entornos de ficción para el planteamiento de tareas matemáticas es una metodología que se está popularizando. Por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) es uno de los socios del proyecto Europeo Erasmus+ MoMaTrE, *Mobile Mathematics Trails in Europe*, EC Project Number: 2017-1-DE01-KA203-003577, que ha desarrollado la gamificación de las rutas matemáticas planteando su realización en determinados contextos (e.g. en el ambiente de las historias de piratas) novelescos, véase (Gurjanow y otros, 2019).

La propuesta para esta *Mesa de experiencias* es mostrar una serie de problemas matemáticos ambientados (a título de ejemplo, aunque la ambientación podría acomodarse en función de los gustos del alumnado) en series televisivas, personajes famosos, series *anime*, videojuegos, películas, etc. populares entre el alumnado. En los libros de texto suele aparecer una página dedicada a una Autoevaluación. Se estima que, en este contexto, sería oportuno que apareciera una página con 2 o 3 *problemas ambientados* (con imágenes para hacerlos más atractivos) al final de cada unidad didáctica y dedicar una sesión a resolverlos. El interés y la motivación son los principales motores del aprendizaje y se entiende que esta metodología podría servir para lograrlo, aunque es también evidente que para conseguir un aprendizaje más eficiente es necesaria la concurrencia de diversas metodologías, no únicamente la que aquí se presenta.

1.2 Algunos Problemas Ambientados

A continuación, se exponen ejemplos de problemas ambientados, con dibujos para hacerlos aún más atractivos y conseguir una mayor contextualización (los dibujos son creación propia).

1. Problema ambientado en el vídeo juego *Assassin´s Creed*; nivel 3º- 4º ESO. Contenidos trabajados: sucesiones.

Ezio está siendo vigilado por los templarios y necesita reunirse con su amigo Leonardo Da Vinci. Para decirle dónde se ubica, le envía un mensaje con un enigma que sólo mentes brillantes como Leonardo podrían resolver. Resolviendo el enigma conocerás el nombre de la calle. Enigma: C-13, A-8, C-21; N-5, I-1, F-1, O-3, I-34, B-2. Una vez descubierto el nombre de la calle, el número coincide con el término 11.

Imagen 1. Ezio Auditore.

2. Problema ambientado en la saga de *Harry Potter*; nivel 3º-4º ESO. Contenidos trabajados: raíces de un polinomio (Ruffini).

Estaba Harry caminando por el Bosque Prohibido cuando se encontró al gigante Hagrid petrificado. Rápidamente trató de buscar mandrágora por el bosque para devolver al gigante a su estado normal y vio que había 3 raíces de esta planta ancladas al polinomio P(x)=x^3-2x^2-5x+6. Extrae las raíces para salvar a Hagrid.

Imagen 2. Hagrid, personaje de la saga de Harry Potter.

3. Problema ambientado en la serie *The Big Bang Theory*; nivel 1º ESO. Contenidos trabajados: máximo común divisor.

Sheldon Cooper tiene 10 cómics de Spiderman, 25 de Superman y 15 del Capitán América. Quiere meterlos en cajas iguales, cada una con el mayor número de cómics, pero sin mezclarlos. ¿Cuántos cómics tendrá cada caja?¿Cuántas cajas habrá en total?

Imagen 3. Sheldon Cooper.

1.3 Nota final

Se dispone de más de 80 *problemas ambientados* como los anteriores, con sus planteamientos, ilustraciones y soluciones. La propuesta final es llevar un amplio número de estos a la mesa de experiencias para que los asistentes puedan ojearlos y, si les interesan, considerarlos para su utilización en el aula.

Referencias

Gurjanow, I., Oliveira, M., Zender, J., Santos, P.A., Ludwig, M. (2019). Shallow and Deep Gamification in Mathematics Trails. In: Gentile, M., Allegra, M., Söbke, H. (eds) Games and Learning Alliance. GALA 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 11385. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11548-7_34

La caja de Varga: laboratorio portátil de combinatoria y probabilidad

Sergi Muria Maldonado
smuria@xtec.cat
Grup Cúbic - Institut El Joncar (Barcelona)

Manel Martínez Pascual
mmart659@xtec.cat
Grup Cúbic - Institut Vallcarca (Barcelona)

Anton Aubanell Pou
aaubanel@xtec.cat
Grup Cúbic - Museu de Matemàtiques de Catalunya

Paula Arrebola Oya
parrebo1@xtec.cat
Grup Cúbic - Institut Matadepera

Núcleo temático: Recursos para el aula y Procesos.

Modalidad: Mesa de experiencias

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

La “Caja de Varga” es un laboratorio portátil donde podemos encontrar todo tipo de material manipulativo y un catálogo de actividades para aprender estadística, probabilidad y combinatoria. Fue editada originalmente en alemán por la editorial

Klett Verlag de Stuttgart en los años setenta. Uno de sus principales creadores fue Tamás Varga (1919 – 1987), un matemático y profesor húngaro reconocido

internacionalmente por su trabajo, especialmente en los ámbitos de la enseñanza de la lógica, combinatoria y probabilidad.

En la mesa se presentarán los materiales de la “Caja de Varga” original y algunas de las actividades que en ella se plantean.

También presentaremos la reproducción de la caja realizada dentro de un trabajo de investigación de 2º de bachillerato por dos alumnos de l’INS El Joncar (Barcelona).

Palabras clave: Tamás Varga, Laboratorio de matemáticas, Probabilidad, Combinatoria, Estadística.

1.La Caja De Varga

La que se ha dado en llamar “Caja de Varga” es una maleta grande de madera donde podemos encontrar todo tipo de material manipulativo y un catálogo de actividades experimentales para aprender estadística, probabilidad y combinatoria, todo un “laboratorio portátil”. Fue editada originalmente en alemán en 1972 por la editorial Ernst Klett Verlag de Stuttgart con el nombre *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit Spielanleitungen* (Instrucciones de juegos de combinatoria y probabilidad) .

Imagen 1. Caja de Varga

Tal como se puede ver en la imagen, se trata de una caja de madera de 63 cm x 48 cm x 6 cm donde podemos encontrar todos los materiales y recursos para desarrollar las actividades propuestas en el manual que la acompaña.

Aunque en el manual sólo aparece el nombre del editor, Ernst Klett Verlag, y no aparece el nombre de los autores de la propuesta, en 1974 la propia editorial Klett Verlag publicó el libro *Zufall oder Strategie?:Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der primarstufe (*Juegos de combinatoria y cálculo de probabilidades en el nivel primario) de Tamás Varga, Arthur Engel y Willy Walser dónde se detallan de forma ampliada las actividades propuestas en la caja original.

Imagen 2. Manual de la Caja de Varga

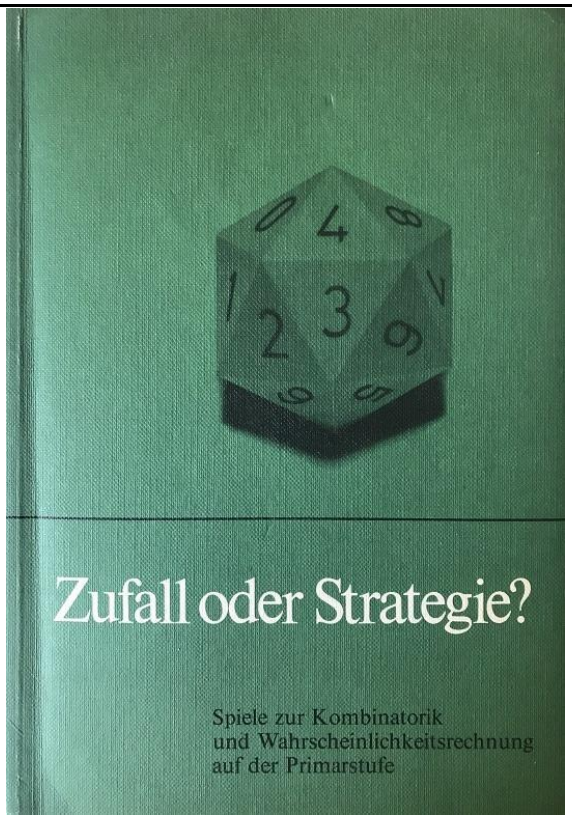


Imagen 3. Zufall oder Strategie?

Nos gustaría destacar especialmente la figura de Tamás Varga (1919 - 1987) que fue un matemático y profesor húngaro reconocido internacionalmente por su propuesta

de reforma del sistema educativo en su país conocida como “Educación matemática compleja”, así como por sus publicaciones sobre la enseñanza de la lógica, la combinatoria y la probabilidad en diferentes países y su participación en organizaciones internacionales como la OCDE, la UNESCO, la CIEAEM, etc.

En Catalunya este laboratorio portátil se conoce como “Caja de Varga” porque fue el mismo Tamás Varga quien la presentó, a finales de los años setenta, en unas jornadas de formación para el profesorado.

En las primeras páginas del manual podemos encontrar frases que son toda una declaración de principios:

> “*Las tareas del cálculo de probabilidades se aprenden mediante el juego, así como tareas de otras áreas. Todos tendrían que probar primero qué se puede hacer con este laboratorio sin ayuda externa. No solo se tendrían que reproducir los juegos acabados: el descubrimiento independiente de juegos interesantes seguro que aportará la alegría más grande.*”

Entre la colección de recursos materiales que podemos encontrar en la caja hay:

- Cubos encajables
- Dados de diferentes tipos
- Ruletas
- Bolas y fichas
- Cajitas transparentes con diferentes configuraciones de bolas y dados
- Tableros de juego - etc.

2.Actividades de experimentación

El manual de la “Caja de Varga” propone una colección inicial de 13 actividades que detallamos a continuación:

- 1. ¿Quién construye más torres?
- 2. La ciudad fantasma
- 3. ¿Igual o desigual?
- 4. El cubo deformado
- 5. La carrera
- 6. El viaje aleatorio del taxista
- 7. El juego de la escalera
- 8. El juego del estanque
- 9. Atrapa
- 10. ¿Quién es más rápido?
- 11. Las tres abejas
- 12. El casino I
- 13. El casino

De todas maneras la experimentación con todo el material recogido en la caja abre todo un mundo de posibilidades a los docentes para incorporarlos en sus clases.

Imagen 4. Materiales de la “Caja de Varga”

A continuación queremos destacar alguno de los materiales incluidos en la caja.

2.1. Cubos encajables

Uno de los materiales que, de entrada, llama más la atención de la “Caja de Varga” son tres estuches de piezas cúbicas encajables. Entre otras utilidades didácticas, son un recurso potentísimo para trabajar la combinatoria (plantear problemas, investigar situaciones, representar agrupaciones, descubrir patrones de contaje…)

Imagen 5. Cubos encajables

2.2. El mundo de los dados

Como parece natural tratándose de material para trabajar la probabilidad, los dados tienen una presencia abundante en la caja. Los de la fotografía tienen algunas caras en blanco y otras caras con un punto grande de color. Según el color (negro, rojo, verde, azul y amarillo) tienen un número diferente de caras coloreadas. Así, asociamos distintas probabilidades a distintos colores. La caja también contiene dados en blanco para poder adaptarlos a experimentos específicos.

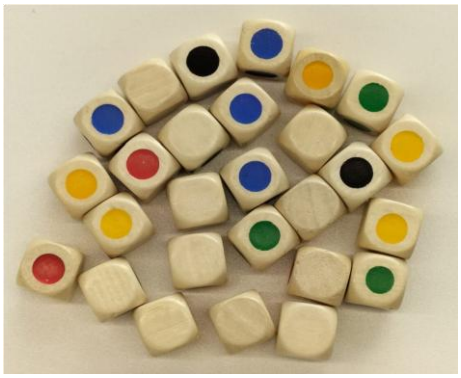


Imagen 6. Dados de puntos de colores

Surgen preguntas sencillas (por ejemplo: *¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara coloreada al tirar uno de estos dados?*); otras menos sencillas (por ejemplo: *¿Cuál es la probabilidad de obtener 0, 1, 2… caras coloreadas en echar varios dados del mismo tipo?*) y otras más difíciles (por ejemplo: *¿Cuál es la probabilidad de obtener 0, 1, 2… caras coloreadas al tirar varios dados de distintos colores?*). También podemos encontrar dados ortoédricos, en forma de prisma de base triangular, icosaédricos o irregulares.

¡Todo un mundo de posibilidades para trabajar la probabilidad!

2.3. Cajitas transparentes con dados

Las cajitas transparentes divididas en compartimentos permiten realizar experimentos aleatorios con varios dados simultáneamente. En las siguientes imágenes se ven unas cajitas preparadas para ayudar a descubrir las probabilidades de los distintos resultados de la suma de dados cúbicos mediante el límite de frecuencias relativas, al realizar muchas tiradas. En la imagen 7 se estudiará el caso de la suma de dos dados.

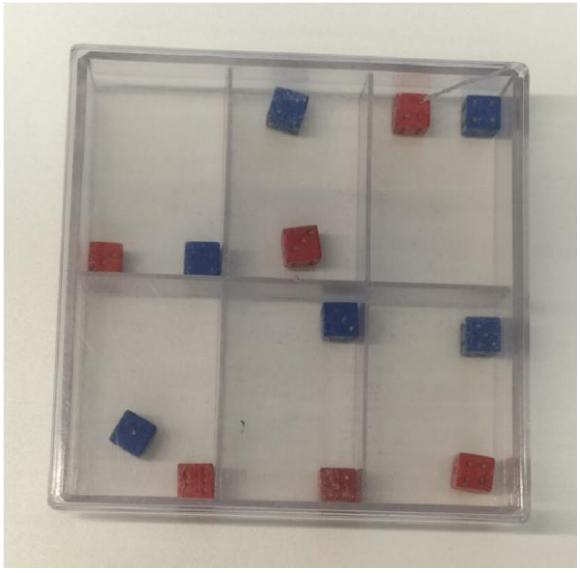


Imagen 7. Caja de dados I

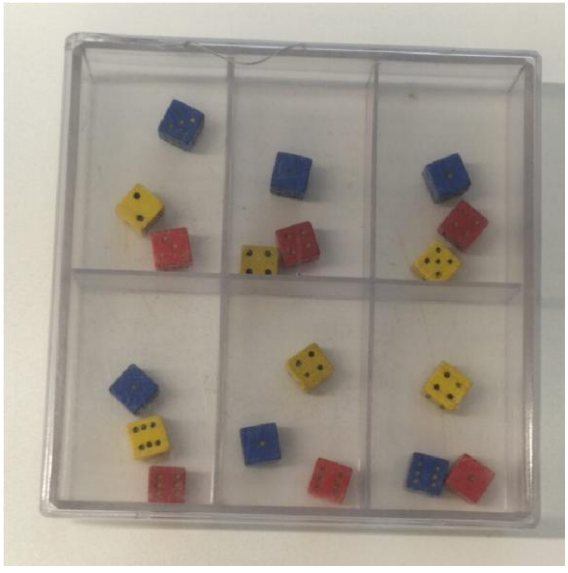


Imagen 8. Caja de dados II

Se puede cambiar la composición de las cajitas. Por ejemplo en la imagen 8 aparecen 3 dados en cada uno de los 6 compartimentos. En este caso, análogamente al caso anterior, podremos estudiar las probabilidades de los diferentes resultados posibles al sumar 3 dados mediante el límite de frecuencias relativas, pero también podemos hacernos otras preguntas como:

¿En cuántos compartimentos aparecen sumas impares? ¿En cuántos aparecen sumas pares? o *¿En cuántos compartimentos hay dos dados o tres dados que muestran la misma puntuación? ¿Cuáles son las probabilidades de que haya 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6 compartimentos que verifiquen estas condiciones? Hay muchas preguntas posibles y el estudio de las respuestas tiene muchas posibilidades didácticas.*

Son también interesantes las cajitas que se muestran en la imagen siguiente. Cada una está formada por tres compartimentos que contienen dos dados (uno rojo y uno azul).

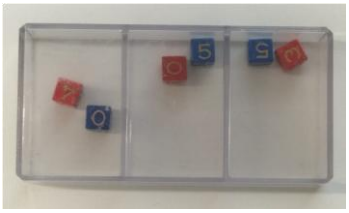


Imagen 9. Caja de dados III

Sin embargo, estos dados tienen determinadas particularidades. El dado azul contiene 3 ceros y 3 cincos. El dado rojo contiene una cara sin puntuación y las otras cinco caras numeradas del 0 al 4. Si, en una tirada, el dado rojo muestra la cara sin puntuación, tendremos que repetirla. En los demás casos, al sumar la puntuación de ambos dados, se obtiene con igual probabilidad un número del 0 al 9. Por tanto, al tirar una de las cajitas de tres compartimentos, obtendremos tres dígitos del 0 al 9 que conjuntamente formarán un número de tres cifras. Tenemos así un “generador” de números aleatorios equiprobables de tres cifras, del 000 al 999. Así nos podremos hacer preguntas como: *¿Cuál es la probabilidad de que*

este número sea menor que 350?, o *¿Cuál es la probabilidad de que ese número sea mayor o igual que 200?*, por ejemplo.

Un aspecto bonito de la "Caja de Varga" es el hecho que hay experimentos con distintos materiales que responden al mismo modelo probabilístico. Por ejemplo, es lo mismo tirar una vez la cajita transparente con los tres compartimentos que acabamos de describir, que dar vueltas tres veces a la ruleta que contiene los números del 0 al 9 o echar tres veces el dado icosaédrico que contiene los números del 0 al 9 (en dos caras cada uno). Véase la imagen 10.

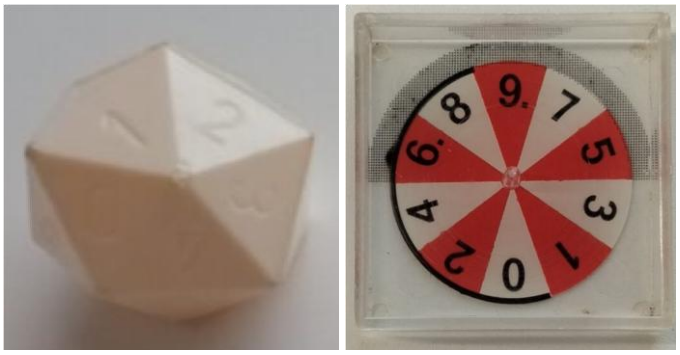


Imagen 10. Dado icosaédrico y ruleta

2.4. Cajas de bolas de colores

Resultan sorprendentes los experimentos que se pueden hacer con cajitas transparentes como la que se muestra en la siguiente fotografía (Imagen 11). En la parte inferior hay una separación horizontal estrecha en la que hay confinadas 7 bolitas que no tienen espacio para cambiar de orden. En la parte superior hay también bolitas que, en este caso, al mover la caja, se pueden mover y cambiar de orden. Al poner la cajita vertical, las bolitas de la parte superior se alinean con las de la parte inferior y se puede estudiar la coincidencia o no de colores. Este tipo de cajitas también se puede dividir en compartimentos verticales, generando así nuevos retos probabilísticos.

Imagen 11. Caja de bolas I

Es inevitable recordar el problema de las coincidencias que formuló Rémond de Montmort en su libro *Essai d'Analyse sur las Jeux de Hasard* (1708). También se puede consultar el trabajo hecho con anterioridad por el Grup Cúbic en torno a este problema en la jornada de homenaje a la figura de Lluís Antoni Santaló

(*https://ja.cat/santalo*).

Siguiendo con las cajas con bolitas (aunque ahora con una estructura muy distinta), aparece una cajita transparente partida en dos mitades que se comunican. La mitad de la derecha tiene la superficie sin agujeros, la mitad de la izquierda tiene una cuadrícula de 5 filas por 10 columnas de agujeritos. Dentro de la cajita se pone una «población» numerosa de bolitas blancas y rojas, como se ve en la imagen 12, por lo que, al moverla ligeramente, una muestra de bolitas se sitúa dentro de los agujeritos. Es una buena forma de extraer muestras de una población.

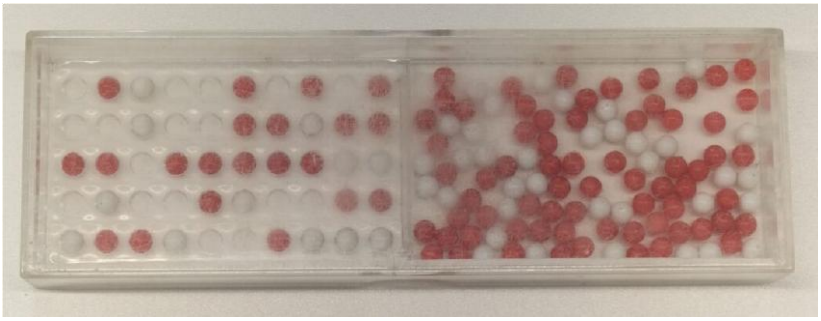


Imagen 12. Caja de bolas II

Si el número de bolitas de ambos colores es alto, haciendo una aproximación, podemos suponer que la probabilidad que uno de los agujeritos sea ocupado por una bola de un color u otro es casi constante, es decir, casi independiente de las bolas que ya se hayan fijado anteriormente. En este caso, la formación de grupos de 5 bolitas blancas o rojas (cada columna de la imagen) respondería aproximadamente a una distribución binomial. Lo mismo ocurriría con los grupos de 10 bolitas blancas o rojas (cada fila de la imagen).

Un material que tiene cierto parecido con el anterior es la cajita transparente que se ve en la imagen 13:

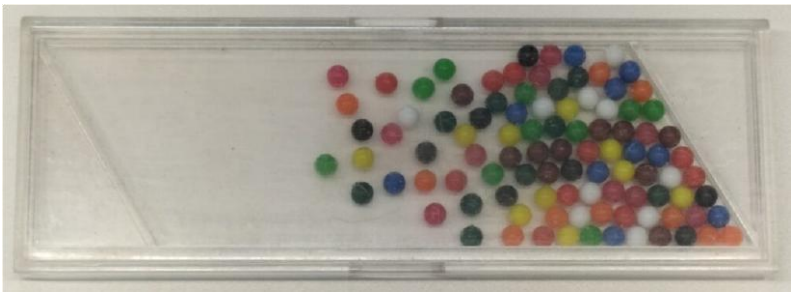


Imagen 13. Caja de bolas III

Esta cajita permite tomar muestras de distintos tamaños de una población de bolitas, la composición de la cual (en cuanto a colores) se puede variar. Este material tiene una característica especialmente curiosa: la inclinación de las dos caras laterales hace que, si ponemos la cajita vertical con el vértice del ángulo agudo hacia abajo, las bolitas se sitúen en filas de 1, 2, 3, 4, 5… bolitas que, acumulativamente, dan muestras con un número triangular de elementos.

2.5 Tableros

La “Caja de Varga” también contiene seis “juegos de mesa” sobre tablero. A veces estos juegos utilizan algunos de los materiales ya descritos, otras veces utilizan materiales que todavía no hemos presentado. Consideramos especialmente interesante el juego que podríamos llamar ***Carrera de obstáculos de probabilidades*****.** Dos, tres o cuatro equipos compiten en una carrera: se van encontrando con alternativas y deben escoger entre dos «obstáculos» consistentes

en experimentos aleatorios. Los obstáculos vienen indicados por tarjetas, en cada una de las cuales se representa el experimento aleatorio que se tendrá que hacer y el suceso que se tendrá que verificar para considerar el obstáculo superado. Así, un equipo sólo podrá superar un obstáculo si, al realizar el experimento correspondiente, se verifica el suceso que se indica. Estas tarjetas se colocan sobre los recuadros del tablero que se muestra en la imagen 14.

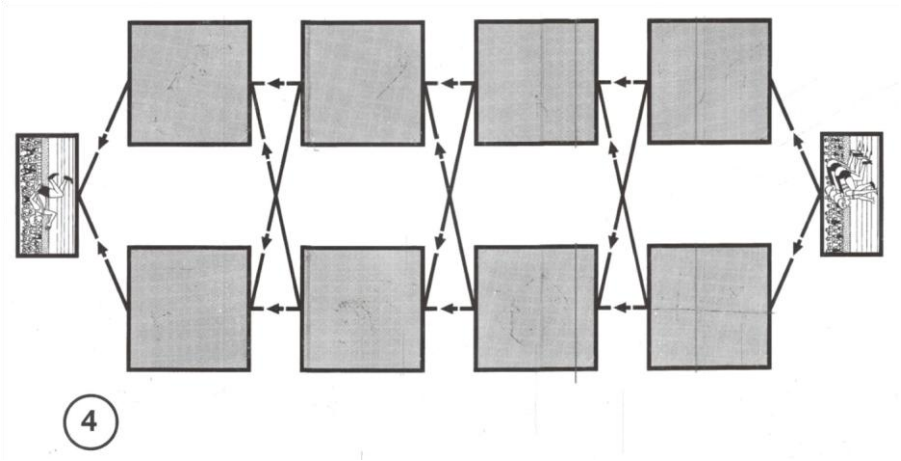


Imagen 14. Tablero de juego 4 (Carrera de obstáculos de probabilidades)

Este tablero lleva asociadas diferentes colecciones de tarjetas que permiten configurar de distintas maneras la carrera de obstáculos de probabilidades. Recordemos que, en la parte superior de cada tarjeta, se indica icónicamente el experimento a realizar, y en la parte inferior el resultado a verificar para superar el obstáculo.

En cada paso se presentan dos alternativas, los equipos tendrán que evaluar la probabilidad que tienen de pasar en una u otra alternativa, y elegir en consecuencia. Luego tendrá que hacerse realmente el experimento aleatorio… y la suerte tendrá la última palabra. Se trata de un recurso muy interesante para mostrar (en las etapas iniciales) la necesidad de cuantificar la probabilidad o para aplicar (en etapas avanzadas) conocimientos probabilísticos ya trabajados en clase.

A continuación, en la imagen 15, se muestran algunos modelos de colecciones de tarjetas.

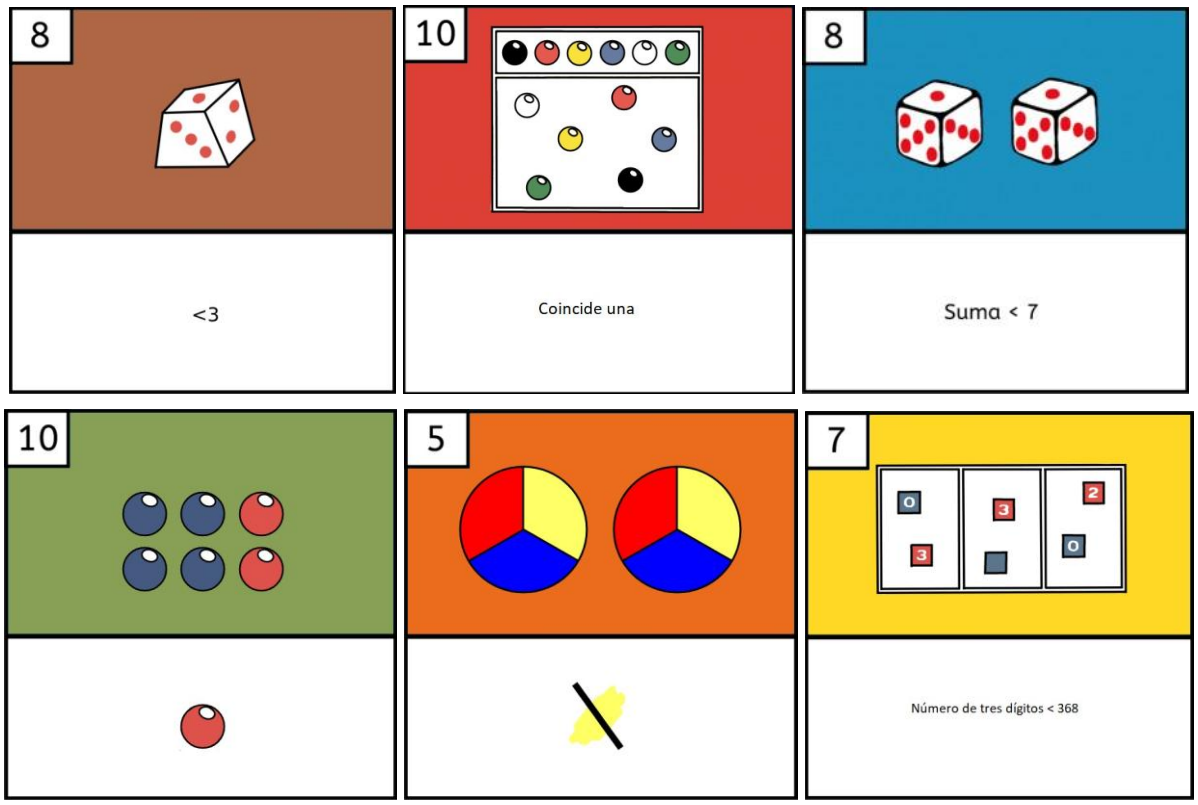


Imagen 15. Fichas de la Carrera de obstáculos de probabilidades

Otro juego de mesa que contiene la “Caja de Varga” es el que podríamos llamar ***La ciudad fantasma***.

Es un juego para 4 o 5 jugadores, que requiere el material siguiente: una ficha de un color diferente para cada jugador para indicar su posición, un dado con tres caras que contienen un punto verde y las otras caras sin ningún punto, y unas 80 piezas de un solo color para indicar los lugares de llegada. En lugar de piezas, también se pueden utilizar cubitos encajables, dados en blanco…

Se juega sobre el tablero que se muestra en la imagen 16.

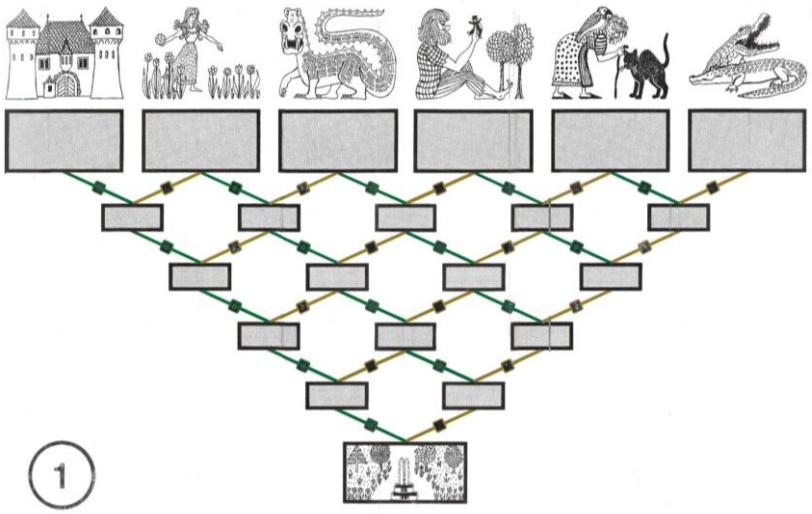


Imagen 16. Tablero de juego 1 (La ciudad fantasma)

El tablero nos presenta las calles de una ciudad a través de la cual los jugadores tendrán que hacer un trayecto que se iniciará en el parque (parte inferior del tablero), seguirá el camino dado por las sucesivas tiradas del dado y terminará en uno de los siguientes lugares en donde se depositará una pieza:

- En el lugar de la parte superior derecha, un cocodrilo devora a todos los que llegan.
- En otro lugar, una bruja pone en prisión a todos los recién llegados.
- En tercer lugar, un gigante obliga a todos aquellos que llegan a trabajar esclavizados en una mina de carbón.
- Más allá, se esconde un dragón, que con sus llamas, asa a todo el mundo que se acerca.
- Separada de esta malvada criatura, vive una hada que invita a todos los recién llegados a relajarse, comer bien y tomarse unas vacaciones en su hermoso jardín.
- En el último lugar, en la parte superior izquierda, hay un palacio en el que vive un rey de buen corazón, que da regalos espléndidos a todos los que pasan por allí.

Se saldrá desde el parque de la parte inferior del tablero y se jugará por turnos.

Cuando le toque el turno, el jugador echará el dado y, si sale una cara con punto verde, seguirá la dirección que marca la flecha verde; de lo contrario, seguirá la dirección de la flecha amarilla. Así, cada uno de nuestros jugadores irá avanzando tirando a la derecha o a la izquierda según le marque el dado azaroso, hasta llegar a su destino definitivo, donde pondrá una pieza. Después, volverá a la posición inicial y empezará una nueva ronda a través de la ciudad.

Cuando los 4 o 5 jugadores hayan realizado varios caminos, se habrán ido depositando unas pequeñas pilas de piezas sobre cada posible lugar de destino.

Podemos hacernos preguntas como las siguientes: *¿Dónde habrá más piezas? ¿Dónde habremos llegado menos veces? ¿Cómo será la distribución de las piezas?*… Véase la imagen 17.

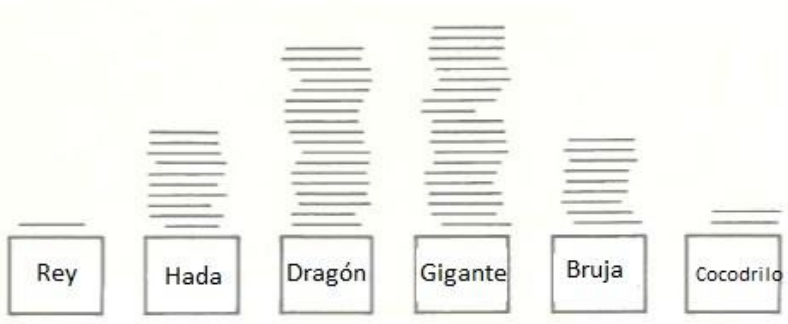


Imagen 17. Ejemplo de distribución de fichas de La Ciudad Fantasma

Así hemos llegado a la distribución binomial.

Por último nos podemos preguntar: *¿Qué pasaría si, en lugar de dados con puntos verdes (3 caras con punto y 3 en blanco), usáramos dados con puntos azules (4 caras con punto y 2 en blanco), o con puntos rojos (2 caras con punto y 4 en blanco), por ejemplo?*

Por último, describiremos otro juego de mesa (en la “Caja de Varga” hay seis), el que lleva por título ***El viaje aleatorio del taxista***. Pueden jugar entre 2 y 6 jugadores, que hacen el papel de viajeros y se desarrolla sobre el tablero de la imagen 18.

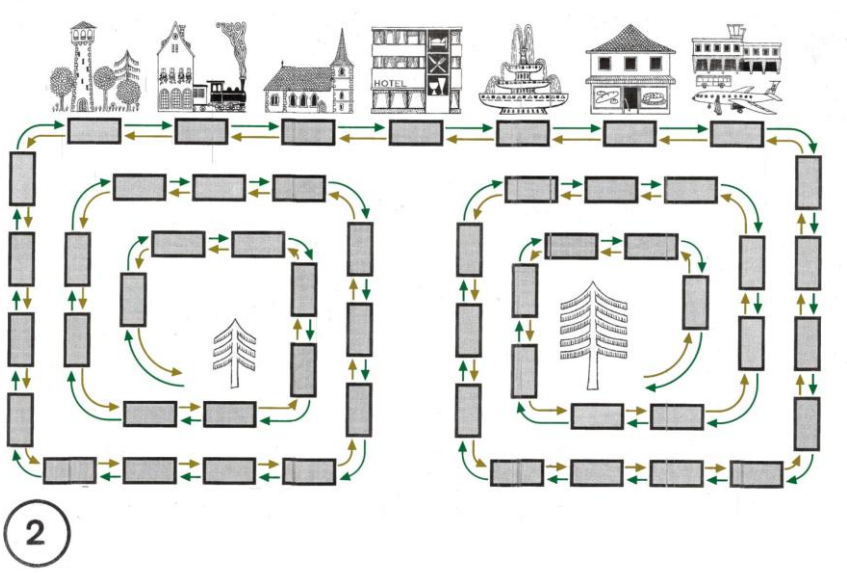


Imagen 18. Tablero de juego 2 (El viaje aleatorio del taxista)

Deberemos disponer de una ficha de un color diferente para indicar la posición de cada jugador y un dado con tres caras que contienen un punto verde y las demás caras en blanco.

El largo camino por donde circulan los taxis es de un extraño urbanismo. Hay unas paradas especialmente significativas, que son el aeropuerto, el horno, la fuente, el hotel, la iglesia, la estación y la torre de observación. Circulando más allá del aeropuerto se puede avanzar, parada a parada, hasta llegar a un bosque de abetos grandes. Avanzando, en cambio, más allá de la torre de observación, se puede llegar a un bosque de abetos pequeños.

El taxista sólo puede transportar un cliente pero no escucha sus deseos sino que, cuando sube un pasajero, tira un dado (verde-amarillo) y avanza una parada en el sentido indicado por el resultado de la tirada (Si ha salido verde, sigue la flecha verde; si ha salido amarillo sigue la flecha amarilla). Inicialmente los taxis cogen a los viajeros en frente del hotel y los movimientos se hacen por turnos. Gana el primer viajero que llegue a un abeto.

Los alumnos-viajeros descubrirán que no resulta fácil avanzar demasiado, en un sentido o en el otro; que los avances a menudo se compensan, y que hace falta muchísima suerte para conseguir llegar a los abetos. Se pueden hacer preguntas como las siguientes: *¿Es posible llegar a uno de los abetos? ¿Es probable? ¿El taxista, dónde está más a menudo, frente al hotel o frente al aeropuerto?* Este juego es una magnífica continuación del juego *La ciudad fantasma*.

Es muy recomendable la conferencia "*Materiales para el aprendizaje de la probabilidad: la "Caja de Varga"*, de Adolf Almató, profesor jubilado de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autónoma de Barcelona. Se puede encontrar en el enlace: https://www.youtube.com/watch?v=UG9QLumTr4I.

Una experiencia de trabajo con alumnos en torno a la "Caja de Varga"

Tal como hemos podido comprobar las propuestas de la "Caja de Varga" nos ofrecen múltiples oportunidades para plantear a nuestros alumnos actividades ricas y utilizar espléndidos recursos.

Evidentemente es muy difícil encontrar un ejemplar original de la "Caja de Varga" (en Catalunya hemos podido catalogar tres) y bajo esta premisa dos alumnos del Institut El Joncar de Barcelona (Roger Canals y Mario Delfa) asumieron el reto de hacer una réplica.

El trabajo se planteó en dos fases:

a. En su Proyecto de Investigación de 4º de ESO se plantearon reproducir físicamente la caja y editar una página web que documentara todo el proceso.

b. En su Trabajo de Investigación de Bachillerato terminaron de fabricar los elementos más complejos e hicieron el análisis, documentación y resolución de las actividades propuestas, con el objetivo de poder facilitar su acceso a todo el profesorado y alumnado que lo quisiera utilizar.

Para hacer todo este trabajo tuvieron la suerte de tener en el centro, en cesión durante más de un año, la “Caja de Varga” original propiedad de Anton Aubanell, que es la que se mostrará en la mesa.

Inicialmente se hizo todo un trabajo de documentación para obtener el manual y libro originales referidos anteriormente, así como otras obras de Tamás Varga.

Imagen 19. Bibliografía utilizada

Como se puede ver, se encontraron ediciones originales en Alemania, Francia y España.

Como trabajo de campo se entrevistó a los dos profesores universitarios ya jubilados que disponen de una de las cajas en propiedad (Anton Aubanell y Adolf Almató) para conocer el uso que habían hecho de ella y cuáles eran las actividades y recursos que consideraban más relevantes.

Otro de los trabajos realizados fue traducir del alemán el manual original que acompaña a la caja, con el fin de poder analizar al detalle las propuestas planteadas. Para poder publicar esta traducción se pidió permiso a la editorial Klett Verlag, pero dado que ya habían pasado más de 50 años de su publicación no pusieron ningún reparo.

Para la realización de la réplica de la caja algunos de los materiales más usuales se pudieron comprar directamente, pero otros los tuvieron que fabricar manualmente en el taller de tecnología del centro o con el uso de una máquina de corte láser del Ateneu de Fabricació de Gracia o del CREAMAT. Como siempre dice nuestro compañero Jordi Font: "*Muchas veces la actividad matemática comienza con la construcción de los materiales que vamos a utilizar*".

El fruto de todo este trabajo se puede consultar en la web *https://lacaixadevarga.eljoncar.cat/*:

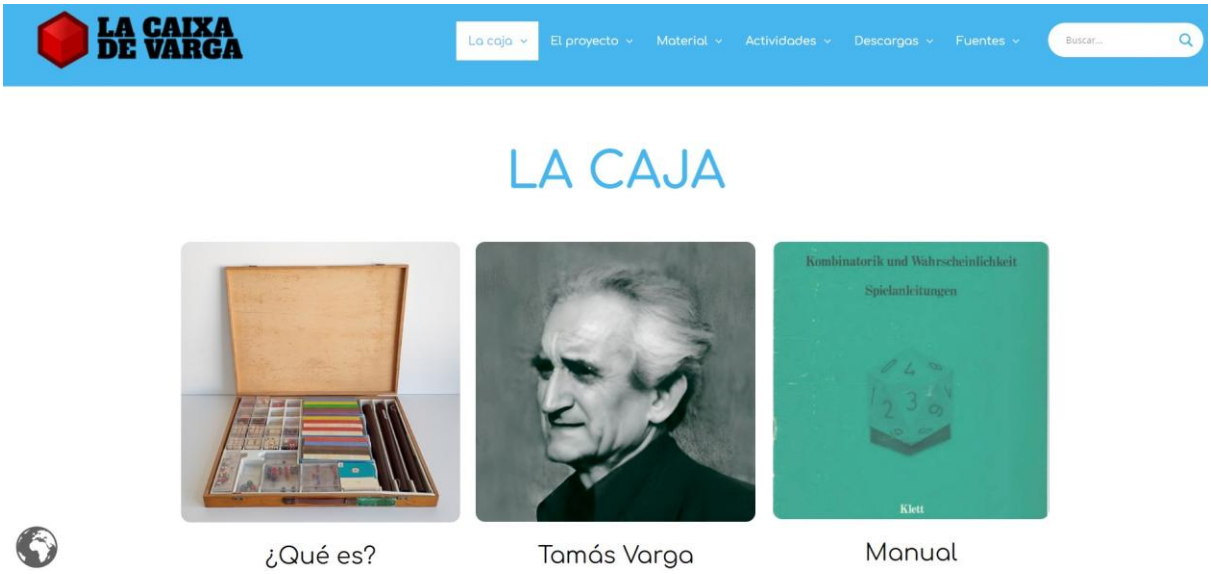


Imagen 20. Página inicial de la Web La Caixa de Varga

La web se puede traducir directamente a diferentes idiomas simplemente clicando sobre el icono de la bola del mundo situada en la parte inferior izquierda de la visualización.

Actualmente desde la web se pueden descargar directamente:

- El manual traducido de la "Caja de Varga"
- Las presentaciones y fichas de las actividades propuestas en el manual.
- Actividades extra procedentes de las publicaciones de Tamás Varga
- Los tableros reescalados a formato DINA3

- Las fichas de la actividad ***Carrera de obstáculos de probabilidades***. presentadas anteriormente

- Los archivos de las construcciones de las diferentes piezas hechas con la máquina de corte láser.

Actualmente los materiales y las fichas de las actividades se utilizan en las clases de los diferentes niveles educativos del centro INS El Joncar.

De cara al futuro se pretende ampliar el número de actividades propuestas y crear un itinerario de enseñanza de la probabilidad para la ESO integrando las diferentes actividades propuestas en la caja.

Todo el material de la mesa se podrá recuperar a través de la página web del Grup Cúbic de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, en la dirección: http://www.ub.edu/cubic/2024/04/08/21jaem/

En el trabajo que se presenta en esta propuesta, además de los autores, ha participado un equipo formado por las siguientes personas, todas ellas miembros del Grup Cúbic (grupo de didáctica de las matemáticas de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona): Francesc Massich, Jordi Font, Laia Miró, Paula López y Raül Fernández.

Referencias

Alsina, A., Aubanell, A., Burgués, C (2023): *Anima't. Provocar interès per aprendre matemàtiques*. Editorial Rosa Sensat. Barcelona.

Klett Verlag, E. (1972): *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit Spielanleitungen*.

Editorial Klett. Stuttgart.

Grup Cúbic (2019): *El problema de les coincidències de Montmort*

Varga,T., Engel, A. i Walser, W. (1974): *Zufall oder Strategie?.* Stuttgart, Ernst Klett Verlag.

Experiencias en campamentos matemáticos: recursos para trabajar matemáticas con pompas de jabón

Autor/a(1) Pol Landman Brignoni
mail@autor/a(1) pol@explorium.cat
Institución/Centro de referencia (1) Asociación eXplorium

Núcleo temático: Recursos para el aula, procesos.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

Esta mesa será una mesa preparada para que los visitantes se arremanguen y se enfrenten a diversos retos matemáticos. Habrá una muestra de diversas actividades para sumergirse en las matemáticas que hacemos en los campamentos matemáticos de eXplorium. Los visitantes podrán trabajar geometría 3D y 2D a través de las pompas de jabón mediante actividades poco conocidas o nuevas: ¿Cuál es el camino más corto que une una serie de puntos? ¿Qué poliedros podemos construir usando tan solo pompas de jabón y nuestras manos?

Palabras clave: pompas de jabón, geometría

Mesa de pompas matemáticas

A raíz del conocido trabajo que ha hecho Anton Aubanell para hacer llegar las pompas de jabón al aula de matemáticas, desde eXplorium hemos dedicado muchas horas a trabajarlas. Tanto es así que llegamos a hacer unas colonias matemáticas de 2 días dedicadas exclusivamente a las pompas de jabón matemáticas. Todo esto fue posible también gracias al MAMBO, la jornada dedicada a la educación matemática con pompas de jabón que se realizó en 2023.

Todo lo aprendido y desarrollado lo hemos querido compartir y es por esto que a lo largo del último curso hemos recorrido Cataluña presentando nuestra mesa de pompas de jabón matemáticas en todas las jornadas de didáctica de las matemáticas que hemos podido y siempre ha resultado un gran polo de atracción para los participantes. ¡Es por eso que ahora lo queremos llevar a las jornadas españolas!

En la mesa los participantes podrán enfrentarse al reto de construir poliedros de pompas de jabón en sus propias manos y descubrir qué sólidos platónicos es posible construir. También tendrán algunos retos con alambre: ¿Puedes hacer una lámina de jabón de Moebius? Veremos así mismo materiales que todos podemos construir para trabajar con pompas de jabón. Finalmente, también experimentaremos con geometría dinámica con pompas de jabón, usando láminas y imanes para plantearnos problemas de optimización.

El tour de Mates:

La gran carrera de cálculo mental

Diego Alonso Santamarí
diego.alosan@educa.jcyl.es
ES Arca Real (Valladolid)

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos.

Modalidad: Comunicación, Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Por segundo año, se ha celebrado la carrera de cálculo mental *El Tour de Mates*, una competición gamificada en un contexto ciclista que curso tras curso no para de crecer, convirtiéndose en una de las más grandes del panorama educativo gracias a sus casi 55 mil participantes de trescientos centros de ESO y Primaria.

Este proyecto educativo, desarrollado a lo largo de un mes dentro del periodo lectivo, resulta una forma divertida y motivante de trabajar el cálculo mental: una página web con vídeos explicatives, recursos para practicar, ejercicios online y una clasificación interactiva como si de una deporte profesional se tratase.

Se ofrece este proyecto a toda la comunidad educativa (profesores y asociaciones) para que puedan llevarlo a sus provincias y, pudiendo así trabajar el cálculo mental de una forma coordinada, divertida y motivante en todo su territorio.

Y tú ¿Te animas a participar en el Tour de Mates?

Palabras clave: Cálculo mental, competición, ciclismo, gamificación, recursos digitales.

Introducción

El Tour de Mates es una competición de cálculo mental dirigida a todo el alumnado de Primaria, ESO y Bachillerato.

El cálculo mental es una de las herramientas matemáticas fundamentales de todo ciudadano y, sin embargo, los libros de texto en su mayoría no le dan la importancia que merece sin citarlo siquiera en algunos casos. Gracias a esta competición hemos conseguido que el cálculo mental se trabaje de forma coordinada en 300 centros educativos de toda España a lo largo de todo un mes, de forma motivante y divertida para los alumnos.

Esta carrera está dividida en dos fases: una competición interna desarrollada en cada centro educativo, y una segunda fase provincial, opcional y que se ofrece a cualquier asociación de profesores que desee llevarlo a cabo, en la que participan los mejores alumnos de cada centro educativo.

Dicha competición está gamificada en un contexto deportivo, el ciclismo, por ser un deporte que aúna competiciones individuales y colectivas, con la motivación hacia el aprendizaje y el compañerismo que fomentan ambas formas.

Como en toda carrera ciclista, esta competición matemática está compuesta de cinco etapas, cada una especialmente dedicada al aprendizaje y puesta en práctica de una estrategia de cálculo mental.

Y al igual que en una competición ciclista, existen varias clasificaciones donde se premia tanto la excelencia como la constancia o regularidad, se motiva al alumnado joven y se realizan competiciones por clases favoreciendo el compañerismo:

- *Maillot amarillo*: la clasificación general muestra al mejor participante de todo el instituto.
- *Maillot blanco*: para el mejor corredor joven (1º y 2º ESO).
- *Maillot verde o maillot de la regularidad*: para el corredor más regular en todas las etapas.
- *Clasificación por equipos*: donde cada clase competirá por ser la mejor de su centro educativo, siguiendo un sistema de puntuación similar al utilizado en ciclismo.

Recursos educativos

Para su ejecución, los centros educativos cuentan con una página web con toda la información necesaria: https://eltourdemates.wordpress.com/

Imagen 1: Portada de la página web www.eltourdemates.com

Antes de comenzar la competición, los centros educativos reciben el material necesario para realizar las pruebas de cálculo mental (*las etapas del Tour*), y además pueden acceder en la web a **juegos y actividades para entrenar** el cálculo mental.

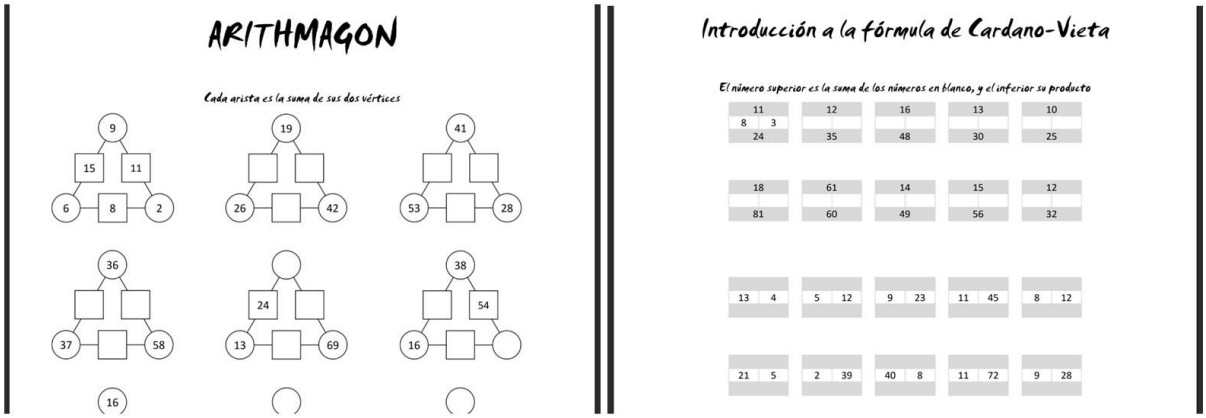


Imagen 2: Ejemplo de actividades para practicar disponibles en la página web

Además, para la preparación previa a cada etapa, la web cuenta con **píldoras de conocimiento** en forma de vídeo de un minuto en el que se explica la estrategia de cálculo mental que se pondrá en práctica.

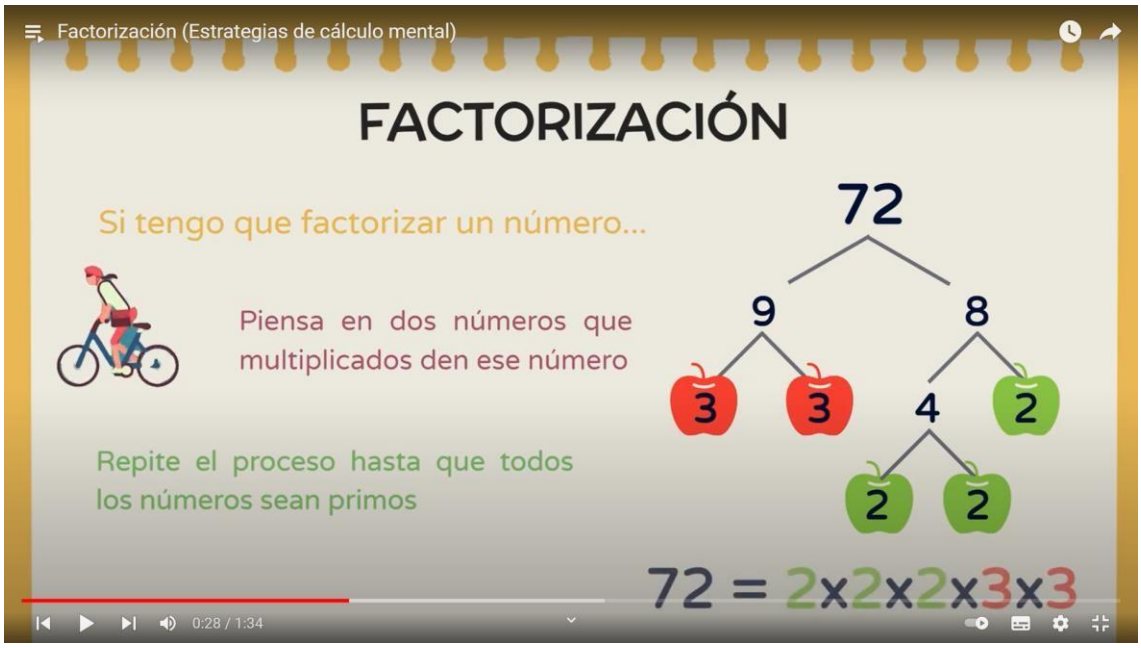


Imagen 3: Vídeo explicativo de una estrategia de cálculo

y ejercicios interactivos para que los alumnos puedan practicar de forma autónoma en el aula de ordenadores o en sus propias casas, donde pueden observar sus aciertos y errores, así como volver a estos últimos para corregirlos.

Imagen 1: Ejercicio interactivo de una estrategia de cálculo

El alumnado también puede acceder a las **clasificaciones** de su centro, a través de una interfaz **interactiva** como si de una competición deportiva oficial se tratase:

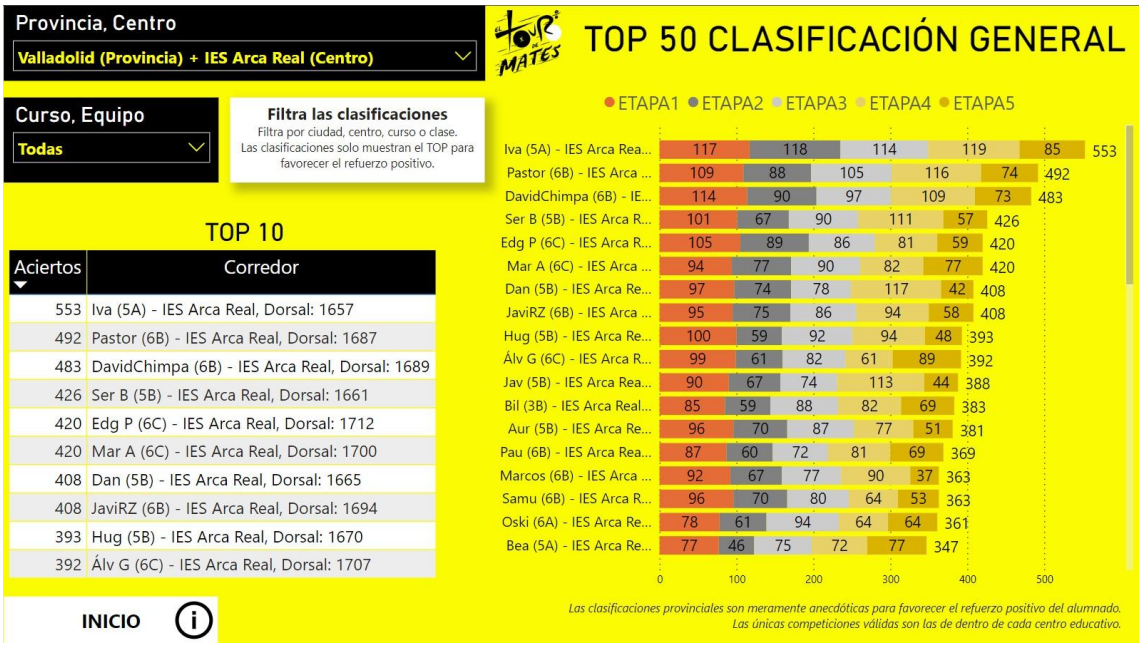


Imagen 2: Visualización de la clasificación general

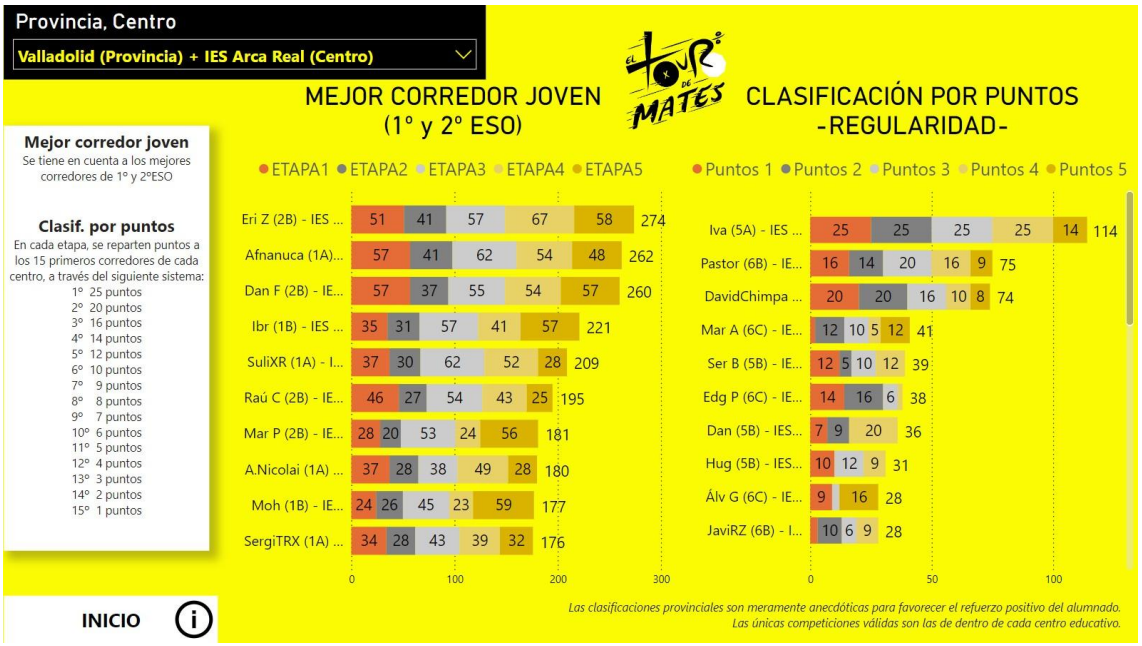


Imagen 3: Visualización de otras clasificaciones

Imagen 4: Visualización de los resultados de todas las etapas

Fases de la competición

La competición se ha desarrollado en dos fases:

Fase 1: La carrera en cada centro: Desde mediados de enero hasta el final de marzo, la competición se realizó en cada uno de los centros educativos. En ella, cada estudiante competía contra todos sus compañeros de centro en las categorías antes mencionadas.

Fase 2: Fase provincial: En el curso 2024 se llevaron a cabo multitud de fases provinciales a lo largo del país, en las cuales participaron los mejores corredores de cada centro educativo. Dichas fases provinciales se celebraron gracias a la colaboración de distintas asociaciones de profesores o centros educativos:

- A Coruña (organizado por los docentes de los centros participantes).
- Barcelona (organizado por *ABEAM*).
- Burgos (organizado por *SOCYLEM*).
- Girona (organizado por ADEMGI).
- León y Ponferrada(organizado por *SOCYLEM*).
- Murcia (organizado por *IES Los Albares*).
- Palencia (organizado por *SOCYLEM*).
- Salamanca (organizado por *SOCYLEM*).
- Segovia (organizado por *SOCYLEM*).
- Tenerife (organizado por *distrito esTEla*).
- Valladolid (organizado por *SOCYLEM*).
- Zamora (organizado por *SOCYLEM*).

La competición en números

Las cifras alcanzadas por este proyecto muestran su gran éxito, y más si se tiene en cuenta que este es el segundo año que se realiza a nivel nacional:

- **Más de 300 centros educativos** trabajando de forma coordinada.
- **1358 docentes** utilizando los recursos creados y llevando a cabo la competición.
- **54972 estudiantes** participando y practicando diariamente cálculo mental.
- **9,5 millones** de operaciones de cálculo mental realizadas a lo largo de toda la competición.

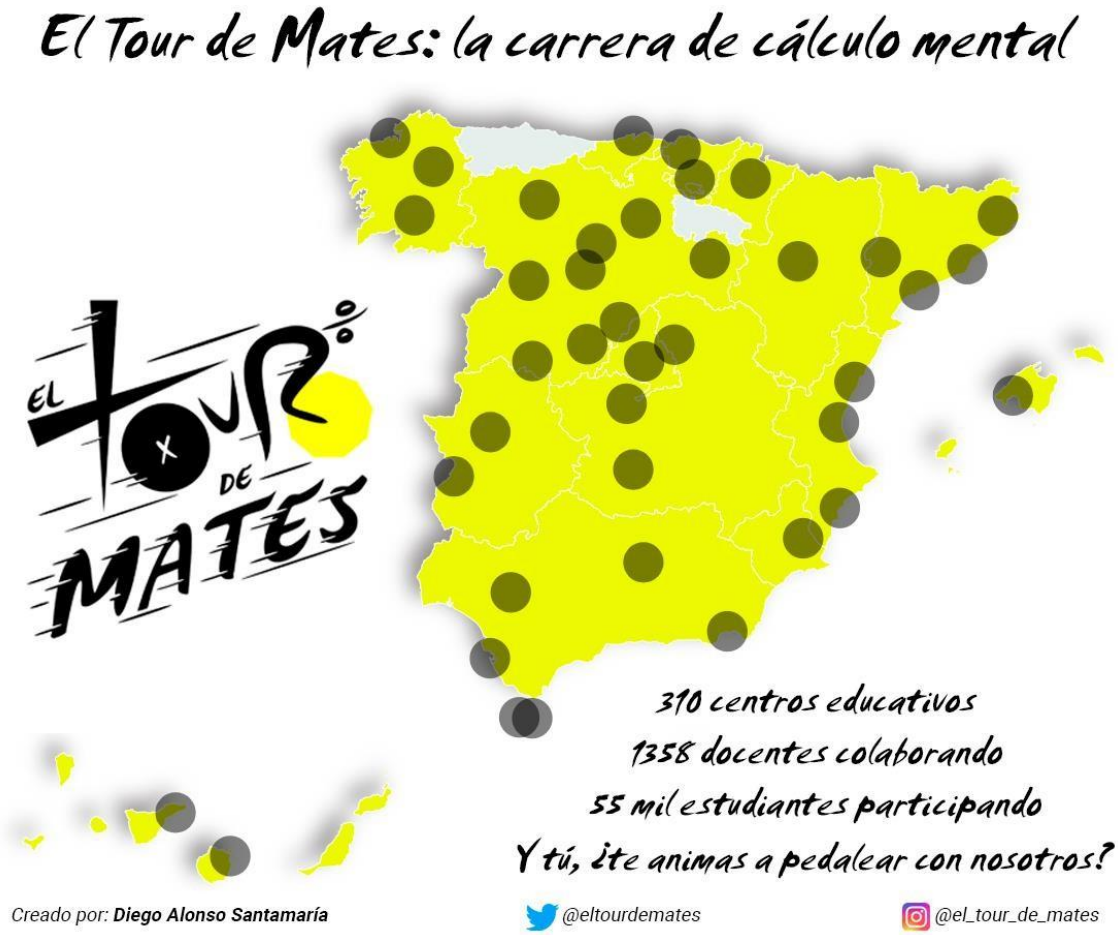


Imagen 8: Mapa de provincias con representación en la competición

Crecimiento del proyecto

Este proyecto nació durante la pandemia en el IES Virgen de la Calle (Palencia), con el propósito de ofrecer al alumnado del centro una competición de matemáticas, debido a la cancelación de estas por el CoVid.

Tal fue la motivación de los alumnos, que al año siguiente se decidió pilotar en Valladolid con la colaboración de la *Asociación Castellana y Leonesa de Educación*

Matemática "Miguel de Guzmán", y ese mismo año se presentó en las *XX JAEM* teniendo así la posibilidad de expandirse gracias al interés de la *Associació*

D'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines y de la *Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques*.

Dos años después, *El Tour de Mates* vuelve a las JAEM como un proyecto consolidado, siendo una de las competiciones educativas con más participación del panorama educativo, para mostrar todas las novedades y recursos que ofrece al profesorado para el fomento del cálculo mental (implementación de técnicas de Big Data y visualización de datos, creación de vídeos explicativos, recursos interactivos autocorregibles y material fotocopiable,...).

Conclusiones

La primera conclusión que me gustaría destacar es la enorme cantidad de profesores de matemáticas que han participado en esta edición del Tour de Mates, lo cual es una clara muestra de que este cuerpo está formado por profesionales motivados con la educación que no dudan en embarcarse en este tipo de proyectos.

Segundo, resulta también destacable el feedback recibido por los propios centros educativos, que durante todas las semanas han publicado con orgullo en sus redes sociales el buen hacer de sus estudiantes, demostrando que este tipo de iniciativas pueden ser utilizadas para motivar al alumnado.

Por último y más importante, es que esta competición es capaz de despertar el gusto por las matemáticas en el alumnado. Han sido muchos los docentes que nos han escrito sorprendidos de que en los primeros puestos de sus centros educativos se encontraba un alumno con malas notas en matemáticas o incluso asignaturas suspensas, y gracias a esta competición han descubierto potencialidades y les ha servido para aumentar su autoestima, motivación y gusto por esta asignatura, llegando en muchos casos a ser un punto de inflexión en sus calificaciones.

Esperemos que las *JAEM 20* sean el trampolín perfecto para el fomento del cálculo mental.

Imagen 9: Recopilación de la repercusión de la competición en las redes sociales de los centros educativos

Referencias

Alonso, D. (s. f.). *El Tour de Mates*. El Tour de Mates. Recuperado 30 de abril de 2024, de https://eltourdemates.wordpress.com

Negro, L. (2022, 31 marzo). Juegos y deporte para aprender matemáticas. *El Norte de Castilla*. Recuperado 8 de abril de 2022, de https://www.elnortedecastilla.es/valladolid/juegos-deporte-aprender-20220330193556-nt.html

Calculadora gráfica 3D en Neotrie VR

José Luis Rodríguez Blancas
jlrodri@ual.es
Universidad de Almería

Rubén Hernández Sánchez
rhs271@inlumine.ual.es
Virtual Dor

Ángel Vico Moreno
avm587@inlumine.ual.es
Universidad de Almería

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

La última actualización, Neotrie VR 4.7.0, trae consigo una serie de mejoras significativas, entre las que destaca una importante actualización de la calculadora gráfica 3D. Ahora, esta herramienta permite representar curvas y superficies de manera más óptima y fluida, con una mayor flexibilidad en la variación de parámetros.

Una de las novedades más destacadas es la capacidad de incluir valores de etiquetas en la calculadora, que pueden utilizarse como variables o parámetros, lo que amplía considerablemente las posibilidades de uso. Además, se ha mejorado el aspecto visual de las superficies mediante un nuevo sistema de coloreado basado en la altura, generado por curvas de nivel, lo que proporciona una representación más precisa y atractiva.

Por último, se ha actualizado la sincronización en el modo multijugador, lo que facilita el trabajo colaborativo entre estudiantes. Esta función mejorada permite una experiencia más fluida y eficiente al trabajar en equipo, lo que fomenta un aprendizaje interactivo y enriquecedor.

Palabras clave: Geometría 3D, Realidad Virtual, Curvas y Superficies paramétricas.

1. Introducción

NeoTrie VR [68] es un software de geometría dinámica en realidad virtual que desde 2018, desarrolla la spin-off Virtual Dor de la Universidad de Almería. En (Sánchez, 2020) se implementó una primera versión de calculadora gráfica 3d, que se amplió para su uso en asignaturas del grado de matemáticas (Rodríguez, 2022).

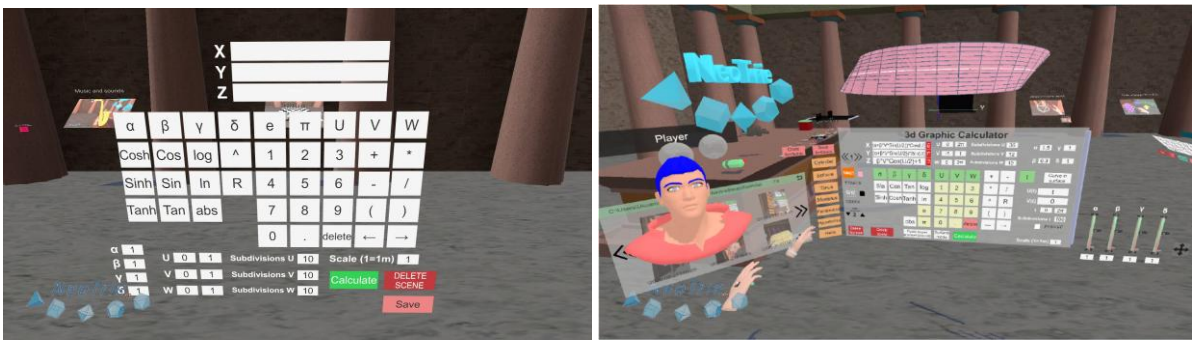


Imagen 1. Calculadora gráfica en Neotrie VR, versiones 2020 y 2022.

Es importante destacar la existencia de otras calculadoras gráficas, como la implementada en CalcFlow (2016)[69] o en GeoGebra MR (2018)[70]. Estas herramientas están diseñadas para dispositivos PCVR (Realidad Virtual para PC), que incluyen gafas de realidad virtual de alta calidad como HTC Vive, Oculus Rift, entre otras.

[68] https://www2.ual.es/neotrie
[69] https://store.steampowered.com/app/547280/Calcflow/
[70] https://store.steampowered.com/app/880270/GeoGebra_Mixed_Reality

Estos dispositivos requieren un ordenador potente con una tarjeta gráfica capaz de un alto rendimiento.

En 2020, el lanzamiento de Meta Quest 2 [71] marcó el inicio de un nuevo período, especialmente favorable para la implementación de la realidad virtual en el ámbito educativo. A diferencia de los dispositivos PCVR, las Meta Quest 2 no son tan potentes, pero ofrecen mayor libertad de movimiento al usuario al no requerir un ordenador ni cables, lo que las hace más accesibles en términos de precio para los centros educativos. Sin embargo, adaptar software diseñado para PCVR a las Meta Quest no es tarea fácil, ya que estas últimas cuentan con un procesador similar al de un móvil Android.

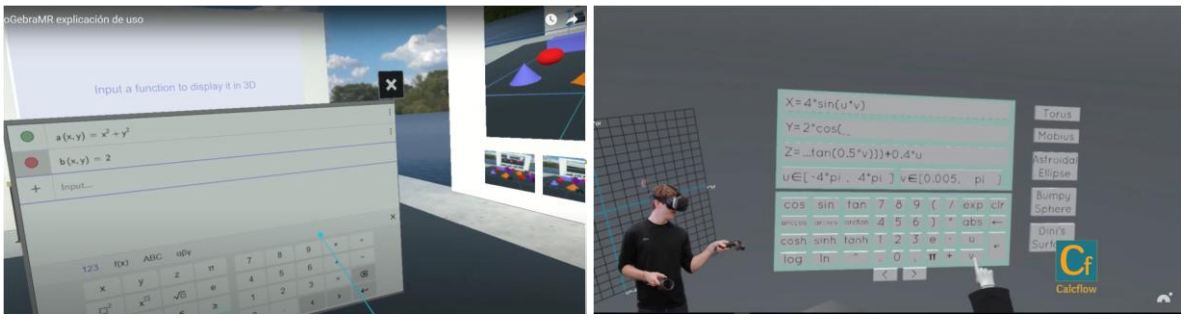


Imagen 2. Izquierda: Captura de GeoGebra MR (https://www.youtube.com/watch?v=y26LFSr84RI). Derecha: Captura de CalcFlow (https://www.youtube.com/watch?v=0qhBb4EThy)

En cuanto a otras calculadoras, merece la pena mencionar Graph XR[72], diseñada específicamente para Meta Quest, con soporte web y realidad aumentada. Por otro lado, GeoGebra ha priorizado en estos años GeoGebra AR, ya que la realidad aumentada para móviles sigue siendo la opción más viable en entornos educativos, aunque no ofrece la misma experiencia totalmente inmersiva que la realidad virtual. Por último, CalcFlow no se ha adaptado a las Meta Quest, pero sí lo han hecho para las Apple Vision Pro[73].

[71] https://www.meta.com/es/
[72] https://sidequestvr.com/app/1892/xr-graph
[73] https://nanome.ai/blog/calcflow-comes-to-the-apple-vision-pro

El equipo de Virtual Dor, con el respaldo del proyecto Erasmus plus "Geometrician's view", logró adaptar la versión de Neotrie para PCVR a las Meta Quest 2, añadiendo además un modo multijugador (véase Rodríguez et al, 2023).

En este trabajo, nos enfocaremos en la calculadora disponible en la última versión, la 4.7.0, de Neotrie VR.

2. Descripción de la calculadora gráfica

La última actualización de Neotrie amplía la capacidad para construir figuras geométricas de mayor complejidad, lo que permite representar gráficas con una resolución significativamente mejorada en comparación con las versiones anteriores del software.

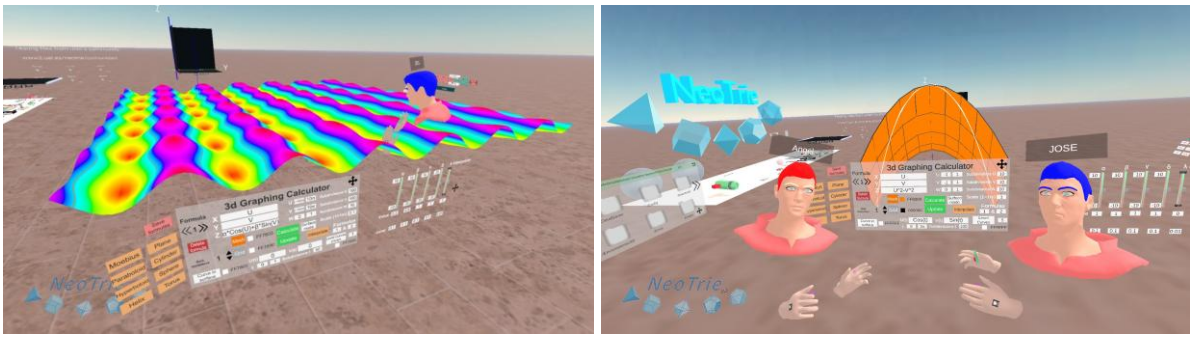


Imagen 3: Superficie con más resolución, en la nueva versión de Neotrie y escena multijugador. Fuente:

https://www2.ual.es/neotrie/ondas-en-3d/

Además, en esta nueva versión, se ha logrado una sincronización integral de muchas de las funciones y herramientas, incluida la calculadora gráfica 3D, en el modo multijugador. Esta mejora facilita enormemente su uso en entornos educativos, permitiendo una colaboración fluida tanto entre profesores y alumnos como en trabajos grupales más reducidos.

Recomendamos visitar el siguiente enlace a un video-tutorial en el que se explican algunos aspectos básicos de la calculadora gráfica 3D:

https://www.youtube.com/watch?v=vNtiJKnTqmQ

2.1 Creación y edición de las fórmulas

A continuación describimos cómo usar los botones y opciones de la calculadora con ejemplos concretos. Nuestra calculadora tiene el siguiente aspecto inicial:

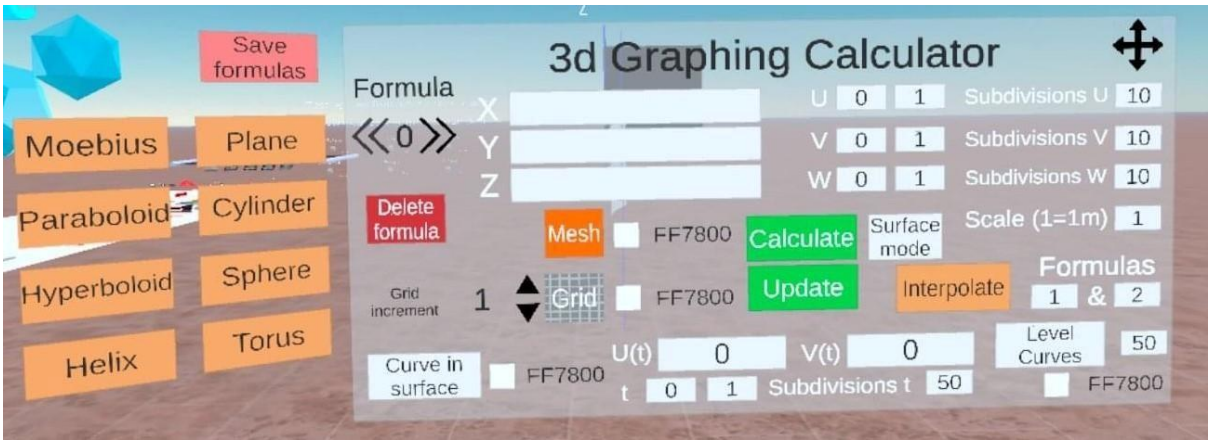


Imagen 4. Nuevo aspecto de la calculadora gráfica 3d.

Si tocamos con nuestra mano virtual (o el rayo que aparece al apretar el botón lateral) en alguna de las coordenadas *X*, *Y* o *Z* se desplegará automáticamente un teclado con las opciones usuales de un teclado de ordenador y algunas extra que son las que aparecen en los botones de color verde:

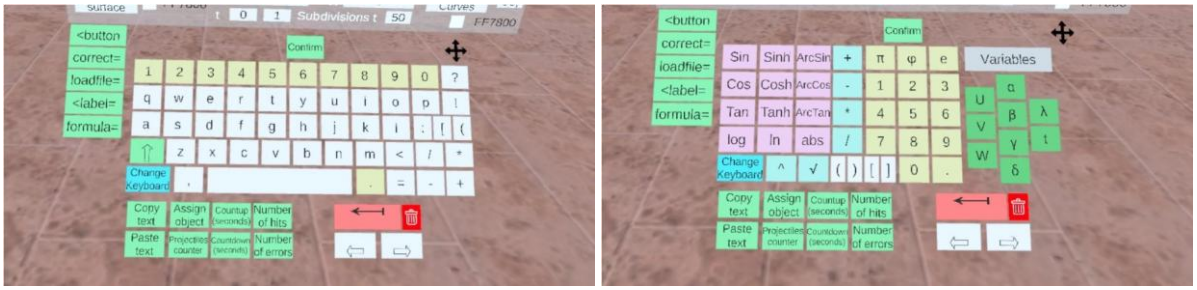


Imagen 5. Teclados usual y matemático

Al pulsar el botón azul *'**Change Keyboard**'*, nuestro teclado se convertirá en uno de estilo matemático que nos permitirá rellenar nuestras coordenadas con cualquier combinación de las funciones que aparecen en los botones en morado e incluso se podrán usar parámetros en las fórmulas (esta opción se comentará más adelante).

No obstante, en la *imagen 4* se puede apreciar que en la parte de la izquierda de la calculadora ya disponemos de algunas de las superficies de R^3 más comunes. Por ejemplo, si pinchamos en *paraboloid* aparecerá el siguiente paraboloide junto a su respectiva parametrización en R^3:

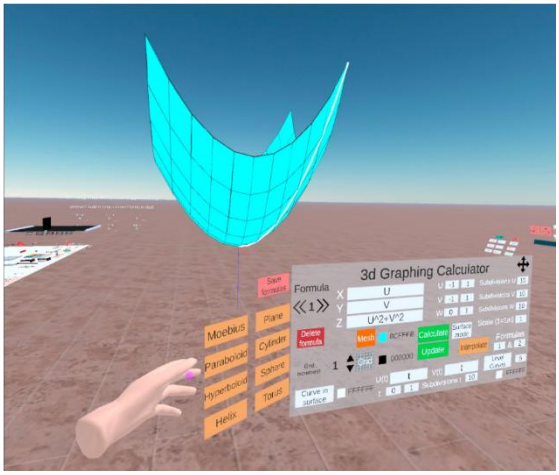


Imagen 6. Ejemplo de paraboloide.

Nótese que en la parte derecha de las coordenadas podemos ajustar los intervalos de variación de los parámetros *U* y *V*, además de su subdivisión. A mayor número de subdivisiones de los respectivos intervalos, mayor fidelidad obtendremos en la representación de la superficie que queramos generar.

Además, también disponemos de un botón rojo ***Delete Formula*** que eliminará la superficie seleccionada en el contador ***Formula << 1 >>*** de la parte superior.

2.2 Visualización de la superficie. Curvas de nivel.

Otras opciones que nos ofrece esta calculadora son las de aspecto visual:

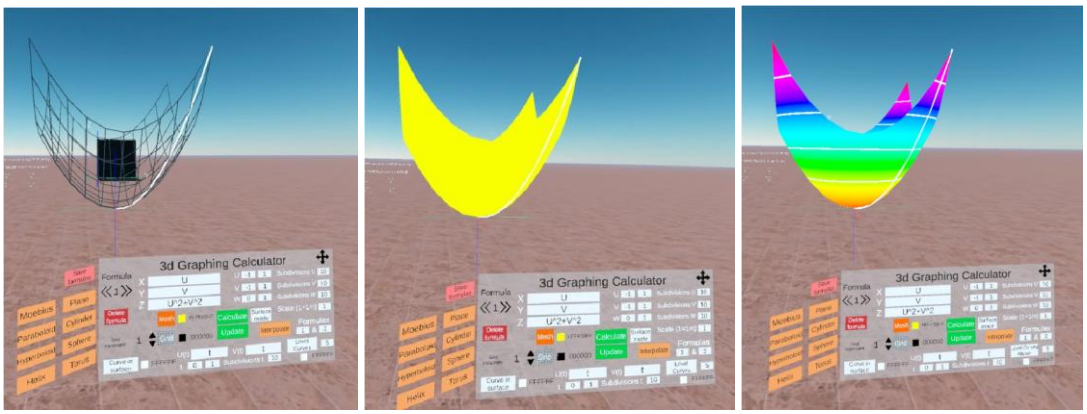


Imagen 7. Mostrar y ocultar mallado de una superficie. Curvas de nivel en superficie coloreada según altura.

La opción de ***MESH*** mostrará y ocultará la superficie. Por defecto, ésta siempre vendrá activada y cuando pinchemos tan sólo veremos el mallado con el que la calculadora construye la superficie (véase *imagen 7 izquierda)*. Si en cambio, pulsamos la de ***GRID*** ocultaremos los paralelos y meridianos, y se verá la superficie en cuestión (véase *imagen 7 centro)*.

Podemos aportar un sentido matemático en este aspecto y es con el concepto de *curvas de nivel* y su respectivo botón de ***LEVEL CURVES***. Esta opción, desarrollada gracias al trabajo de fin de grado (Domenech, 2024), activará la visualización de una serie de colores que irá desde los colores más cálidos como el rojo (representando puntos más bajos) hasta los más fríos como el morado (representando puntos más altos). Además, se nos mostrará en la superficie el número de curvas de nivel que nosotros prefiramos y por defecto son 5 y en color blanco (véase *imagen 7 derecha*).

2.3 Parámetros en deslizadores

Desde el teclado matemático, son accesibles los parámetros *α*, *β*, *γ*, *δ,* que pueden utilizarse tanto en las fórmulas de las coordenadas, *X*, *Y*, *Z*, como en el resto de casillas. Los correspondientes deslizadores darán mucho juego a nuestros estudiantes para realizar animaciones interesantes, con el objeto de comprender mejor las parametrizaciones en sí, transformaciones o modificaciones continuas de las curvas y superficies a estudiar. Veamos un ejemplo para ilustrar esto que comentamos. Usaremos la calculadora gráfica para crear la cinta de Moëbius siguiente:

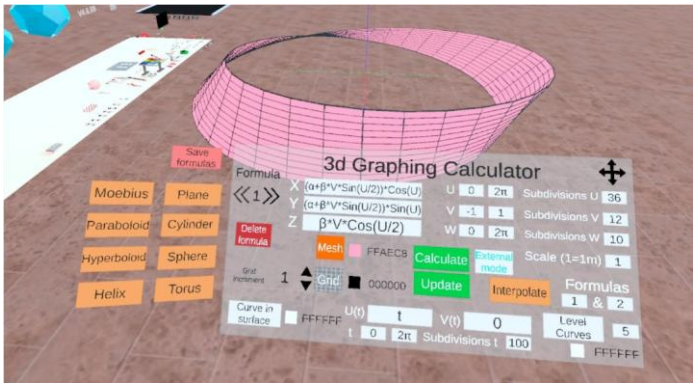


Imagen 8. Cinta de Moëbius.

Como siempre, su correspondiente ecuación aparecerá escrita en cada una de las componentes que nos muestra la calculadora. En este caso, dicha ecuación viene dada en función de las variables *U* y *V*, sin embargo, también se usan los parámetros *α* y *β*. El estudiante podrá entonces comprender de una manera sencilla e intuitiva el uso y funcionamiento de estos parámetros mediante las barras deslizadoras correspondientes.

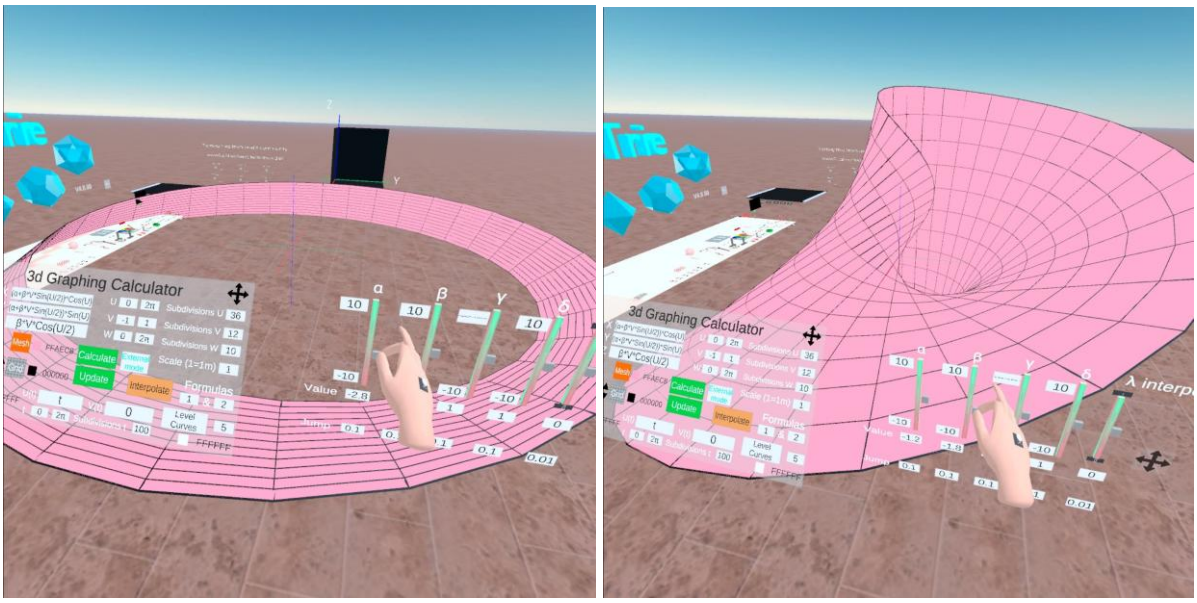


Imagen 9. Cinta de Moëbius y el uso de parámetros deslizadores.

Mediante esta actividad, se deducirá que dada la fórmula anterior, el parámetro *α* cambia el radio de la cinta de Moëbius mientras que β expande o contrae el ancho de la propia superficie. Además, el estudiante tomará una comprensión visual de conceptos tan importantes como movimientos en R^2 y R^3, o transformaciones afines.

2.4 Curvas en superficies

Toda curva contenida en una superficie se puede generar mediante un par de funciones *u(t)* y *v(t)*. Cuando la calculadora muestre una superficie cualquiera vendrá

activada la opción de ***CURVE IN SURFACE*** que será la encargada de generar la curva que deseemos. A continuación se muestra un ejemplo de curva en la esfera:

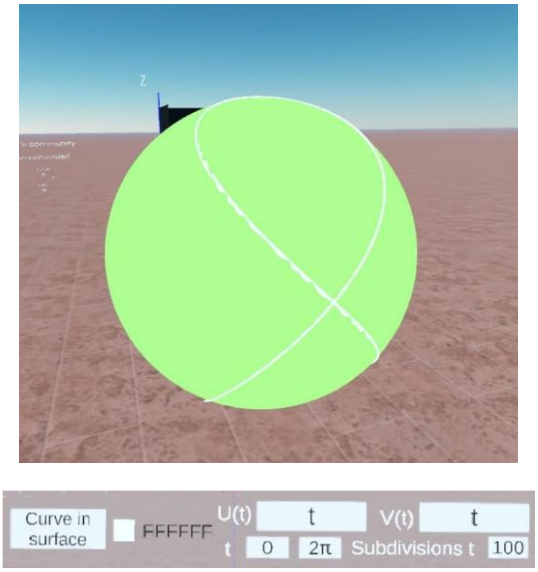


Imagen 10. Ejemplo de curva (de Viviani) contenida en la esfera de R^3.

En el caso de la esfera, la parametrización por defecto que aparece es la denominada *curva de Viviani*. Esta es una curva espacial que resulta de la intersección de la esfera y un cilindro tangente a ella.

2.5 Interpolación de curvas y superficies

La calculadora gráfica dispone de un botón ***INTERPOLATE*** que automáticamente generará la interpolación lineal entre dos gráficas. El parámetro λ que variará entre 0 y 1, nos transformará linealmente una superficie en otra, así como las curvas contenidas en ambas. A continuación, exponemos un ejemplo de homotopía lineal entre un paraboloide y una superficie plana contenida en el plano *xy* que se intersecan en el punto (0,0,0). Al pulsar el botón ***INTERPOLATE*** se genera una nueva FÓRMULA <<3>> donde aparece nuestro parámetro λ, el cual mediante el producto de $(1-\lambda)$ y λ por las correspondientes coordenadas de ambas superficies transformará el paraboloide (λ=0) linealmente en el plano (λ=1) como se muestra en la imagen 11.

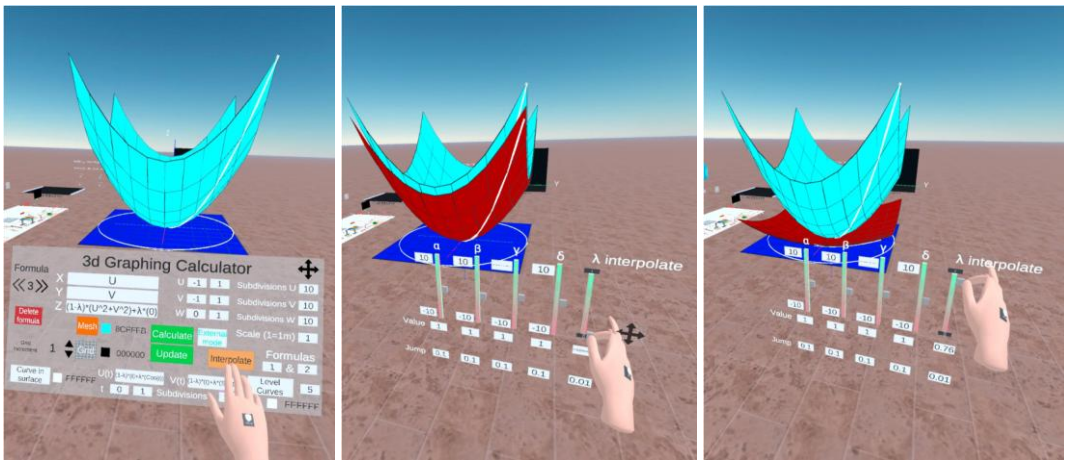


Imagen 11. Paraboloide y plano. Interpolación entre paraboloide y plano

2.6 Uso de etiquetas como parámetros

La herramienta de etiquetado trae consigo una nueva opción [Formula= …] que realiza en tiempo real los cálculos que involucren los valores de otras etiquetas, pudiendo usar todas las funciones del teclado matemático. Cada etiqueta lleva un nombre del tipo e0, e1, e2,..., Para usar estos valores en otra etiqueta o en la calculadora gráfica, se referencian como <label=e0>, <label=e1>, … Por ejemplo, si en la etiqueta e0 tenemos el valor 5, y en la e1 el valor 3, en una nueva etiqueta e2 podemos escribir [Formula= <label=e0> + <label=e1>] y nos aparecerá 8.

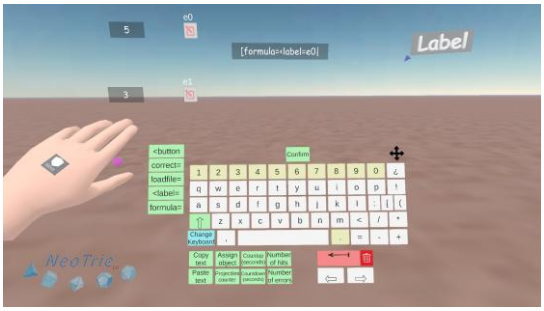


Imagen 12. Uso de etiquetas para cálculos de operaciones y funciones matemáticas

Si creamos una arista y asignamos una etiqueta (llamada e1) con su longitud, entonces podremos usar este valor real en la calculadora escribiendo <label=e1>.

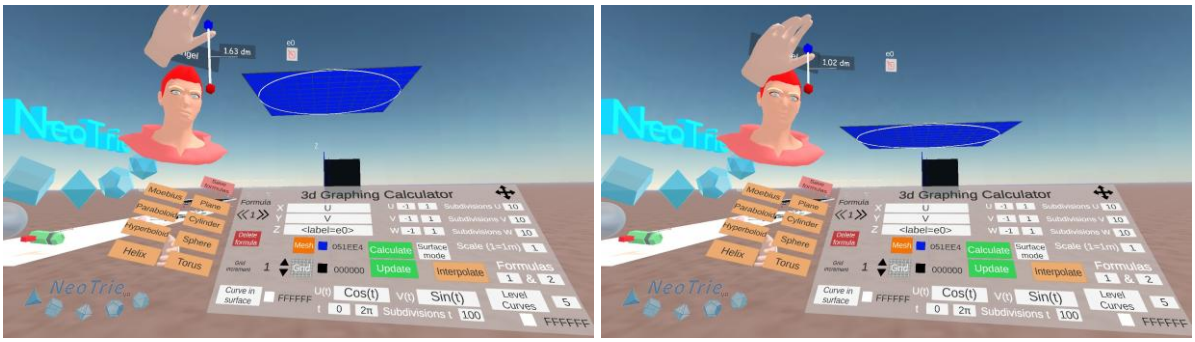


Imagen 13. Uso de la etiqueta de longitud de una arista en la calculadora gráfica.

Esto amplía las posibilidades de la calculadora, al poder incluir también valores métricos, como longitud, área o volumen de elementos de figuras geométricas.

2.7 Intersección de superficies

Gracias al trabajo (Domenech, 2024), se han implementado nuevas funciones en la herramienta de intersecciones. Una de ellas es que al tocar dos superficies paramétricas, se genera una curva poligonal (estática) de la intersección de ambas.

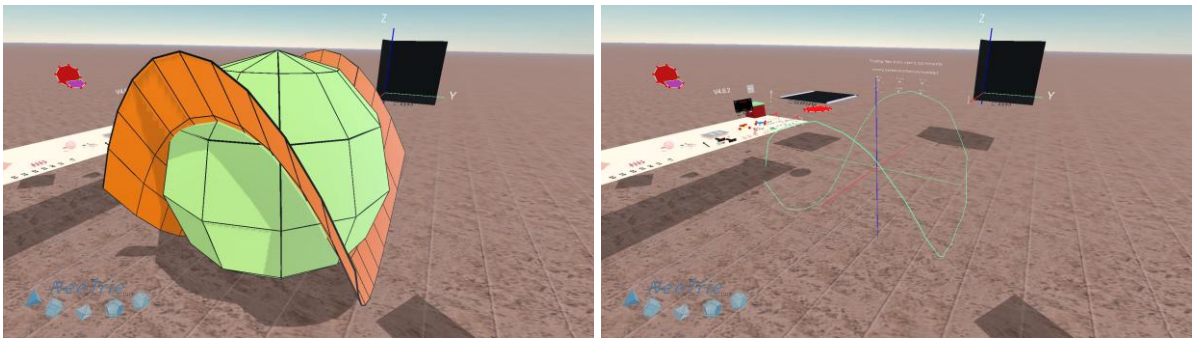


Imagen 14. Curva de intersección de dos superficies.

3. Conclusiones y propuestas futuras

En este artículo, hemos detallado el uso fundamental de la calculadora gráfica 3D y destacado sus principales mejoras. Durante el curso actual, hemos realizado pruebas con estas funciones básicas en asignaturas del grado de Matemáticas de la UAL, como Álgebra Lineal, Geometría Diferencial y Topología.

Tenemos planes de diseñar actividades que integren los software GeoGebra y Neotrie para su implementación en aulas de secundaria y bachillerato. En esta línea, estamos

trabajando en la posibilidad de importar archivos de GeoGebra en Neotrie VR. Esta función permitirá una mejor comprensión espacial de figuras tridimensionales, curvas y superficies, enriqueciendo así la experiencia combinada de ambas plataformas.

Además, estamos explorando agregar herramientas para el cálculo diferencial e integral en la calculadora gráfica 3D. Esto ampliará las posibilidades de aprendizaje y enseñanza en temas avanzados de matemáticas, beneficiando a estudiantes de todos los niveles educativos.

Referencias

Domenech, I. (2024). Intersección de figuras en Neotrie VR. Trabajo fin de grado, UAL, 2024.

Rodríguez, J.L. (2022). Exploring Dynamic Geometry Through Immersive Virtual Reality and Distance Teaching. In: Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17. Springer, Cham.

Rodríguez, J.L., Hernández R., Cangas D. (2023). *Nueva versión de Neotrie VR para el dispositivo de realidad virtual Meta Quest*. Actas de las 20ª Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Valencia, 2023

Sánchez, C. (2020). *Visualización y tratamiento de gráficas 3D en Neotrie VR*.

Trabajo Fin de Grado, 2020, UAL.

Pósters

Sentido del muestreo en la práctica de aula

Alondra Stuardo[1], Nuria Begué[2], María M. Gea[1], Macarena Elgueda-Ibarra[1]
alondrastuardo@correo.ugr.es, nbegue@unizar.es, mmgea@ugr.es, e.macaelguedaa@go.ugr.es

Universidad de Granada[1], Universidad de Zaragoza[2]

La idea de muestra es cercana al estudiante, quien la suele entender como "algo" que se extrae o representa un conjunto o realidad más amplia (Ben-Zvi et al., 2015). Cuando se pide ejemplificar muestras, identificando su población de referencia, muchos estudiantes emplean poblaciones homogéneas como perfume, comida, sangre, etc. (Luna y Guimarães, 2022), pero la verdadera esencia del concepto se plantea en el estudio de poblaciones heterogéneas, siendo una idea fundamental en el sentido estocástico junto a la inferencia (Batanero et al., 2013).

1. Introducción

Algunos "estudiantes pueden tener un sentido claro de que cada muestra puede diferir de otras extraídas de la misma entidad mayor. Sin embargo, tienen dificultades para hacer la transición al significado estadístico formal de muestra (Watson y Moritz, 2000), y comprender el comportamiento de las muestras cuando estudian estadística, cómo se relacionan con una población y qué sucede cuando se extraen muchas muestras y sus estadísticos se distribuyen según una distribución muestral." (Ben-Zvi et al., 2015, pp. 293-294). Por ello, el docente debe considerar las dificultades y potencialidades de este concepto. En España, el muestreo se introduce en Educación Primaria (11-12 años), se desarrolla en Educación Secundaria (11-16 años) con las propiedades de representatividad y variabilidad muestral. En segundo curso de Bachillerato (17-18 años), en la modalidad de Ciencias Sociales, se profundiza en el estudio de la distribución muestral, para fundamentar la inferencia formal mediante intervalos de confianza (MEFP, 2022).

2. El Sentido del muestreo en la práctica de aula

Batanero y colaboradores (2019) describen el sentido del muestreo como unión de razonamiento, comprensión de ideas fundamentales y actitudes y creencias (Figura 1).

Figura 1. Adaptación del marco teórico en el sentido del muestreo

3. Implicaciones docentes

La necesidad de trabajar en un mismo problema con tres distribuciones (teórica, de datos o estadística, y del estadístico muestral) origina dificultad al estudiante. En estadística descriptiva, la unidad de análisis es cada dato, mientras que, al hacer inferencia, el interés es conocer información sobre la población a partir de la distribución del estadístico, según distintas muestras de dicha población, donde la unidad de análisis es cada una de las posibles muestras de un mismo tamaño. Así, es común que los estudiantes confundan estos niveles de concreción del concepto de distribución en estadística descriptiva e inferencia, lo que es un problema relacionado con la enseñanza y aprendizaje del muestreo (Batanero et al., 2019). Como aspecto fundamental que se debe desarrollar de manera paralela a la competencia de análisis de los datos es el razonamiento distribucional del estudiante, y la simulación es una herramienta fácilmente accesible desde recursos en Internet que permite visibilizar propiedades en el muestreo y validar conjeturas, al respecto.

Referencias

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, 83*, 7-18.

Batanero, C., Gea, M. M. y Begué, N. (2019). El sentido del muestreo. *Números, 100*, 121-124.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educ. Studies in Mathematics, 88,* 29-303.

Luna, L. y Guimarães, G. (2022). Compreensão de amostra e amostragem por estudantes brasileiros dos anos finais do ensino fundamental. *Revista de Educación Estadística, 1*(1), 1-17.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Autor.

Watson, J. y Moritz, J. (2000). Developing Concepts of Sampling. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 44-70.

Proyecto *PID2022-139748NB-I00* financiado por:

MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES
Cofinanciado por la Unión Europea
AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

Resolución de problemas de permutaciones sin repetición mediante estrategias informales por estudiantes de secundaria con autismo

Lara González-de Cos[1], Steven Van Vaerenbergh[1], Juncal Goñi-Cervera[2], Irene Polo-Blanco[1]
lara.gonzalezdecos@unican.es, steven.vanvaerenbergh@unican.es, jgoni@unizar.es, irene.polo@unican.es
[1]Universidad de Cantabria, [2]Universidad de Zaragoza

Introducción

La probabilidad desempeña un papel crucial en la interpretación de sucesos aleatorios en la vida real (Batanero, 2005). En didáctica de la matemática, numerosos estudios analizan la comprensión y aplicación de conceptos probabilísticos (Green, 1982), principalmente entre estudiantes de desarrollo típico.

Existe una notable escasez de estudios que aborden la comprensión de la probabilidad entre estudiantes con necesidades educativas especiales, incluidos aquellos con trastorno del espectro autista (TEA), a pesar de su creciente presencia en aulas ordinarias.

Objetivos

Analizar las estrategias utilizadas por dos alumnos (2º ESO) con TEA al resolver problemas de combinatoria simple, en concreto de permutaciones sin repetición.

Se estudiará el desempeño en los problemas distinguiendo si el contexto es o no de interés para los estudiantes.

Metodología

Participantes

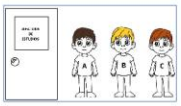
Dos estudiantes (llamaremos A y B) con TEA, de 14 años, escolarizados en diferentes centros ordinarios en 2º de la ESO. Cociente intelectual (WISC-V): 93 (A) y 104 (B).

Instrumento de recogida de datos

Primer ítem, de permutaciones sin repetición, del cuestionario diseñado y validado por juicio de expertos (González-de Cos, 2023), adaptado del ítem 1 del cuestionario original de Navarro-Pelayo (1994), y diseñado para estudiar el desempeño en la resolución de problemas de combinatoria en estudiantado con TEA. El primer ítem consta de dos versiones: una en contexto general (Problema 1) resuelto por ambos participantes, y la otra en contexto de interés especial de cada participante (Problemas 2-a y 2-b para A y B).

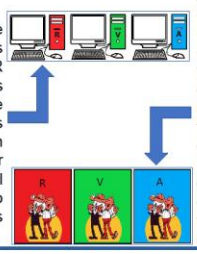
Problema 1

Tres alumnos son enviados a jefatura de estudios por alborotar en la clase. Tienen que esperar en fila delante de la puerta del despacho. Los alumnos se llaman Aitor, Bruno y Carlos (podemos llamarlos A, B y C). Queremos escribir todas las formas posibles en las que pueden colocarse en fila delante de la puerta. Por ejemplo: Un orden posible es Aitor, Bruno y Carlos, siendo Aitor el que está más cerca de la puerta. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?



Problema 2-a

Tres ordenadores del aula de informática se han estropeado. Los nombres de los ordenadores son R (rojo), V (verde) y A (azul). Tenemos que elegir el orden en el que hay que arreglarlos. Queremos escribir todos los órdenes posibles en que pueden arreglarse los ordenadores. Por ejemplo: Un orden posible es el ordenador R primero, V el segundo ordenador y A el tercero. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?



Problema 2-b

A Aitor le regalan tres cómics de Mortadelo y Filemón. Los colores de las tapas de los cómics son R (rojo), V (verde) y A (azul). Tenemos que elegir el orden en que puede leerlos. Queremos escribir todos los órdenes posibles en que puede leer los cómics. Por ejemplo: Un orden posible es leer el cómic R primero, V el segundo cómic y A el tercero. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

Resultados

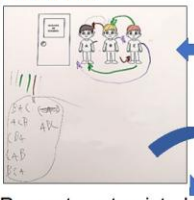
Estrategias utilizadas y tipo de respuesta

	Estrategia		Respuesta	
	Estudiante A	Estudiante B	Estudiante A	Estudiante B
Problema 1 Contexto general	E-s	E-s	C	C
Problema 2-a y 2-b Contexto interés especial	E-a	E-s	I	C

E-s: Enumeración sistemática; E-a: Enumeración asistemática; C: Correcta; I: Incorrecta

Estudiante A

Problema 1



P1: Estrategia enumeración sistemática. Respuesta correcta.

P2-a: Estrategia enumeración asistemática. Respuesta incorrecta.

Problema 2-a

Pregunta entrevistadora: "¿Cómo has llegado a la respuesta?"
Respuesta estudiante A: "Cambiando de sitio a los niños"

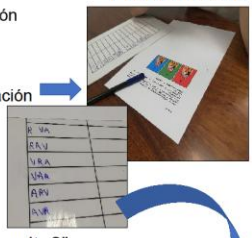
Estudiante B

Problema 1

P1: Estrategia enumeración sistemática. Respuesta correcta.

P2-b: Estrategia enumeración sistemática. Respuesta correcta.

Problema 2-b



Pregunta entrevistadora: "¿Cómo lo has resuelto?"
Respuesta estudiante B: "Cambiando de posición a los niños de izquierda a derecha" (utilizando las tarjetas plastificadas para mostrarle la solución).

Pregunta entrevistadora: "¿Cómo lo has resuelto?"
Respuesta estudiante B: "Haciendo lo mismo que en el anterior, cambiar las posiciones"
P. entrevistadora: "¿Sigues algún orden?"
R. est. B: "Mantengo uno y luego cambio el otro, y así sucesivamente…"

Conclusiones

La estrategia informal más utilizada por los dos estudiantes para resolver los problemas de permutaciones sin repetición fue la enumeración, en línea con estudios anteriores con estudiantes de desarrollo típico (Lamanna et al., 2022).

Se observó mayor motivación al resolver los problemas contextualizados en temáticas de interés por parte de los dos estudiantes, aunque no dio lugar a mejores resultados, en línea con otros estudios previos con estudiantes con TEA (Polo-Blanco et al., 2021).

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 / FEDER, UE, y el proyecto SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria. https://matematicasyautismo.unican.es/

Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Santander. 30 de junio a 3 de julio de 2024.

Bibliografía:
1.González-de Cos, L. (2023). *Diseño de un cuestionario de problemas de combinatoria simple para alumnado de secundaria con TEA: un estudio de casos.* Trabajo Fin de Master. Universidad de Cantabria.
2.Green, D. R. (1982). Probability concepts in school pupils aged 11-16 years. Tesis Doctoral. University of Loughborough.
3.Lamanna, L., Gea, M. M., y Batanero, C. (2022). Secondary school students' strategies in solving combination problems. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12). Febrero 2022, Bolzano, Italia.
4.Polo-Blanco, I., González, M. J., y Bruno, A. (2021). Influencia del contexto en problemas de multiplicación y división: estudio de caso de un alumno con autismo. *Siglo Cero, 52*(1), 59-78.
5.Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN POR UN ALUMNO CON AUTISMO

Laura Laso-Munitis, Lara González-De Cos, Raúl Fernández-Cobos, e Irene Polo-Blanco
laura.laso@unican.es ; lara.gonzalezdecos@unican.es; raul.fernandezcobos@unican.es; irene.polo@unican.es
Universidad de Cantabria

Introducción

Los estudiantes con autismo muestran de manera generalizada más dificultades en matemáticas que sus compañeros de desarrollo típico (Fernández-Cobos & Polo-Blanco, en prensa), concretamente suelen presentar mayores dificultades en la resolución de problemas matemáticos. Por este motivo, numerosos estudios tienen como objetivo comprobar la eficacia de metodologías que se adapten a las necesidades de estos alumnos y les ayuden en el aprendizaje de resolución de problemas (Bruno et al., en prensa; Clausen et al., 2021; Polo-Blanco et al., 2024). En el estudio que se presenta, se evalúa el desempeño de un estudiante de 14 años con autismo, escolarizado en un colegio de Educación Especial, al resolver problemas de razón, de multiplicación y división partitiva, a través de una metodología de Instrucción Basada en Esquemas Modificada (MSBI).

Metodología e Instrucción

Participante: Estudiante de 14 años con TEA, escolarizado en un Centro de Educación Especial. Índice No Verbal= 79. Edad matemática= 6:0.

Instrucción Basada en Esquemas Modificada (MSBI): Incluye apoyos a la metodología SBI, complementando los esquemas con otros apoyos que se adaptan a las necesidades específicas del estudiante.

Hoja de trabajo pautada con enunciados breves y hoja de pautas para apoyar con la planificación y comprensión. Pictogramas para facilitar la comprensión y aprovechar el buen procesamiento visual.

Fases de las sesiones: (1) Modelización: La instructora modeliza la resolución del problema. (2) Guía: La instructora acompaña al estudiante en la resolución proporcionando apoyos mínimos. (3) Evaluación: El estudiante resuelve los problemas de forma independiente.

Resultados

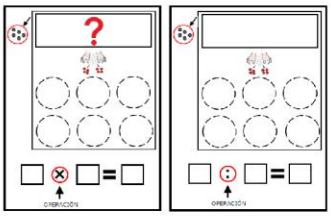
	Número de problemas correctos																
	Pre-test	Instrucción multiplicación					Post-test 1	Instrucción reparto				Post-test 2	Instrucción mezclados				Post-test 3
		M1	M2	M3	M4	M5		R1	R2	R3	R4		MR1	MR2	MR3	MR4	
Multiplicación	0	2	2	1	1	2	2	-	-	-	-	0	1	1	2	1	2
División partitiva	0	-	-	-	-	-	0	0	2	2	2	2	1	1	1	2	1

Instrucción: 2 problemas de cada tipo de problema involucrado en la sesión. Pre-test y Post-Test: 2 problemas de cada tipo.

Se observa una mejora en el desempeño de los problemas, aunque surgen las siguientes dificultades:

Principales dificultades	Apoyos instructora
Errores de conteo.	Uso de material manipulativo.
Identificación de la estrategia.	Trabajo en el esquema grande.
Identificación de la operación en los problemas mezclados.	Tarjetas de apoyo.

Sesión de instrucción de problemas mezclados utilizando con éxito los apoyos.



Ejemplo: "¿Sabemos el total?, cuando no sabemos el total es multiplicación"

Conclusiones

Algunos autores han demostrado cómo metodologías basadas en esquemas se pueden adaptar al perfil del alumno (Clausen et al., 2021; Polo-Blanco et al., 2024). La metodología propuesta permite al estudiante progresar en los contenidos a partir de sus propias estrategias promoviendo su autonomía. El carácter individualizado de la instrucción, junto con la elaboración de recursos y apoyos acordes a las necesidades educativas específicas del estudiante, han permitido solventar muchas de las dificultades observadas en el proceso de instrucción. En línea con otros trabajos previos con estudiantes con autismo (Bruno et al.,en prensa), el estudiante mostró una progresión en el aprendizaje de este tipo de problemas.

Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Santander. 30 de junio a 3 de julio de 2024.

Bibliografía: Bruno, A., Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y González-López, M. J. (en prensa). Strategies for solving multiplicative problems using a conceptual model-based problem-solving approach. A case study with a student with autism spectrum disorder. *ZDM-Mathematics Education.*
Clausen, A.M., Tapp, M.C., Pennington, R.C., Spooner, F., y Teasdell, A. (2021). A systematic review of modified schema-based instruction for teaching students with moderate and severe disabilities to solve mathematical Word problems. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities, 46(2), 94-107.*
Fernández-Cobos, R., y Polo-Blanco, I. (en prensa). Early math competence in students with autism. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59(2).*
Polo-Blanco, I., González-López, M., Bruno, A., y González-Sánchez, J. (2024). Teaching students with mild intellectual disability to solve Word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly, 47(1), 3-15.*

Agradecimientos: Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático en alumnado con autismo. Implicaciones para la enseñanza y la formación del profesorado Proyecto PID2022-136246NB-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 / FEDER, UE; y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria.

Mosaicos por la Igualdad : Geometría y Arte a través de Aprendizaje-Servicio

Ariadna Gómezescobar[1], Leyre Gilardi[1], Javier Rodríguez-Miravalles[1], Álvaro Nolla[1]
ariadna.gomezescobar@uam.com , leyre.gilardi@estudiante.uam.com , javier.rodriguez01@uam.es , alvaro.nolla@uam.com
Universidad Autónoma de Madrid[1]

Taller Unlogic Crew

Matemáticas y su Didáctica II
Doble Grado en Maestra en Ed. Infantil y Primaria
60 estudiantes universitarias

Puesta en práctica en Ed. Primaria

27 estudiantes universitarias
50 estudiantes de 6º de Educación Primaria

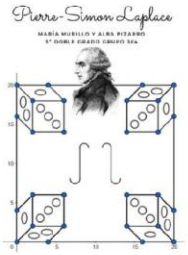
Evaluación del Servicio

Alumnado de Ed. Primaria
Preguntas ad-hoc
Escala Likert 1-5

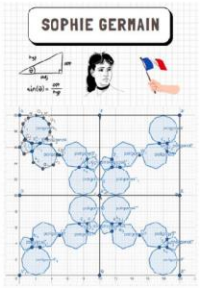
Objetivos

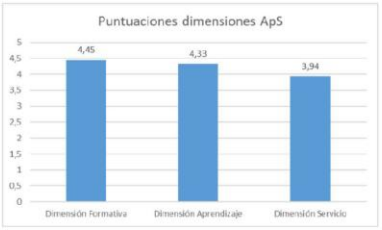
O1. Reconocer la importancia de las aportaciones de mujeres y hombres a lo largo de la historia y realizar creaciones artístico-geométricas vinculadas a ellas
O2. Visibilizar cuestiones de género a través del Aprendizaje-Servicio, utilizando el Arte y la Geometría

Diseño de talleres



Por grupos, elaboración de una presentación de cada persona STEAM y una plantilla de un mosaico que trabaje simetrías, giros, traslaciones, puntos homólogos, centro de giro, eje de simetría,...





Evaluación del Aprendizaje

Estudiantes universitarias
Cuestionario de León-Carrascosa et al. (2020)
Escala Likert 1-5

Financiación

- Proyecto de innovación docente "Mosaicos por la Igualdad: Geometría y Arte a través de Aprendizaje-Servicio (FPYE_009.23_INN)", de la convocatoria INNOVA de la Universidad Autónoma de Madrid.
- Proyecto "FemSTEAM: fomento feminista de vocaciones STEAM (27-4ACT-23)", del Instituto de las Mujeres (Ministerio de Igualdad).
- Proyecto "Universid-ApS: simbiosis universidad-centros educativos mediante Aprendizaje-Servicio" (FCT-22-17979), de la Federación Española de Ciencia y Tecnología (FECYT).

BIBLIOGRAFÍA

León-Carrascosa, V., Sánchez-Serrano, S. y Belando-Montoro, M. R. (2020). Diseño y validación de un cuestionario para evaluar la metodología Aprendizaje-Servicio. *Estudios sobre Educación, 39*, 247-266. DOI: 10.15581/004.39.247-266

Matemáticas para maestros/as a través de *Matevisión*

G. Castiñeira[1], Cristina Núñez-García[2]
gonzalo.castineira.veiga@usc.es, cristina.nunez.garcia@usc.es
Universidade de Santiago de Compostela[1,2]

1. Introducción y descripción del proyecto

Para poder entender e interpretar correctamente la información que nos rodea es necesaria una sólida competencia en probabilidad y estadística. Es imperativo mejorar el sistema educativo en matemáticas, incluyendo la formación inicial de maestros/as y adoptando metodologías efectivas como el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) (Marbán et al., 2020). Este proyecto, Matevisión, se desarrolló en el 4º curso del Grado en maestro/a de Educación Primaria en la Universidad de Santiago de Compostela. Participaron un total de 167 de alumnos/as (Castiñeira, G. y Núñez-García, C, 2023).

a) Fase inicial. Extracción del nombre del país representado (véase Figura 1). Realización de vídeos de 2-3min de duración y montaje del vídeo final: Matevisión.

Figura 1. Extracción del país de la urna sin reemplazamiento .

b) Fase intermedia. Visualización de Matevisión, votación por categorías (véase Figura 2) y proclamación del país vencedor (véase Figura 3).

Figura 2. Ficha de votación por categorías.

Figura 3..Resultados de las votaciones.

c) Fase final. Análisis de resultados y creación del informe.

2. Metodología

Se promovió el aprendizaje cooperativo en sesiones grupales grandes y pequeñas y se enfocó en un aprendizaje competencial. El proyecto tuvo una duración de 5 semanas.

Con respecto a la evaluación, distinguimos tres tipos: inicial (para advertir posibles cambios en las actividades), formativa (preguntas directas durante las sesiones) y final (con datos de la formativa y un examen final).

3. Resultados

Se evidenciaron algunos errores comunes estudiados en la literatura (Batanero, 2001) como **e**rrores en las medidas estadísticas, en relación a los procedimientos, propiedades y de interpretación de conceptos. También errores técnicos en las realización de gráficos estadísticos. Una vez revisados los informes, se calificaron entre 0 y 2 puntos (véase Figura 4).

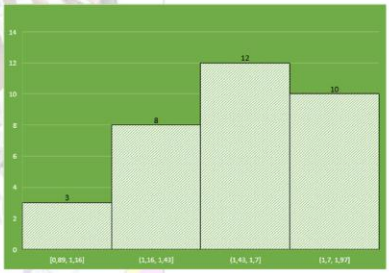


Figura 4. Resultados de los informes. Media de 1,55 puntos y desviación típica de 0,25 puntos.

4. Conclusiones

La metodología ABP en estadística y probabilidad facilita un aprendizaje contextualizado y efectivo, como se evidenció en este proyecto innovador que mejoró la competencia matemática y la actitud hacia las matemáticas. Los buenos resultados en los informes y la participación entusiasta del alumnado respaldan estos logros.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122326OB-I00 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

Referencias

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castiñeira, G. y Núñez-García, C (2023). ¡Que las mates nos pillen bailando!. Innovación docente e investigación en educación: nuevas tendencias para el cambio en la enseñanza superior, Ed. Dykinson, 719-732.

Marbán, J.M., Palacios, A. e Maroto, A. (2020). Desarrollo del dominio afectivo en la formación inicial de maestros de primaria. Avances de Investigación en Educación Matemática, 18, 73-86.

Influencia del contexto en las estrategias de resolución de un problema de modelización en el futuro profesorado de Educación Primaria

Carmen Melchor-Borja[1], Marta Pla-Castells[1]
carmen.melchor-borja@uv.es, marta.pla@uv.es
Departament Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València[1]

Introducción

Por consenso internacional, la parte esencial del significado de la modelización matemática es que se trata de una actividad que conlleva procesos de transición entre la realidad y las matemáticas. Diversos estudios reconocen la importancia de incluir actividades de modelización en la formación del futuro profesorado de Educación Primaria, así como en la del alumnado de esta etapa (Borromeo Ferri, 2018).

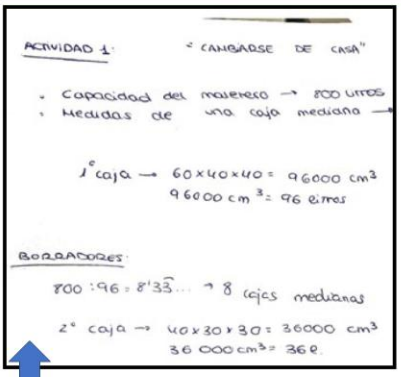
Objetivo

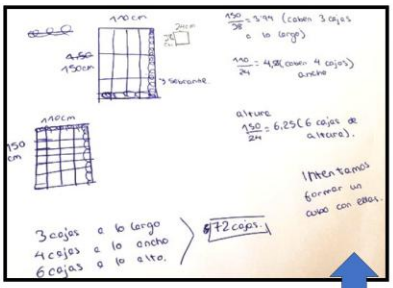
El **objetivo principal de este estudio** es analizar la influencia del contexto en las estrategias de resolución de un problema de modelización de una muestra de futuro profesorado de Educación Primaria. Secundariamente, se pretender reflexionar sobre las estrategias detectadas y los diferentes estilos de razonamiento del alumnado de Educación Primaria.

Metodología

Participantes: 39 grupos de 3 personas del alumnado del Grado en Maestro/a en Educación Primaria en el contexto de un curso de formación en modelización matemática como herramienta didáctica
Duración de la prueba: 90 minutos
Problema de modelización planteado: *Tu hermana mayor se muda con su marido a una casa nueva. Ambos quieren ahorrar dinero. Aunque tienen muchas cosas, alquilan un coche pequeño para sólo 1 día, el que ves en las fotos. Ayúdales a pensar en una forma óptima de meter el máximo número de cajas de mudanza en el coche. Describe tu manera de solucionarlo; haz un croquis; discute con los miembros de tu grupo si la solución tiene sentido.*
Problema extraído de Borromeo Ferri (2018)

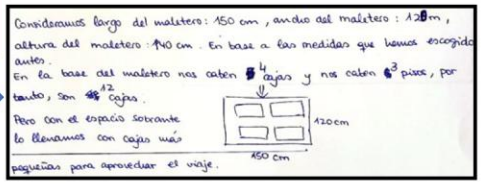
Resultados





Estrategia 1: Utilizando el volumen
36% de las resoluciones

Estrategia 2: Iteración lineal
44% de las resoluciones



Estrategia 3: Teselación
20% de las resoluciones

Conclusiones

Un alto porcentaje de alumnado (36%) realiza una estimación muy burda en la que no se tiene en cuenta el contexto del problema.

Esto indica que dicho alumnado no será capaz de afrontar resoluciones más creativas como las que puede tener el alumnado con altas capacidades matemáticas (Gutiérrez y Jaime, 2013).

Por ello, es necesario mejorar la formación del futuro profesorado en resolución de problemas en los que el contexto es fundamental para obtener una resolución óptima.

Agradecimientos Este trabajo está financiado por el proyecto I+D+I PID2020-117395RB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación

Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Santander. 30 de junio a 3 de julio de 2024.

Borromeo Ferri, R. (2018). Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Gamificación Matemática: Attack Maths

Patricia Navarro Martínez
pnavarro@ucam.edu
Universidad Católica de Murcia (UCAM)

INTRODUCCIÓN

La gamificación mezcla diferentes aspectos psicológicos que refuerzan la motivación de los alumnos. El juego "Attack Maths" está basado en el currículo escolar y las actividades que se proponen reflejan problemas matemáticos con el fin de mejorar la motivación y los resultados en la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas del grado en Educación Primaria. La plataforma creada es gratuita y los alumnos acceden a ella mediante un avatar.

OBJETIVO

Mejorar la motivación e interés de los estudiantes de Primaria por la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas dando un sentido práctico a los conceptos matemáticos tal como indica la LOMLOE y dar a conocer a los futuros profesores nuevas estrategias para innovar en el aula.

METODOLOGÍA

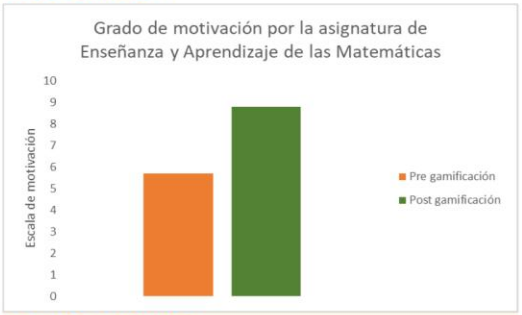
Attack Maths es una plataforma digital compatible con cualquier dispositivo: móvil, ordenador o tablet. Mostramos las primeras conclusiones de una experiencia realizada con estudiantes de educación primaria. Se desarrolló en una sesión con grupos reducidos (8-10 personas), una vez los alumnos tenían los conocimientos suficientes como para poder trabajar en la misma. La sesión requería el uso de gafas de realidad aumentada y una sala multimedia, el juego está orientado a un público ideal de entre 10-11 años de edad. El juego se recrea en una ciudad ficticia (calculandia), pasando por diversos desafíos. Para su correcto desarrollo se utiliza paneles explicativos y un perro guía que nos indica en cada momento hacia dónde dirigirnos dentro de la ciudad.

Imagen 3: Vista panorámica de calculandia, perro guía y paneles.

Imagen 1: Vista panorámica de calculandia, ciudad matemática

Imagen 2: Sesión de gamificación con estudiantes de grado

RESULTADOS



CONCLUSIONES

Se puede afirmar que la gamificación de la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas ha sido un éxito ya que ha causado un impacto positivo en los estudiantes del grado, lo que se refleja en la motivación por la asignatura, que ha aumentado respecto al inicio de curso, no gamificado. La propuesta diseñada específicamente para entornos educativos tiene un gran potencial en el rendimiento del alumnado.

BIBLIOGRAFÍA

Decreto y normativa especificado: LOMLOE; Decreto 209/2022, de 17 de noviembre.

Formación inicial de maestros en la resolución de problemas verbales en alumnado con autismo

Steven Van Vaerenbergh, Raúl Fernández-Cobos
steven.vanvaerenbergh@unican.es, raul.fernandezcobos@unican.es
Universidad de Cantabria

1. Introducción

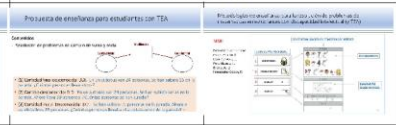
Aunque la legislación educativa en muchos países promueve principios de inclusión, equidad y accesibilidad para estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE), la formación inicial del profesorado no ofrece, en general, orientaciones sobre cómo enseñar materias concretas, como las matemáticas, a este alumnado. Ante esta brecha, el presente estudio propone una formación específica que se centra en enseñar a los futuros docentes cómo impartir un contenido matemático concreto a un colectivo determinado: la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal a estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA) (Root et al., 2022).

2. Objetivos

O1: Familiarizar a los futuros docentes con el estado actual de la atención a las NEE en las áreas curriculares, específicamente en matemáticas.
O2: Proporcionar conocimientos sobre técnicas específicas para una abordar NEE.
O3: Dotar a los futuros docentes de herramientas para generalizar estos conocimientos a distintos contenidos y necesidades.

3. Metodología y Materiales

La metodología empleada incluye clases magistrales y actividades prácticas, distribuidas a lo largo de seis sesiones. Cada sesión se centra en un aspecto específico de la formación. En una investigación relacionada, se diseñaron una serie de indicadores del marco MTSK para identificar el conocimiento adquirido.

1. Introducción	2. TEA y dificultades en matemáticas	3.& 4. Conocimiento de metodologías adaptadas a TEA	5. & 6. Incorporación de la práctica docente: aplicación de metodologías adaptadas a la necesidad
			
Clase magistral y lectura sobre necesidades educativas y currículo de matemáticas.	Clase magistral y lectura sobre características del TEA relacionadas con el aprendizaje.	Descripción de TEACCH, CRA y SBI. Ejemplificación en la enseñanza de TEA y resultados de efectividad.	Lectura por el docente mediante un ejemplo real, diseño subsiguiente de secuencia de enseñanza en otro contenido matemático y otra necesidad educativa. Propuestas para enseñar problemas aritméticos verbales a estudiantes con TEA.

4. Evaluación

En primer lugar, se aplica un cuestionario que examina la comprensión y aplicación de lo aprendido.

En segundo lugar, los futuros docentes desarrollan una propuesta de enseñanza de un contenido matemático distinto, dirigido a alumnado con NEE distintas que las tratadas en clase, para valorar su habilidad de generalizar los conocimientos a nuevos contextos.

5. Reflexiones y Conclusiones

La formación fue recibida positivamente, destacando la participación activa en grupos durante la tarea evaluativa y señales iniciales de generalización de conocimientos. Se modificó el programa basado en retroalimentaciones del estudiantado, para optimizar la metodología para futuras ediciones.

6. Referencias

Root, J. R., Saunders, A., Cox, S. K., Gilley, D., & Clausen, A. (2022). Teaching Word Problem Solving to Students With Autism and Intellectual Disability. TEACHING Exceptional Children, (advance online publication). https://doi.org/10.1177/00400599221116821

Proyecto "Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático en alumnado con autismo. Implicaciones para la enseñanza y la formación del profesorado" PID2022-136246NB-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 / FEDER, UE.

Experiencia de aula: una práctica de laboratorio para introducir la medida.

María del Valle Bermejo-Luna[1], Inmaculada del Rocío Lucena Trigo[2]
vll.bermejo@gmail.com, inmalucenatrigo@gmail.com
Universidad de Sevilla / I.E.S. Torre del Rey[1], I.E.S. Torre del Rey[2]

1. Introducción: *¿por qué es necesaria esta experiencia de aula?*

Segovia et al. (2015) expone los objetivos de Castillo (2013) que "deben dirigir la instrucción y la evaluación de la estimación en medida" y dentro de estos encontramos "usar instrumentos para medir." Sin embargo, "los maestros se suelen limitar al trabajo formal de cambio de unidades del Sistema Métrico Decimal, que es presentado de forma algorítmica" (p.222, Chamorro, 2003). Tomando como base la normativa estatal de Educación Primaria (RD157/2022), se observa la importancia de medir tanto con instrumentos convencionales como no convencionales a lo largo de toda la etapa: en el primer ciclo se utilizarán reglas, cintas métricas, balanzas, calendarios…; añadiendo en el segundo ciclo el reloj analógico y digital; para finalizar en el tercer ciclo con instrumentos analógicos y digitales, así como la medición de objetos, ángulos y tiempos.

CUESTIONARIO INICIAL

En tu etapa de Primaria, ¿recuerdas haber trabajado/estudiado el tema de la medida?
☐ SÍ ☐ NO

En tu etapa de Primaria, ¿recuerdas haber medido objetos?
☐ SÍ ☐ NO

Si la respuesta anterior es un sí, ¿qué magnitudes mediste?
☐ Longitud
☐ Masa
☐ Tiempo
☐ Superficie
☐ Volumen
Otras: _____

¿Qué objetos mediste?

En tu etapa de Primaria, ¿trabajaste el cambio de unidades con la escalerita?
☐ SÍ ☐ NO

Si la respuesta anterior es un no, ¿qué método utilizaste?

Figura 1

Antes de comenzar la situación de aprendizaje en cuestión, se le pidió al alumnado que completara anónimamente el **cuestionario** que se muestra en la Figura 1. Resuelven el cuestionario **98 estudiantes** de 1º de la E.S.O. de un instituto del Aljarafe sevillano. De esos 98 cuestionarios, se toman como válidos 85. De los cuales, 51 afirman haber medido algún objeto durante su etapa de Educación Primaria (Figura 2). De los 51 estudiantes que han medido algún objeto en su etapa de Educación Primaria, 47 afirman que han medido la magnitud longitud (92,16% de los 51), Figura 3. De esos 47 estudiantes que han medido la magnitud longitud: 16 sólo han medido la longitud y el resto de posibles combinaciones se muestran en Figura 4.

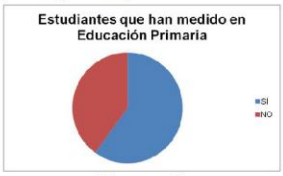


Figura 2

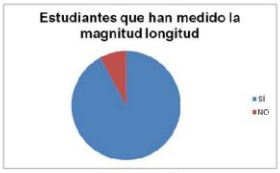


Figura 3

2. Experiencia en el aula:

¿Qué?	• Situación de aprendizaje: práctica de laboratorio de medida.
¿Cuándo?	• Dos sesiones de 60 minutos.
¿Dónde?	• En el Laboratorio de Física y Química.
¿Cómo?	• Ocho estaciones donde por parejas o trios todos los estudiantes fueron realizando las actividades de medición.
¿Qué se necesita?	• Una balanza analógica, una balanza digital, dos probetas, un pie de rey, una regla, un metro, un cronómetro y diversos elementos que medir (manzana, líquidos, sólido irregular, un puñado de garbanzos, un folio, un subrayador, etc.).

Aquí se detallan las ocho estaciones de aprendizaje:

1. Pesa la siguiente manzana en una balanza analógica.
2. Pesa los siguientes garbanzos en una balanza digital.
3. Deletrea el abecedario y cronométrate.
4. Mide la altura de un compañero con un metro.
5. Mide el ancho de un rotulador con un pie de rey.
6. Mide el volumen de un sólido irregular mediante el Principio de Arquímedes.
7. Mide el volumen de este líquido con una probeta.
8. Mide la superficie de este rectángulo.

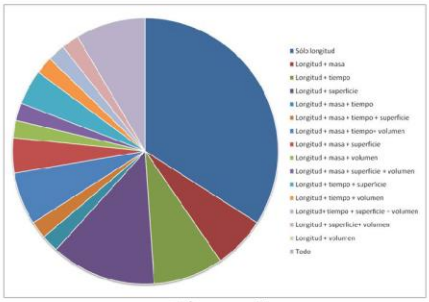


Figura 4

Toda la documentación se puede encontrar:

3. Resultados: *¿qué ha funcionado y qué se podría mejorar?*

Tras la realización, podemos concluir que ha funcionado bien la hoja de trabajo de campo utilizada, la tutorización entre iguales y el trabajo experiencial por estaciones de aprendizaje. Sin embargo, se podría mejorar el estado y variedad de los instrumentos de medida, la creación de los grupos mejoraría siendo aleatoria y consideramos que se podría mejorar la experienda de aula trabajando las normas del laboratorio de forma transversal. Se propone repetirla el próximo curso pero como una actividad interdisciplinar del ámbito científico.

4. Referencias bibliográficas.

Castillo Mateo, J. J. (2013). Estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie [Universidad de Granada].
Chamorro, M. del Carmen., & Belmonte Gómez, J. M. (2003). Didáctica de las matemáticas para primaria. Pearson Educación.
Segovia Alex, I., Castro Martínez, E., Molina, M., & Castillo Mateo, J. J. (2015). Evaluación del sentido de la medida. Uno: Revista de didáctica de las matematicas, 70, 21-30.

El pensamiento algebraico en educación infantil: una trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición

Nataly Pincheira, Yeni Acosta y Ángel Alsina
nataly.pincheira@udg.edu, yeni.acosta@udg.edu, angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona

1. Introducción

El pensamiento algebraico comienza mediante una conciencia estructural que se desarrolla en los alumnos a través de los patrones. Según Taylor-Cox (2003, p.15), "los patrones son la piedra angular del pensamiento algebraico". Por tanto, aprender matemáticas implica desarrollar la capacidad de reconocer patrones, interpretar estructuras y establecer relaciones (Lüken y Sauzet, 2020).

2. Trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición en educación infantil

Las trayectorias de aprendizaje se consideran estrategias fundamentadas que favorecen el desarrollo del pensamiento del niño sobre rangos de temas matemáticos específicos (Clements y Sarama, 2019). En este estudio, se propone una trayectoria de aprendizaje que contempla tareas y habilidades para hacer patrones con un orden de abstracción creciente, para así dotar de comprensión y significación los inicios del pensamiento algebraico.

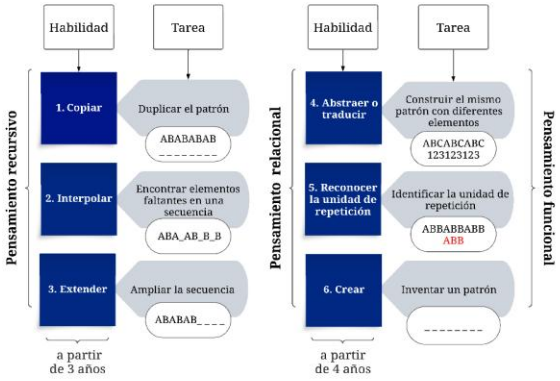


Figura 1. Trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición
Fuente: Elaboración propia de Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022)

3. Tareas para hacer patrones de repetición implementadas en un contexto de aula (3-6 años)

Tarea de duplicar el patrón: Los pasos de peatones de mi ciudad

Tarea de encontrar el elemento faltante: Reparando secuencias

Tarea de ampliar una secuencia: Hasta el infinito y más allá

Tarea de construir un patrón con diferentes elementos: Un jardín especial

Tarea de identificar la unidad de repetición: Cazadores de patrones

Tarea de inventar un patrón: Un mandala gigante

4. Conclusión

Comprender la estructura de los patrones de repetición es crucial para el desarrollo temprano del pensamiento algebraico. Para profundizar en el trabajo con patrones de repetición, es esencial considerar una variedad de tareas e integrar diferentes contextos de enseñanza (Acosta et al., 2022; Pincheira et al., 2023). Alentamos a los docentes y futuros docentes a diseñar propuestas dinámicas dentro de contextos multimodales (Alsina, 2020, 2022). De esta manera, proporcionamos a los docentes y formadores una herramienta para guiar el diseño e implementación de tareas que impulsen un avance sólido hacia formas más sofisticadas de pensar algebraicamente en la educación infantil.

5. Referencias

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 11*(2), 1-37.
Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159.
Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3 a 6 años)*. Graó.
Clements, D., y Sarama, J. (2019). *Learning and teaching with learning trajectories early math—Birth to grade 3*. Learning and teaching with learning trajectories [LT]2.
Lüken, M.M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*.
Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA, 17*(1), 1-24.
Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (2023) Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades. *Uniciencia, 37*(1), 1-20.
Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children, 58*(1), 14-21.

DiToM. Diagnósticos Matemáticos

Blanca Arteaga-Martínez[1], Grupo de trabajo FESPM[2*]
blanca.arteaga@edu.uned.es
Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED[1]
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas[2]

01 Objetivos

- **Crear un instrumento de diagnóstico continuo** que los docentes puedan utilizar para medir habilidades clave en **aritmética y álgebra** al final de un período de aprendizaje de dos años.
- **Reconocer las necesidades especiales** de las aulas inclusivas para la aplicación de herramientas de diagnóstico.

Cinco pruebas de diagnóstico que incorporen las habilidades visoespaciales necesarias para el aprendizaje de la aritmética y el álgebra.

02 Justificación

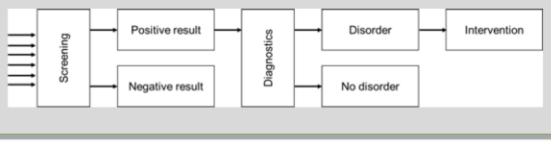
- Los centros educativos, y especialmente los docentes, necesitan **mejores herramientas de diagnóstico del nivel en matemáticas** de sus unidades sobre las que basar y diseñar contenidos didácticos y unidades de aprendizaje posteriores.
- Desarrollar una herramienta de diagnóstico, para los docentes de matemáticas **a nivel europeo.**

Una herramienta para que los docentes **evalúen su práctica docente**, así como para **ayudar a sus estudiantes** en el proceso de aprendizaje.

03 Conceptos clave

- Una **habilidad matemática** representa la aplicación práctica que cierra la brecha entre las competencias y los conceptos matemáticos, permitiendo a las personas aplicar con soltura sus conocimientos matemáticos en diversos contextos.
- Cada habilidad clave contendrá sus respectivos **resultados de aprendizaje previstos** (RAP).
- **Evaluación de Criterios de Referencia (CRA),** el aprendizaje se mide utilizando un conjunto predefinido de criterios y estándares de desempeño correspondientes, es decir, descripciones escritas de lo que se espera que los estudiantes sepan y puedan hacer en una etapa específica de su educación.

04 Secuencia temporal



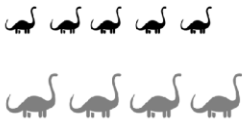
Se utiliza para esta secuencia temporal las denominaciones originales del proyecto.

05 Formato de la tarea

Grado 0, 2, 4, 6, 8

Tarea/Habilidad	Puntuación/posibles respuestas	Información técnica

CÓDIGO/CONTENIDO/SUBCONTENIDO:

Tarea	Respuesta y puntuación	Habilidad (Skill)	Esta habilidad es clave para...
Rodea el conjunto donde haya más dinosaurios: 	La respuesta correcta será rodear el conjunto de 5 dinosaurios negros: - Correcta (5 puntos) - Incorrecta (0 puntos)	Identificar si un número es mayor o menor que otro Comparar cardinales [a partir de conjuntos de objetos o a partir de símbolos] Hasta 10	Preparación para la suma, construyendo el cardinal de un número desde un planteamiento de descomposición aditiva
	Posibles respuestas además de las correctas, conceptos erróneos que puedan tener lugar	**Información formativa y técnica**	
	Se pone en escena el dominio del principio de conservación de la cantidad. Los niños/as que no señalen la respuesta correcta puede ser debido a que confunden tamaño con cantidad.	Nivel: grado 0 Tipo de números: números naturales Contexto: Matemático, no algorítmico Representación: Pictórica Tipo de respuesta: Construida (escrita)	Formato de la respuesta: Abierto Representación de la respuesta: Pictórica. Administración: Escrita Ejemplo previo: ---- Tiempo: 2 minutos

Erasmus+ Cooperation Partnerships - KA220
Project grant no: 2022-1-DE01-KA220-HED-000087938
Project title: Diagnostic Tool in Mathematics - [DiToM]. 2023-2025

** Grupo de trabajo FESPM[2]: Carme Aymerich, Blanca Arteaga, Marta Carazo, Adrián Cuenca, Rosa Mª Fernández, Rut Garí, Maite Górriz, Iolanda Guevara, Claudia Lázaro, Araceli Ramírez, Pilar Sabariego, Daniel Sierra, Juan Antonio Trevejo, José MªVázquez*

Adaptación de applets matemáticos para alumnado con autismo mediante un decálogo validado

Steven Van Vaerenbergh[1], Álvaro Gómez García[2], Irene Polo-Blanco[1]
steven.vanvaerenbergh@unican.es, agarciag02@educantabria.es, irene.polo@unican.es
Universidad de Cantabria[1], IES Alisal[2]

Introducción

En alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA), el uso de las TIC ha demostrado tener numerosos beneficios: mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje; facilitar la comunicación, la comprensión y el razonamiento; aumentar la motivación y la autonomía (Grynszpan et al., 2014).

Las TIC permiten crear entornos de aprendizaje organizados y estructurados, eliminar distractores, potenciar la concentración, promover la inclusión y personalización del aprendizaje, ajustar los materiales a las necesidades de cada estudiante (Romero Martínez et al., 2018). GeoGebra permite crear applets matemáticos visuales y prácticos, pero se necesita una guía para adaptarlos a las características del alumnado con TEA.

Dificultades frecuentes

En alumnado TEA en el aprendizaje de las matemáticas:

- Comunicación, comprensión del lenguaje e interpretación de los enunciados. Funcionamiento ejecutivo (p.ej. planificación) y generalización. Pensamiento abstracto, resolución de problemas.

- Capacidades frecuentes en alumnado TEA en el aprendizaje de las matemáticas

- Habilidades visuales, atención al detalle, interés por los patrones, las formas y los números. Memoria visual y capacidad de cálculo.

Materiales elaborados

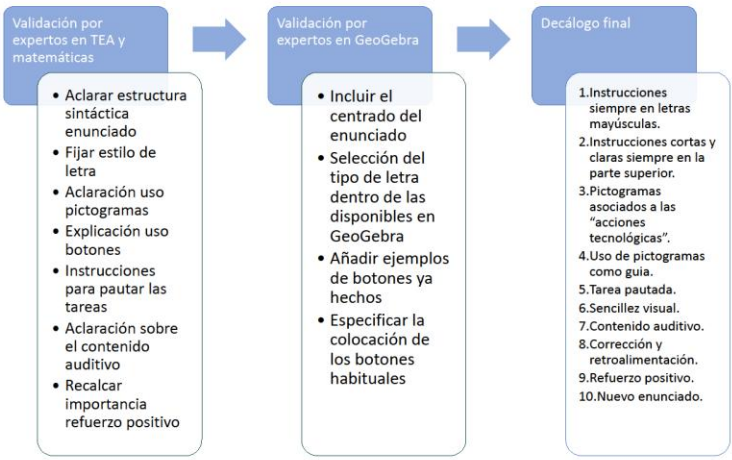
Una plantilla GeoGebra de acuerdo a las pautas del decálogo. Más de 50 applets adaptados al alumnado con TEA, dentro del proyecto MatesGG (matesgg.es).

Objetivo

Validar un decálogo de pautas (Polo-Blanco et al., 2022) para la creación de applets matemáticos adaptados para alumnado con TEA, mediante el juicio de expertos.

Metodología

Validación por juicio de expertos. 5 expertos en TEA y matemáticas. 5 expertos en GeoGebra.
Definir el objetivo y alcance de la validación > Seleccionar los expertos > Explicar el contenido > Posibilitar la discusión > Analizar las respuestas



Bibliografía

- Grynszpan, O., Weiss, P. L., Perez-Diaz, F., & Gal, E. (2014). Innovative technology-based interventions for autism spectrum disorders: a meta-analysis. *Autism, 18*(4), 346-361.
- Romero Martínez, S. J., González, I., García, A., & Lozano, A. (2018). Herramientas tecnológicas para la educación inclusiva. *Tecnología, ciencia y educación, 9*, 83-111.
- Polo-Blanco, I., Goñi-Cervera, J., Van Vaerenbergh, S. (2022). *Decálogo de Pautas para la Creación de Applets Adaptados a Estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA) en un Entorno de GeoGebra* (documento inédito). Universidad de Cantabria.

Proyecto "Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático en alumnado con autismo. Implicaciones para la enseñanza y la formación del profesorado" PID2022-136246NB-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 / FEDER, UE.

1000 días, 1000 fotos

Víctor Monterreal Blázquez
vmonterreal@gmail.com
IES “Satafi”, Getafe (Madrid)

Durante 1000 días he estado publicando una foto matemática diaria en @victormat_es, (Instagram).
Aquí os dejo las más valoradas por la gente y por mí. ¿Cuál es tu preferida?